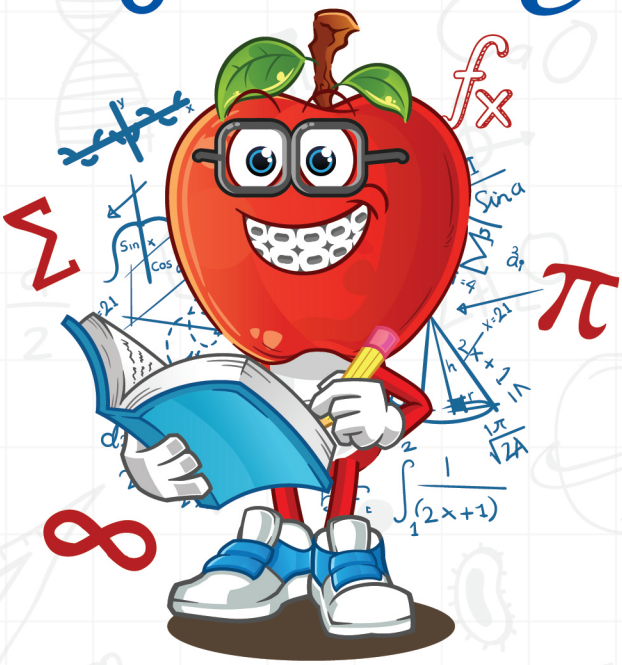
جزوه تست و جمع بندی

نـــوروز ۱۴۰۵

ریاضیات پایه



به همراه پاسخنامه تشریحی

نام و نام خانوادگی

خیلی سبز! ماراتون
قلم‌چی

www.SanjeshCloud.ir

www.BLE.ir/SanjeshCloud

فهرست آزمون های ریاضی و حسابان ۱

موسسه	تاریخ	مبحث	تعداد تست	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلم‌چی	۱۸ مهر	دهم – فصل ۱و۲	۱۰	۱	۶۶
	۲ آبان	دهم – فصل ۲و۳	۱۰	۲	۶۸
	۱۶ آبان	دهم – فصل ۴و۵	۱۰	۴	۷۰
	۳۰ آبان	دهم – فصل ۵و۶	۱۰	۵	۷۲
	۱۴ آذر	دهم – فصل ۶و۷	۱۰	۶	۷۴
	۲۱ آذر	کل دهم	۱۰	۷	۷۶
	۲۸ آذر	فصل ۱و۲	۱۰	۸	۷۸
	۱۰ بهمن	فصل ۲و۳	۱۰	۱۰	۸۱
	۲۴ بهمن	فصل ۴و۵	۱۰	۱۲	۸۳
	۱۸ مهر	دنباله ها و تابع درجه۲	۱۰	۱۳	۸۵
	۲ آبان	تابع	۱۰	۱۴	۸۷
	۱۶ آبان	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰	۱۵	۸۹
	۳۰ آبان	مثلثات	۱۰	۱۷	۹۱
	۱۴ آذر	حد و پیوستگی	۱۰	۱۹	۹۳
	۲۱ آذر	کل حسابان ۱	۱۰	۲۱	۹۶
	۲۸ آذر	دنباله ها و تابع درجه۲	۱۰	۲۳	۹۸
	۱۰ بهمن	تابع	۱۰	۲۴	۱۰۱
	۲۴ بهمن	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰	۲۵	۱۰۳
	۱۳ آذر	معادله و نامعادله	۱۰	۲۶	۱۰۵
	۲۷ آذر	تابع و معادله درجه۲	۱۰	۲۸	۱۱۲

ماز	۹ بهمن	عبارت جبری و توان	۵	۳۰	۱۱۷
	۲۴ بهمن	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۳	۳۱	۱۲۰
	۸ اسفند	مجموعه و دنباله	۹	۳۲	۱۲۹
	۲۲ اسفند	آمار	۷	۳۴	۱۳۳
ماراتون	۱۷ مهر	معادله و نامعادله	۱۰	۳۵	۱۳۹
	۱۵ آبان	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۰	۳۷	۱۴۴
	۲۹ آبان	مثلثات	۱۰	۳۹	۱۴۹
	۱۳ آذر	حد و پیوستگی	۱۰	۴۰	۱۵۴
	۲۷ آذر	مجموعه و دنباله	۱۰	۴۲	۱۶۰
	۱۶ بهمن	توان و عبارت های جبری	۱۰	۴۴	۱۶۵
	۲۴ بهمن	شمارش بدون شمردن	۱۰	۴۵	۱۶۸
خیلی سبز! آزمون	۲۵ مهر	معادله و نامعادله	۱۳	۴۶	۱۷۲
	۱۶ آبان	تابع	۱۰	۴۸	۱۸۶
	۷ آذر	مثلثات	۷	۵۰	۱۹۶
	۱۰ بهمن	هندسه	۴	۵۲	۲۰۴
	۲۴ بهمن	دنباله و الگو	۳	۵۳	۲۰۹
گروه آموزشی ماز دوپینگ	شماره۱	فصل۶ دهم – فصل۳ گسسته – فصل۲و۳ هندسه۱	۳۰	۵۵	۲۱۳
	شماره۲	تابع–توابع نمایی و لگاریتمی–فصل۱ آمار– فصل۴ هندسه۱ – فصل۱ هندسه۲	۳۰	۵۹	۲۲۵
	شماره۳	فصل۱و۳ دهم– فصل۱ گسسته– فصل۲و۳ هندسه۳	۱۵	۶۴	۲۴۴

فهرست آزمون های هندسه پایه

موسسه	تاریخ	مبحث	تعداد تست	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلم‌چی	۱۸ مهر	دهم – فصل ۱	۱۰	۲۵۲	۳۰۹
	۲ آبان	دهم – فصل ۲	۱۰	۲۵۴	۳۱۱
	۱۶ آبان	دهم – فصل۲و۳	۱۰	۲۵۶	۳۱۳
	۳۰ آبان	دهم – فصل ۳	۱۰	۲۵۸	۳۱۶
	۱۴ آذر	دهم – فصل ۴	۱۰	۲۶۰	۳۱۸
	۲۱ آذر	کل دهم	۱۰	۲۶۲	۳۲۰
	۲۸ آذر	دهم – فصل ۱	۱۰	۲۶۵	۳۲۳
	۱۰ بهمن	دهم – فصل ۲	۱۰	۲۶۷	۳۲۶
	۲۴ بهمن	دهم – فصل ۲و۳	۱۰	۲۶۹	۳۲۸
	۱۸ مهر	یازدهم – فصل ۱	۱۰	۲۷۱	۳۳۰
	۲ آبان	یازدهم – فصل ۱	۱۰	۲۷۳	۳۳۲
	۱۶ آبان	یازدهم – فصل ۲	۱۰	۲۷۵	۳۳۴
	۳۰ آبان	یازدهم – فصل ۲	۱۰	۲۷۷	۳۳۷
	۱۴ آذر	یازدهم – فصل ۳	۱۰	۲۷۹	۳۴۰
	۲۱ آذر	یازدهم – فصل ۴	۱۰	۲۸۱	۳۴۳
	۲۸ آذر	کل یازدهم	۱۰	۲۸۳	۳۴۶
	۱۰ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۱۰	۲۸۵	۳۴۹
	۲۴ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۱۰	۲۸۶	۳۵۱
	۲۵ مهر	دهم – فصل ۱	۶	۲۸۸	۳۵۳

	۱۶ آبان	دهم – فصل ۱	۶	۲۸۹	۳۵۹
	۷ آذر	دهم – فصل ۲	۶	۲۹۰	۳۶۵
	۲۸ آذر	دهم – فصل ۳	۵	۲۹۱	۳۷۰
	۱۰ بهمن	دهم – فصل ۴	۵	۲۹۲	۳۷۵
	۲۴ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۵	۲۹۳	۳۸۱
ماز	۱۷ مهر	یازدهم – فصل ۲	۵	۲۹۴	۳۸۶
	۱ آبان	دهم – فصل ۱	۵	۲۹۵	۳۹۰
	۱۵ آبان	دهم – فصل ۲	۵	۲۹۶	۳۹۴
	۲۹ آبان	دهم – فصل ۲	۵	۲۹۷	۴۰۰
	۱۳ آذر	دهم – فصل ۳	۵	۲۹۸	۴۰۴
	۲۷ آذر	دهم – فصل ۴	۶	۲۹۹	۴۰۸
	۹ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۵	۳۰۰	۴۱۵
	۲۳ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۵	۳۰۱	۴۲۱
ماراتون	۱۷ مهر	یازدهم – فصل ۱	۵	۳۰۲	۴۲۹
	۱ آبان	دهم – فصل ۲	۵	۳۰۳	۴۳۳
	۱۵ آبان	دهم – فصل ۲	۵	۳۰۴	۴۳۶
	۲۹ آبان	دهم – فصل ۳	۴	۳۰۵	۴۴۰
	۱۳ آذر	دهم – فصل ۴	۶	۳۰۶	۴۴۲
	۲۷ آذر	یازدهم – فصل ۱	۵	۳۰۷	۴۴۴
	۱۶ بهمن	یازدهم – فصل ۱	۵	۳۰۸	۴۴۹

فهرست آزمون های آمار و مدل سازی

موسسه	تاریخ	مبحث	تعداد تست	صفحه سوال	صفحه پاسخ
قلم‌چی	۱۸ مهر	فصل ۱	۱۰	۴۵۳	۴۹۱
	۲ آبان	فصل ۱	۱۰	۴۵۴	۴۹۳
	۱۶ آبان	فصل ۲	۱۰	۴۵۵	۴۹۵
	۳۰ آبان	فصل ۳	۱۰	۴۵۶	۴۹۷
	۱۴ آذر	فصل ۴	۱۰	۴۵۸	۵۰۰
	۲۱ آذر	کل آمار	۱۰	۴۶۰	۵۰۲
	۲۸ آذر	فصل ۱	۱۰	۴۶۲	۵۰۴
	۱۰ بهمن	فصل ۱	۱۰	۴۶۳	۵۰۷
	۲۴ بهمن	فصل ۲	۱۰	۴۶۵	۵۰۹
	۱۰ اسفند	فصل ۳	۱۰	۴۶۷	۵۱۱
	۲۴ اسفند	فصل ۴	۱۰	۴۶۹	۵۱۳
خیلی سبز! آزمون	۲۵ مهر	فصل ۱	۵	۴۷۱	۵۱۵
	۱۶ آبان	فصل ۲	۴	۴۷۲	۵۱۸
	۲۴ بهمن	فصل ۳	۶	۴۷۳	۵۲۲
ماز	۱۷ مهر	فصل ۱	۵	۴۷۴	۵۲۸
	۱ آبان	فصل ۱	۵	۴۷۵	۵۳۱
	۱۵ آبان	فصل ۲	۵	۴۷۶	۵۳۵
	۲۹ آبان	فصل ۲	۵	۴۷۷	۵۴۰
	۱۳ آذر	فصل ۳	۵	۴۷۸	۵۴۵
	۲۷ آذر	فصل ۴	۴	۴۷۹	۵۵۰
	۹ بهمن	فصل ۱	۴	۴۸۰	۵۵۴
	۲۳ بهمن	فصل ۲	۵	۴۸۱	۵۵۸
	۹ اسفند	فصل ۳	۶	۴۸۲	۵۶۵
	۲۳ اسفند	فصل ۴	۵	۴۸۳	۵۶۷
ماراتون	۱۷ مهر	فصل ۱	۵	۴۸۴	۵۶۹
	۱ آبان	فصل ۱	۵	۴۸۵	۵۷۲
	۱۵ آبان	فصل ۱	۵	۴۸۶	۵۷۵
	۲۹ آبان	فصل ۱	۵	۴۸۷	۵۷۸
	۱۳ آذر	فصل ۲	۵	۴۸۸	۵۸۳
	۲۷ آذر	فصل ۲	۵	۴۸۹	۵۸۶
	۱۶ بهمن	فصل ۲	۵	۴۹۰	۵۸۸

سنجش کلاد

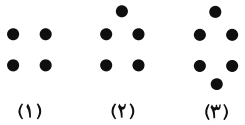
۱- دو بازهٔ $A=[m-2\ ,\ 4)$ و $B=[-3\ ,\ 3m-1)$ جدا از هم هستند. حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}<m<6$ ۲) $-\frac{1}{2}<m\leq -\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}<m\leq -\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}<m\leq -\frac{1}{4}$

۲- اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B برابر ۷ و تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ برابر ۱۰ است. اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

۳- اگر a_n جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی باشد که جملات اولیهٔ آن تعداد نقاط سیاه شکل زیر باشد، حاصل $a_{۱۶}+a_{۱۳}+a_۹+a_۵+a_۲$ برابر کدام است؟



۱) ۳۶
۲) ۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۷۲

۴- جملات اول، چهارم و پنجم یک دنباله درجه دو به ترتیب ۵، ۱۴ و ۲۰ است. جملهٔ هشتم این دنباله برابر کدام است؟

۱) ۲۷/۵ ۲) ۳۶/۵ ۳) ۴۷ ۴) ۴۸

۵- بین اعداد ۸ و ۱۵۵ چند واسطهٔ حسابی درج کنیم تا اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد درج شده برابر ۱۴۱ باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

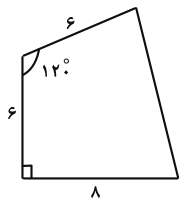
۶- اعداد 3^m، $\sqrt[3]{3}$ و 3^n سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند، واسطهٔ حسابی بین m و n کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۷- اعداد a، b و c با همین ترتیب و همچنین اعداد $a+10$، $-b$ و $c+10$ نیز با همین ترتیب تشکیل یک دنبالهٔ هندسی را می‌دهند. کدام گزینه درست است؟

۱) واسطهٔ حسابی a و c برابر با ۵ است.
۲) واسطهٔ حسابی a و c برابر با ۵- است.
۳) واسطهٔ هندسی a و c برابر با ۵ است.
۴) واسطهٔ هندسی a و c برابر با ۵- است.

۸- مساحت چهارضلعی زیر کدام است؟

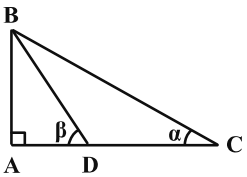


۱) $۱۸+۱۸\sqrt{۳}$
۲) $۱۸+۹\sqrt{۳}$
۳) $۳۶+۱۸\sqrt{۳}$
۴) $۳۶+۹\sqrt{۳}$

۹- شخصی نزدیک آنتن یک استگاه رادیویی ایستاده است. زاویهٔ دید شخص با نوک آنتن، 60° است. اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود، زاویهٔ دیدش در موقعیت جدید 45° می‌شود. برای این‌که وی در موقعیت 30° قرار بگیرد چند متر دیگر باید به عقب برود؟

۱) $۱۵۰\sqrt{۳}$ ۲) $۱۰۰\sqrt{۳}$ ۳) $۷۵\sqrt{۳}$ ۴) $۵۰\sqrt{۳}$

۱۰- در شکل زیر $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ و $\cot\beta=\frac{۵}{۱۲}$، مقدار $\frac{DC}{AB}$ کدام است؟



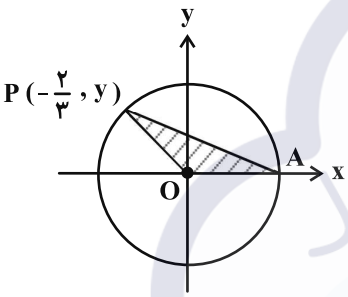
۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

آزمون ریاضی‌دهم قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴

۱- اگر $۹۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$ و $\frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta} + \cot\theta = ۱/۵$، آنگاه مقدار $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $۰/۴\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۲\sqrt{۵}$ ۳) $-۰/۲\sqrt{۵}$ ۴) $-۰/۴\sqrt{۵}$

۲- در دایرهٔ مثلثاتی زیر، O مبدأ مختصات و $P(-\frac{۲}{۳}, y)$ نقطه‌ای روی محیط دایره می‌باشد، مساحت مثلث POA کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۶}$

۲) $\frac{۵}{۱۲}$

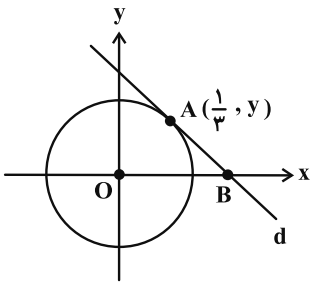
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$

۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۳- اگر رابطهٔ $(\tan x - \cot x)^۲ = \frac{a}{\sin^۲ x . \cos^۲ x} + b$ یک اتحاد مثلثاتی (برحسب x) باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(\sin x \ , \ \cos x \neq ۰)$

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۳- ۴) ۳

۴- در شکل زیر، خط d بر دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ A مماس است. اندازهٔ OB کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۳

۴) $۲\sqrt{۲}$

۵- با فرض $\sin^۴ x + ۴\cos^۴ x = ۱$، مقدار $\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ ۲) $-\sqrt[۴]{\frac{۳}{۵}}$ ۳) $-\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ ۴) $-\sqrt[۴]{\frac{۲}{۵}}$

۶- حاصل عبارت گویا و تعریف شدهٔ $A = \frac{۳x}{۳x+۱} + \frac{۳}{۳x-۱} - \frac{۶x+۴}{۹x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۲

۷- اگر $n+۱ < \sqrt[۴]{\frac{(\sqrt{۲}-۱)^۲(\sqrt{۲}+۱)^۴}{۳-۲\sqrt{۲}}}$ باشد، اختلاف ریشه‌های چهارم عدد $(۵n-۱)$ برابر با کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۴]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۴]{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۸- اگر $b = \sqrt{a+۱} - ۳\sqrt{۹a+۴}$ باشد، حاصل $\sqrt{a+۱}$ برحسب b کدام است؟

۱) $\frac{b}{۲} - \frac{۵}{۲b}$ ۲) $-\frac{b}{۲} - \frac{۵}{۲b}$ ۳) $\frac{b}{۶} - \frac{۵}{۶b}$ ۴) $-\frac{b}{۶} - \frac{۵}{۶b}$

۹- با فرض $A = \sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱} + \sqrt{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۴}}$، ریشهٔ دوم و مثبت عدد $A^۴ + ۸$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۱۰- اگر $a = ۲b$ و $a + \frac{۱}{b} = ۴$ باشد، حاصل $\frac{a^۵b^۳ + a^۲}{a^۲b^۵ + b^۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۴}{۶۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۶۳}$

۱- اگر $x=\alpha$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $\frac{۳}{۴}x^۲-mx+۲m-۳=۰$ باشد، حاصل $m-\alpha$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

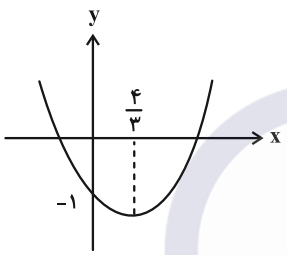
۲- به ازای چند مقدار صحیح برای m، تابع $y=mx^۲-۲mx+۳$ خط $y=۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند ولی با خط $y=۵$ نقطهٔ تلاقی ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- سهمی‌های $y=mx^۲+x+۲m$ و $y=kx^۲+۲kx+k+۵$ مفروض‌اند. اگر نمودار هر سهمی از رأس سهمی دیگر عبور کند، مقدار $k-m$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۴- ۴) ۲-

۴- شکل زیر نمودار سهمی $y=\frac{۳a}{۴}x^۲+(b+۳)x+(c-۲)$ است. حاصل $۲a+b-c$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۴-
۳) ۲
۴) ۴

۵- جواب نامعادلهٔ $(x+۱)(۲x^۲+ax+۳a)<۰$ برابر $(-\infty\,,\,b)-\{-۱\}$ می‌باشد. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۲/۵- ۲) ۱/۵- ۳) ۳- ۴) ۲-

۶- دو معادلهٔ $x^۲+۳x-۷m=۰$ و $x^۲+۲x-۵m=۰$ دارای یک ریشهٔ غیرصفر مشترک هستند، حاصل‌جمع ریشه‌های غیرمشترک این دو معادله کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۵ ۳) ۶- ۴) ۶

۷- چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۱۱x+۱}{x^۲+x-۲}>\frac{x+۳}{x-۱}$ صدق می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸- اگر $f=\{(۴\,,\,۲b-۱)\,,\,(۲\,,\,a)\,,\,(۴\,,\,۱)\,,\,(b^۲+۱\,,\,b)\}$ بیانگر یک تابع باشد، حاصل $a^۲-۲b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲-

۱۹- برد تابع $f(x)=\frac{۴-۲x}{۳}$ به صورت $[\,a\,,\,۴]$ می‌باشد. اگر دامنهٔ تابع، بازهٔ $[\,۳\,,\,\frac{b}{۳}\,]$ باشد، حاصل $۳a+۲b$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۱۴- ۳) ۲۰- ۴) ۲۶-

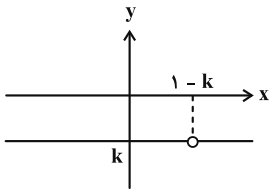
۱۰- برد تابع $f(x)=\frac{x^۳+x^۲-۹x-۹}{x^۲-۲x-۳}$ به صورت $R-\{a,b\}$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱- اگر f تابع همانی و g تابع ثابت باشد و داشته باشیم $g(۴x)+۳f(۱-x)=۴-۳x$ آنگاه حاصل $\frac{f(-۲)}{g(۵)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) -۲

۲- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱۲+۲kx}{۲x-a}$ به صورت شکل زیر است. مقدار $a+k$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۸
۳) ۴
۴) -۴

۳- نمودار تابع $y=|x|-۲$ را یک واحد به طرف yهای مثبت و ۴ واحد به طرف xهای منفی انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ محدود بین تابع حاصل و محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴- اگر مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=|x-۳m|+۲m$ و محور طول‌ها برابر با $\frac{۱}{۹}$ باشد، $f(\frac{۱}{۳})$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵- از بین ۹ کارت با شماره های ۱ تا ۹ به چند طریق می‌توان عدد ۴ رقمی ساخت به‌طوری که ارقام آن عدد، ۴ رقم متوالی باشند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۶ ۴) ۲۴

۶- با ارقام ۰,۲,۳,۴,۷ چند عدد ۴ رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۷- با استفاده از حروف کلمهٔ «جمهوری» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که حروف «ج» و «م» کنار هم بوده ولی حروف «ر» و «ی» کنار هم نباشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۴۴

۸- با حروف کلمهٔ «شتابزده» چند کلمهٔ ۳ حرفی بدون حروف تکراری شامل ۴ تا نقطه می‌توان نوشت؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۶۳ ۴) ۸۴

۹- ۳ مهرهٔ سفید متمایز و ۵ مهرهٔ مشکی متمایز را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم قرار داد، به‌طوری که حداکثر ۲ مهرهٔ سفید کنار هم قرار گیرند؟

۱) ۱۴۴۰ ۲) ۵۰۴۰ ۳) ۳۹۶۰۰ ۴) ۳۶۰۰۰

۱۰- ۶ نفر که دو تای آن‌ها برادرند در یک صف قرار دارند. تعداد حالاتی که دقیقاً دو نفر بین این دو برادر قرار بگیرند، چند برابر تعداد حالاتی است که دو بردار کنار هم نباشند؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۲۰}$

۱- در چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دقیقاً دو رقم متمایز وجود دارد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۵

۲- اگر $A=\binom{9}{5}+\binom{9}{7}+\binom{11}{7}-2\binom{9}{6}$ و $B=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$، حاصل $A+B$ کدام است؟

۱) ۱۳۷ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۰۸

۳- در یک امتحان کتبی با ۸ سؤال، به چند روش می‌توان به ۵ سؤال جواب داد، هرگاه پاسخ به حداقل ۴ سؤال از ۵ سؤال اول اجباری باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۳۱ ۴) ۳۰

۴- یکی از زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که g و h عضو این زیرمجموعه نباشند، ولی a عضو این زیرمجموعه باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۵}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۵- در یک مهمانی ۶ عضو تیم استقلال و ۷ عضو تیم پرسپولیس حضور دارند. از بین این افراد به تصادف سه نفر انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که این سه نفر از دو تیم مختلف باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲۱}{۲۶}$ ۳) $\frac{۱۸۱}{۲۸۶}$ ۴) $\frac{۸۱}{۱۴۳}$

۶- پدر علی دارای ۴ فرزند است. احتمال این که در این خانواده تعداد دختران کمتر از تعداد پسران نباشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۷- در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و تعدادی مهرهٔ سیاه وجود دارد. دو مهره به تصادف و با هم از جعبه خارج می‌کنیم. اگر احتمال خارج شدن حداقل یک مهرهٔ سفید برابر $\frac{۹}{۱۴}$ باشد، تعداد مهره‌های سیاه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸- اگر $P(A')=۲P(B')=۰/۶$ و $P(A\cap B')+P(B\cap A')=۰/۷$ باشد، آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹

۹- در پرتاب دو تاس با هم، A پیشامد یکسان بودن اعداد رو شده، B پیشامد مجموع برابر ۶ و C پیشامد هر دو تاس اعداد اول هستند. کدام دو پیشامد ناسازگارند؟

۱) $A\cap B$ و C ۲) $C-B$ و A ۳) $A-B$ و C ۴) $B-C$ و A

۱۰- در کدام گزینه تمام متغیرهای کمی پیوسته، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی وجود دارد؟

۱) میزان بارندگی- نوع بارندگی- شاخص تودهٔ بدنی- تعداد دانه‌های یک انار

۲) دمای هوا- رنگ ماشین- نژاد افراد- سرعت اتومبیل

۳) شاخص تودهٔ بدنی- مراحل رشد نوزاد- رنگ مو- تعداد ماهی‌های یک رودخانه

۴) میزان بارندگی- اقوام ایرانی- کیفیت میوه- شاخص تودهٔ بدنی

آزمون ویژهٔ ریاضی دهم قلمچی ۲۱ آذر ۱۴۰۴

۱- جملهٔ عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}; n \geq 3$ است. اگر $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ باشد، جملهٔ هفتم چند واحد از جملهٔ پنجم بیشتر است؟

۱) ۹۹ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۹۸ ۴) ۲۳۹

۲- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت منفی، جمله اول ۲۴ واحد کمتر از جملهٔ دوم و جملهٔ چهارم ۲۱۶ واحد بیشتر از جملهٔ سوم است. مجموع چهار جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) -۲۴۰ ۲) ۱۲۰ ۳) -۶۰ ۴) ۳۰

۳- اگر α زاویهٔ بین خط به معادله $6x + 2y + 1 = 0$ با جهت مثبت محور xها باشد، حاصل عبارت $\frac{-\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{7}{5}$ ۴) -۲

۴- اگر $a = \sqrt[4]{15 + 2\sqrt{14}}$ و $b = \sqrt[4]{15 - 2\sqrt{14}}$ باشد، حاصل $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۰ ۳) ۴۳ ۴) ۵۶

۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع متوسط از چهار برابر طول ضلع کوچک مثلث، چهار واحد بیشتر و طول وتر از پنج برابر طول ضلع کوچک مثلث، چهار واحد کمتر است. محیط مثلث کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۸۴ ۳) ۷۰ ۴) ۵۶

۶- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{-x^2 + ax + b}{x + c}$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $\frac{2a - b}{c}$ کدام است؟

x		-2		1	
$P(x)$	$+$	ت‌ن	$+$	۰	$-$

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۲- ۴) ۴-

۷- اگر $g = \left\{(2, k^2 + 8), (-1, \frac{b}{2}), (0, 7k - 2)\right\}$ تابعی ثابت باشد، بیش‌ترین مقدار $b + k$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶۶ ۲) ۷۱ ۳) ۲۶ ۴) ۲۹

۸- دامنهٔ تابع $f(x) = ax^2 + 8x + a + 2$ برابر با $\mathbb{R}$ و برد آن $(-\infty, 8]$ است. مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۴

۹- با حروف کلمه «فوتبالی» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع و به حرف بدون نقطه ختم شود؟

۱) $۱۵ \times ۵!$ ۲) $۲ \times ۵!$ ۳) $۷!$ ۴) $۲ \times ۶!$

۱۰- سکه‌ای را ۱۲ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در ۴ پرتاب اول، دقیقاً دوبار پشت و در شش پرتاب دوم، حداقل سه بار پشت ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{13}{64}$ ۲) $\frac{75}{256}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{63}{256}$

آزمون ریاضی دهم قلمچی ۲۸ آذر ۱۴۰۴

۱- اگر طول بازهٔ $(3a+1\ ,\ -4a+8)$ برابر ۲۱ باشد، نقطهٔ وسط بازهٔ $(a-4\ ,\ -3a+4)$ کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

۲- اگر $(A-B)\cup(B-A)$ نامتناهی باشد، چه تعداد از مجموعه‌های $A-B$ ، $B-A$ ، $A\cup B$ و $A\cap B$ حتماً نامتناهی‌اند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

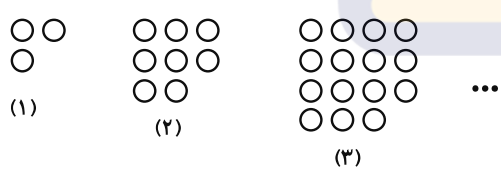
۳- در یک کلاس ۳۰ نفری، هر دانش‌آموز حداقل در یکی از دو درس ریاضی و فیزیک قبول شده است. اگر تعداد قبولی در درس ریاضی ۸ نفر بیشتر از تعداد قبولی درس فیزیک و ۱۴ نفر بیشتر از قبولی در هر دو درس باشد، تعداد قبولی در درس ریاضی کدام است؟

۱) ۲۰　　۲) ۲۲　　۳) ۲۴　　۴) ۲۶

۴- مجموعه‌های A و B از مجموعهٔ مرجع چهل عضوی S مفروض‌اند. اگر تعداد اعضایی از S که فقط در یکی از مجموعه‌های A و B قرار دارند دو برابر تعداد عضوهایی باشد که در هر دو مجموعه قرار دارند، به ازای کدام مقدار برای $n(A\cap B)$، حاصل $\frac{n(A'\cap B')}{n(A\cap B)}$ کمینه می‌شود؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۳　　۴) ۱۵

۵- در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد دایره‌ها ۴۲ واحد از شمارهٔ مرحله بیشتر است؟



۱) ۸

۲) ۷

۳) ۶

۴) ۵

۶- در یک دنبالهٔ حسابی روابط $9a_4^2-a_2^2=4a_5\neq 0$ و $a_6=-5$ برقرار است. جملهٔ یازدهم دنباله کدام است؟

۱) ۱۶-　　۲) ۱۸-　　۳) ۲۰-　　۴) ۲۲-

۷- در یک دنبالهٔ هندسی صعودی، مجموع جملات اول و دوم ۴ و مجموع جملات سوم و چهارم ۳۶ است. جملهٔ دهم دنباله کدام است؟

۱) ۲×۳^{۹}

۲) $۳^{۹}$

۳) -۲×۳^{۹}

۴) $۳^{۱۰}$

۸- حاصل عبارت $(\sin ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ)(\sin ۴۵^\circ - \cos ۶۰^\circ)$ با کدام گزینه برابر است؟

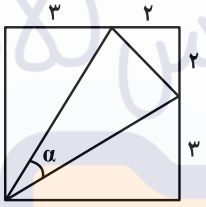
۱) $\cos ۶۰^\circ$

۲) $\sin^{۲} ۳۰^\circ$

۳) $\cos ۴۵^\circ$

۴) $\sin ۶۰^\circ$

۹- در مربع زیر، حاصل $\sin\alpha + \cos\alpha$ کدام است؟



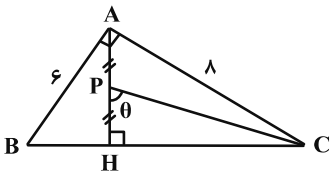
۱) $\frac{۲۰}{۱۷}$

۲) $\frac{۲۳}{۱۷}$

۳) $\frac{۱۸}{۱۷}$

۴) $\frac{۸}{۱۷}$

۱۰- در شکل مقابل، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟ $(AP = PH)$



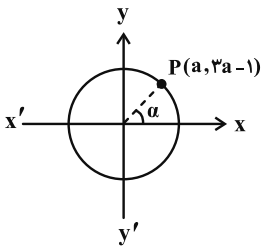
۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۳۷۵

۳) ۰/۳

۴) ۰/۲

۱- در شکل زیر، نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\cot^{۲}\alpha-\frac{۱}{\cos\alpha}$ کدام است؟



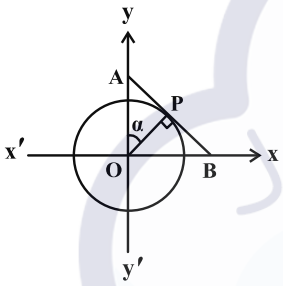
۱) $-\frac{۵۸}{۴۳}$

۲) $-\frac{۴۸}{۵۳}$

۳) $-\frac{۴۳}{۵۸}$

۴) $-\frac{۵۳}{۴۸}$

۲- در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر، طول پاره‌خط AB کدام است؟



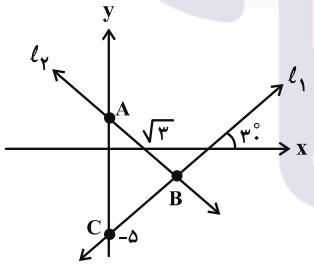
۱) $\sin\alpha+\cos\alpha$

۲) $|\sin\alpha-\cos\alpha|$

۳) $\tan\alpha+\cot\alpha$

۴) $|\tan\alpha-\cot\alpha|$

۳- در شکل زیر، دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ بر هم عمودند. مساحت مثلث ABC چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



۱) ۱۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۲

۴- حاصل عبارت $\frac{۱-\sin^{۳}x-\cos^{۳}x}{\sin x+\cos x+۲}$ کدام است؟

۱) $(۱-\sin x)(۱-\cos x)$

۲) $(۱+\sin x)(۱+\cos x)$

۳) $(۱+\sin x)(۱-\cos x)$

۴) $(۱-\sin x)(۱+\cos x)$

۵- اگر کمترین مقدار عبارت $A = ۲\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha + ۵$ برابر a و بیشترین مقدار عبارت $B = \frac{۵ - \tan\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$ برابر b باشد. مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۶- ۴) ۸-

۶- اگر $\sqrt[۸]{۱۶} = \sqrt[a-۲]{۲ \times \sqrt[a+۱]{۸}}$ باشد، حاصل $\sqrt[a-۳]{\sqrt{a+۱۱}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۷- حاصل عبارت $\sqrt[۴]{۷ + ۲\sqrt{۶}} . \sqrt{۲\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt[۴]{۵۰}$ ۴) $\sqrt[۴]{۲۰}$

۸- با فرض $A = \frac{(\sqrt{۸} + \sqrt{۱۸})(\sqrt{۴\sqrt{۲}} + ۲^{\frac{۱}{۴}})}{\sqrt[۳]{۵۴} + ۱۶^{\frac{۱}{۳}}}$، حاصل $(\frac{A}{۳})^{۲۴}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۵}$ ۲) $۲^{۱۲}$ ۳) $۲^{۵}$ ۴) $۲^{۱۰}$

۹- کدام عبارت زیر، عاملی از تجزیهٔ عبارت $۴x^۴ - ۱۷x^۲y^۲ + ۴y^۴$ نیست؟

۱) $x^۲ - ۴y^۲$ ۲) $x + y$ ۳) $۲x + y$ ۴) $۲x - y$

۱۰- اگر $x = \sqrt[۳]{۵ + \sqrt{۱۷}} - \sqrt[۳]{۵ - \sqrt{۱۷}}$، حاصل $\sqrt{x^۶ + ۱۲x^۴ + ۳۶x^۲ - ۴}$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۸ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۱۲

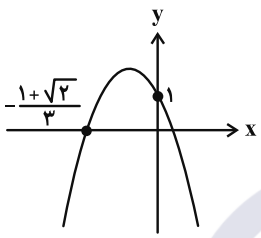
۱- اگر دو معادلهٔ متمایز $x^۲+۴x+m+۱=۰$ و $x^۲+(m+۳)x+۲=۰$ دارای ریشهٔ یکسانی باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) -۶

۲- ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(m+۳)x-۲m^۲+۳m+۲=۰$ دو عدد طبیعی غیرمتوالی هستند. ریشهٔ غیرصحیح معادلهٔ درجه دوم $(m-۵)x^۲+۲(m+۲)x+m+۹=۰$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۲/۵ ۳) -۰/۴ ۴) -۲/۵

۳- در سهمی شکل زیر، مجموع طول و عرض رأس سهمی کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۷}{۳}$

۴- اگر سهمی $y=ax^۲+bx+c$ در نقطه‌ای به طول $x_۰=-۲$ بر خط $y=۴$ مماس و در بقیهٔ نقاط زیر این خط باشد و از مبدأ مختصات بگذرد، طول بازه‌ای که سهمی بالای نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۵- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۱|۲<\sqrt{۳x+۴}$ بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

۶- اگر جدول تعیین علامت $f(x)=\frac{|a-x|(۴x^۲-b)^۲}{x^۳+(۱-a)x^۲+(۱-a)x-a}$ به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{b}{ac}$ کدام است؟

x		c		۵		۶		$+\infty$
f(x)	−	۰	−	‖	+	۰	+	

۱) -۳/۶ ۲) ۷/۲
۳) -۴/۸ ۴) ۳/۲

۷- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|\frac{x+۳}{ax+۵}|<۱$ به صورت $(b,+\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

۸- فرض کنید $f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$، ضابطهٔ تابع $f(۳x)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟ $(x\neq ۳)$

۱) $\frac{۲f(x)+۱}{f(x)+۲}$ ۲) $\frac{f(x)+۱}{f(x)-۲}$ ۳) $\frac{۲f(x)-۱}{f(x)-۱}$ ۴) $\frac{۲f(x)+۱}{۲f(x)-۱}$

۹- اگر $f=\{(۱,m),(۲,۰),(m,-۸)\}$ یک تابع خطی باشد، آنگاه مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰- برای تابع $f(x)=۲|x|+۱$ با دامنهٔ $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\frac{۱}{x-۳}<\frac{x}{x^۲-۹}\}$، مجموع مقادیر صحیح برد کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

آزمون حسابان۱ قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴

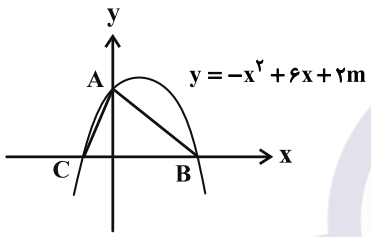
۱- در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل چند جمله اول را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۲- در دنبالهٔ هندسی t_n با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ داریم $t_1+t_2=\frac{8}{3}$ و $t_1t_2=\frac{4}{3}$، مجموع ۵ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{244}{3}$ ۲) $\frac{241}{3}$ ۳) $\frac{242}{3}$ ۴) $\frac{239}{3}$

۳- چند مقدار مختلف برای m می‌توان یافت تا مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد؟



۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) بی‌شمار

۴- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{3-\alpha}+\frac{\beta^2+1}{3}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۲۸ ۴) ۳

۵- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^6-7x^3+8=0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^6+\beta^6}{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۸/۲۵ ۳) ۱۳/۲۵ ۴) ۱۶/۵

۶- اگر نمودار تابع $f(x)=(x+2a)^2-4x+b$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ بر محور x ها مماس باشد آن‌گاه مجموع معکوس صفرهای تابع $g(x)=(a+b)x-f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۷- به ازای چند مقدار a، معادلهٔ $\frac{a+1}{3x+6}=\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2-4}$ یک جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸- اگر جواب معادلهٔ $(x+1)(\sqrt{2x-1}-3)+\frac{19}{2}=0$ بین دو عدد صحیح متوالی باشد، جمع آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

۹- مجموعه جواب‌های معادلهٔ $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$ و نامعادلهٔ $|x-a|\le b$ با یکدیگر برابر است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۱۰- اگر دو ضلع یک مستطیل روی خطوط $L:4x-2y+3=0$ و $L':y=2x$ و یکی از قطرهای آن روی خط $L'':y=4x$ واقع باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{27}{16}$ ۲) $\frac{81}{16}$ ۳) $\frac{81}{20}$ ۴) $\frac{81}{40}$

آزمون حسابان۱ قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴

۱- در کدام یک از معادلات داده شده، y تابعی از x است؟

۱) $y^2 = x + |x|$ ۲) $|y| = |x| - x$ ۳) $y^2 = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ ۴) $|y| = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

۲- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{(2a-b)x^3 - 2bx^2 + ax + 1}$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، کمترین مقدار ممکن برای $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۲۴ ۳) -۳۶ ۴) -۴۸

۳- با فرض $f = \{(-1, 2), (3, 4), (-2, 4), (1, 3)\}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$، برد تابع $\frac{2f+1}{g}$ دارای چند عضو است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- اگر ضابطهٔ وارون تابع $y = \sqrt{5x+3} + \sqrt{5x-1}$ به صورت $y = \frac{x^2}{a} + \frac{4}{bx^2} - \frac{1}{5}$ باشد، آن‌گاه مقدار ab کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

۵- تابع $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ با دامنهٔ $(2a-5, 3a-8)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

۱) $(3, 4] \cup [5, +\infty)$ ۲) $\mathbb{R} - (5, 8)$ ۳) $(2, 6)$ ۴) $\mathbb{R} - (4, 5)$

۶- دامنه‌های دو تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{[x]-2}}$ و $g(x) = \sqrt{ax^2 + bx - 5}$ با هم برابر هستند. حاصل $(f+g)(3/6)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۷- اگر $f(x) = a - \sqrt{x-b}$ و تابع $y = (fof^{-1})(x) + (f^{-1}of)(x)$ برابر با مجموعهٔ زوج مرتب $\{(1, c)\}$ باشد، در این صورت حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸- توابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ x \le 1 \\ 3x+1 & , \ -1 \le x \le 4 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 7x-1 & , \ -2 \le x < 3 \\ 3x-4 & , \ x \ge 3 \end{cases}$ مفروضند. تابع $y = (fog)(x)$ دارای چند صفر می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹- اگر تابع $f(x) = \frac{(2a-1)x+1}{2ax+2}$ یک تابع غیر یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه وارون تابع $g(x) = \frac{2x+a}{x+a}$ کدام است؟

۱) $\frac{1-x}{x-2}$ ۲) $\frac{x-1}{x-2}$ ۳) $\frac{x+1}{x-2}$ ۴) $\frac{1+x}{x+2}$

۱۰- می‌دانیم $f(x) = 2x^2 - 8x + m$ و $g(x) = x - 2[\frac{x}{2}]$. اگر برد تابع $(fog)(x)$ برابر $(a, b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

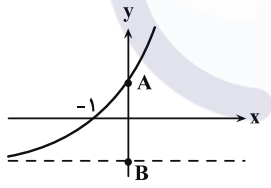
۱- در تابع نمایی $f(x)=(\frac{۴m-۲}{۱۲m-۳})^x$ با افزایش x، مقدار تابع کاهش می‌یابد. اگر مجموعه مقادیر m، بازه $\mathbb{R}-[a,b]$ باشد، مقدار عددی $۲a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲- نیمه‌عمر یک ماده ۴۸ ساعت است. اگر ۲۵۶ گرم از این ماده در اختیار داشته باشیم، جرمی که پس از ۱۴۴ ساعت باقی می‌ماند چند گرم است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۲۸ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

۳- منحنی تابع $f(x)=ka^{\frac{x}{۲}}+b$ به شکل زیر است. اگر نقاط A و B نسبت به مبدأ مختصات متقارن بوده و فاصلهٔ نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات از یکدیگر برابر $\sqrt{۵}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



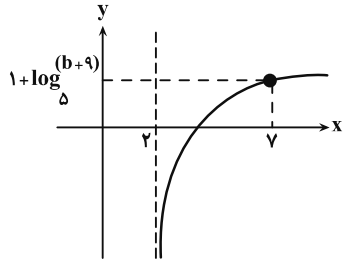
۱) ۲

۲) -۲

۳) -۴

۴) ۴

۴- شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۵}^{(ax+b)}$ را نشان می‌دهد، مقدار $f(\frac{۳۱}{۳})$ کدام است؟



۱) ۰/۵

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۲/۵

۵- جواب معادلهٔ $۲^{x+۱}=۵^{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-\log ۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱-۲\log ۴}$

۳) $\frac{۱}{۱+\log ۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱+۲\log ۴}$

۶- اگر $A=\log_{۶}^{(۱۱+۶\sqrt{۲})}+۲\log_{۶}^{(۳-\sqrt{۲})}$ آنگاه:

۱) $۰<A<۱$ ۲) $۲<A<۳$

۳) $۱/۵<A<۲$ ۴) $۱<A<۱/۵$

۷- اگر $\log ۲=a$ آنگاه $\log\sqrt[۵]{۶/۲۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}(۱-۲a)$ ۲) $\frac{۱}{۵}(۱-۲a)$

۳) $\frac{۱}{۵}(۱-a)$ ۴) $\frac{۲}{۵}(۱-a)$

۸- اگر $f(x)=۱۰^{x}$ و $x=a$ جواب معادله $f^{-۱}(x+۳)=۱-۲\log_{۱۰۰}^{x}$ باشد، مقدار $\log_{۲}^{(۳-a)}$ برابر کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

۹- اگر داشته باشیم $\log_{۴}^{۸۱}=\log_{۲}^{(x^{۲}+x+۱)}+\log_{۲}^{(۱-x)}$، آنگاه مقدار $\log_{۹}^{\frac{-x}{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{-۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰- بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{\log_{\sqrt[۳]{۳}}^{x^{۲}}+\log_{x}^{۲۷} \mid ۰<x<۱\}$ برابر کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۶}$ ۲) $-۶\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{-\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$

آزمون حسابان۱ قلمچی ۳۰ آبان ۱۴۰۴

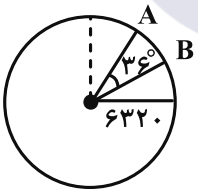
۱- θ زاویه‌ای در بازهٔ $(۰ , ۳۶۰)$ درجه است که اندازهٔ آن برحسب رادیان به صورت $\frac{a\pi}{b}$ می‌باشد. اگر انتهای زاویهٔ θ در ربع دوم و $\sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟ (a و b اعداد صحیح مثبت و نسبت به هم اول می‌باشند.)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۲- در یک مخروط با شعاع قاعدهٔ ۱۲، اندازهٔ زاویهٔ قطاع حاصل از شکل گستردهٔ مخروط برابر ۲۱۶° است. حجم مخروط چقدر است؟

۱) ۷۶۸π ۲) ۵۷۶π ۳) ۱۱۵۲π ۴) ۳۸۴π

۳- فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل زیر برابر طول کمانی از دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد. با فرض این‌که شعاع کرهٔ زمین $۶۳۲۰km$ است، فاصلهٔ این دو نقطه چند کیلومتر است؟



۱) ۱۲۶۴π

۲) ۱۵۸۰π

۳) ۲۵۲۸π

۴) ۳۱۶۰π

۴- حاصل $A = \frac{\cos\frac{۲۳\pi}{۱۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲}}{\sin\frac{۲۵\pi}{۱۲} + \cos\frac{۱۳\pi}{۱۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-۲\sqrt{۳}$

۵- اگر $\sin ۱۰^\circ = m$، حاصل $\frac{\cot ۱۰۰^\circ + \cot ۲۸۰^\circ}{\tan ۱۹۰^\circ - \tan ۸۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{m^۲}{۱-۲m^۲}$ ۲) $\frac{m^۲}{۲m^۲-۱}$ ۳) $\frac{۲m^۲}{۲m^۲+۱}$ ۴) $\frac{۲m^۲}{۱-۲m^۲}$

۶- نمودار دو تابع $f(x) = -|\sin x|$ و $g(x) = \cos(x+\frac{\pi}{۶})$ در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۷- اگر $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{۱}{۳}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $\cot\beta = -۲\cot\alpha$ ۲) $\tan\beta = -۲\tan\alpha$

۳) $\tan\beta = ۲\tan\alpha$ ۴) $\cot\beta = ۲\cot\alpha$

۸- حاصل $\tan^۲ ۱۵^\circ - \cot^۲ ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) $-۴\sqrt{۳}$ ۳) $-۸\sqrt{۳}$ ۴) -۸

۹- اگر $\sin x - \cos x = \frac{۵}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin^۳ x + \cos^۳ x}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۴۱}{۴۵}$ ۴) $-\frac{۴۱}{۴۰}$

۱۰- اگر $\frac{۱}{\cos(x-y)}$ ، $\frac{۱}{\cos x}$ و $\frac{۱}{\cos(x+y)}$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، حاصل $\cos^۲ x(۱+\tan^۲ \frac{y}{۲})$ کدام است؟

$(y \neq ۲k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

آزمون حسابان۱ قلمچی ۱۴ آذر ۱۴۰۴

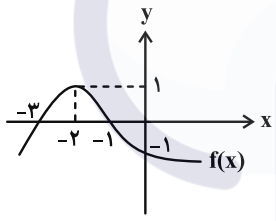
۱- اگر $f(x)=-(x-1)^2+2$ باشد، حاصل $\frac{\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]}{[\lim\limits_{x\to 1} f(x)]}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح می‌باشد.)

۱) ۰/۵ ۲) -۰/۵ ۳) -۲ ۴) ۲

۲- اگر $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(\cos x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۳- شکل زیر، مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است. مجموع حد چپ و راست تابع $g(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{xf(x)}$ در نقطهٔ $x=-1$ کدام است؟



۱) -۲

۲) ۲

۳) -۳

۴) ۳

۴- توابع f و g در $x=2$ دارای حد هستند به‌طوری که $\lim\limits_{x\to 2}(2f-3g)(x)=11$ و $\lim\limits_{x\to 2}(3f+2g)(x)=10$، مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)+4x-2f(x)-8}{xg(x)-x-2g(x)+2}$$

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos 2x}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶- برای تابع $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-1}+a}{\sqrt{x^2-1}}$، رابطهٔ حدی $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=b$ برقرار است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

۷- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x+1)(x+2)+m}{\sin(4-2x)}=n$ باشد، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -11 ۳) ۳۷ ۴) -37

۸- اگر حد راست تابع $f(x)=\frac{bx[\frac{1}{x}]+a[x]}{|x^2-1|}$ در نقطه‌ای به طول (-1) برابر $\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) -1 ۳) $-1/5$ ۴) -2

۹- تابع $f(x)=\begin{cases}([x]+7)[x] & , \ -4<x<-1\\ \frac{1}{x^2+x-7} & , \ x\le -4\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{a(\sqrt{x^2+3}-2)}{bx-c} & , \ x<1\\ \frac{x^2-b[x]}{x-1} & , \ x>1\end{cases}$ در $x=1$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) -2 ۳) -3 ۴) ۴

۱- اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت (۲-) برابر $S_n = ۲an^۲ + (a+۲b)n + b + ۱$ باشد، آنگاه جملهٔ پنجم ایـن دنباله کدام است؟

۱) ۱۰/۵- ۲) ۱۱/۵- ۳) ۱۲/۵- ۴) ۱۳/۵-

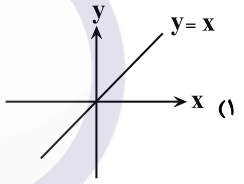
۲- اختلاف مقادیر قابل قبول x در معادلهٔ $\sqrt{x+۱} + \sqrt{۸-x} = ۴$ کدام است؟

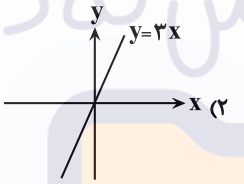
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

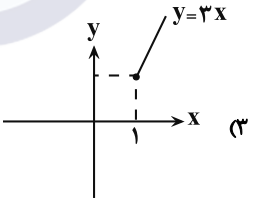
۳- اگر دو تابع $f(x) = \frac{x-۲}{x+۳}$ و $g(x) = \frac{ax^۲+bx+c}{x^۲+dx+e}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{d+e-c}{a+۲b}$ چقدر است؟

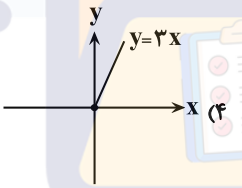
۱) ۳ ۲) ۷ ۳) $-\frac{۳}{۷}$ ۴) $-\frac{۱۱}{۷}$

۴- اگر $f(x) = x + \sqrt{x} + ۱$ باشد، نمودار تابع $y = ۲fof^{-۱}(x) + f^{-۱}of(x)$ کدام است؟

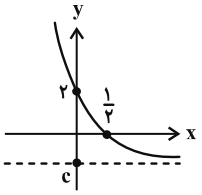
۱)


۲)


۳)


۴)


۵- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = -۲ + ۴^{ax-b}$ را نشان می‌دهد. حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(-۳a)^{cx+b} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۵x^۲-۶x}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۶- اگر $x=\frac{۱}{۹}$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\log_{۳}^{x}-۳\log_{x}^{k}=۱$ باشد، ریشهٔ دیگر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۲۷ ۴) $\frac{۱}{۲۷}$

۷- مقدار عددی عبارت $\frac{-۲\sin ۵x+\cos ۴x}{۳\sin ۵x+۲\cos ۴x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۱۸}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۱}{۵}$

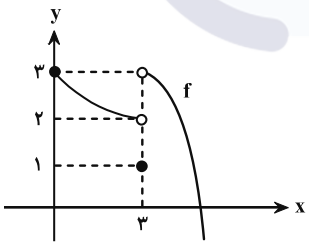
۳) -۵ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۸- حاصل عبارت $A=\frac{\cos ۲x}{\tan x+\cot x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۴۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۹- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} f([x])+[\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)]+\lim\limits_{x\to ۳^+}[f(x)]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)



۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

۱۰- اگر $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{x+a}{x^۲-x}-\frac{x+b}{x^۲+x})=b$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟ $(b\in\mathbb{Z})$

۱) ۴ ۲) صفر

۳) ۲- ۴) ۴-

آزمون حسابان۱ قلمچی ۲۸ آذر ۱۴۰۴

۱- اعداد طبیعی مضرب ۷ را در دسته‌هایی به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم. مجموع اعداد دستهٔ دهم چقدر است؟

$\{7\}\ ,\ \{14,21\}\ ,\ \{28,35,42\}\ ,\ \ldots$

۱) ۷۲۴۵ ۲) ۳۰۳۵ ۳) ۳۵۳۵ ۴) ۷۰۴۵

۲- اگر a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی ۱۰۰ جمله‌ای باشد و مجموع جملات با شمارهٔ فرد ۱۰۰ واحد از مجموع جملات با شمارهٔ زوج بیشتر باشد، حاصل $\frac{a_{50}^2 - a_{20}^2}{a_{35}}$ کدام است؟ $(a_{35} \neq 0)$

۱) -۱۲۰ ۲) -۷۰ ۳) -۶۰ ۴) -۳۰

۳- دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n = k(2)^{(k-2)n^2-n}$ را در نظر بگیرید. مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله برابر با $\frac{1023}{512}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x = 6 - 3x^2$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن $\frac{2}{(3\alpha+2)^2}$ و $\frac{2}{(3\beta+2)^2}$ باشند، به کدام صورت است؟

۱) $81x^2 - 20x + 1 = 0$ ۲) $9x^2 - 20x + 81 = 0$ ۳) $81x^2 - 20x - 1 = 0$ ۴) $9x^2 + 20x + 81 = 0$

۵- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = (x^2-3)^2 + (x^2-3) - k$ باشد، مجموع سایر صفرهای تابع f کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۲

۶- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x - \frac{1}{x} - \frac{10x}{x^2-1} = 3$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۳

۷- معادلهٔ $x\sqrt{x-2} - x = 0$ چند ریشهٔ حقیقی در دامنهٔ تعریف خود دارد؟

۱) فقط یک ریشهٔ مثبت ۲) فقط یک ریشهٔ منفی ۳) دو ریشه ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۸- نقاط $A(\sqrt{x}, \sqrt{2})$، $B(x,0)$ و $O(0,0)$ مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط OA، چهار واحد کوتاه‌تر از پاره‌خط OB باشد، طول پاره‌خط OA کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۹

۹- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار توابع $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = 2 - |x|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰- یکی از قطرهای مربع $ABCD$ بر خطی موازی محور طول‌ها واقع است که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع می‌کند و طول از مبدأ خط گذرنده از قطر دیگر، برابر ۱ می‌باشد. حاصل $\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{y_A + y_B + y_C + y_D}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱- دو تابع $f=\{(a,b)\}$ و $g(x)=\sqrt{(m-5)x^2-(m+1)x-2}$ با هم برابر هستند، مجموع مقادیر ممکن برای a چقدر است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) -1 ۳) 2 ۴) $-\frac{4}{3}$

۲- توابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , x\leq 0\\ 2x+3 & , x>0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2x & , |x|\leq 1\\ x & , |x|>1\end{cases}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- اگر $[-x+\frac{1}{2}]=-2$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای عبارت $[x^2]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۴- اگر $f(x)=\sqrt{x+2}-1$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=\frac{1}{\sqrt{xf(x)}}$ کدام است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-[-1,0]$ ۴) $[-2,-1)\cup(0,+\infty)$

۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}5-x & ; x\leq 1\\ ax^2+2x+1 & ; x>1\end{cases}$ یک به یک باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,-\frac{1}{3})$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $[-\frac{1}{3},0)$

۶- نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x+2}{3x-1}$، خط $y=2x+2$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) $-0/5$

۷- نمودار تابع $f(x)=ax^3+x-1+a$ تنها در نقطهٔ A، وارون خود را قطع می‌کند. اگر فاصلهٔ A از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۲

۸- اگر $f(x)=2x-\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\{(-3,1),(-1,4),(0,2),(1,-1),(2,3)\}$، آن‌گاه کوچک‌ترین عضو برد تابع $g-f$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -6

۹- روابط $(fog)(x)=3-2x$ و $(f+g)(x)=1-x$ برای تابع خطی f با شیب منفی برقرار است. مقدار $f(\frac{1}{3})$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰- اگر $f(x)=x-4\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$ درنظر بگیریم، برد تابع $gof(x)$ به صورت $\mathbb{R}-(a,b]$ خواهد بود، حاصل $b-4a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون حسابان ۱ قلمچی۲۴بهمن ۱۴۰۴

۱- اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه لگاریتم $۸a^{۳}-۸$ در پایهٔ ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۴

۲- با فرض $\begin{cases}۷^{x+۱}=۱۴\\ ۲^{y+۳}=۱۴\end{cases}$، حاصل $\frac{۴y+۱۳}{y+۳}-\frac{x}{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۴

۳- اگر $\log_{۴۰}^{۸}=m$، آنگاه حاصل عبارت $\log_{۵}^{۸}+\log_{۴}^{۲۰}$ برحسب m کدام است؟

۱) $\frac{۲m^{۲}+۴m-۳}{m^{۲}-m}$ ۲) $\frac{۲m^{۲}+۴m-۳}{m-m^{۲}}$ ۳) $\frac{۲m^{۲}-۴m+۳}{m^{۲}-m}$ ۴) $\frac{۲m^{۲}-۴m+۳}{m-m^{۲}}$

۴- اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴^{\log_{۹}^{x}}-۶(x^{\log_{۹}^{۲}})+۸=۰$ برابر ۳^{a} باشد، مقدار [a] کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵- نمودار وارون تابع $f(x)=\log(\frac{x+۵a}{۲a^{۲}+۲})$ فقط از نواحی اول و سوم دستگاه مختصات عبور می‌کند. مجموع مقادیر $\frac{a}{a-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۶- دو تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۴^{x}-۲^{x+۱}-۳}{۲^{x}-۳} & ; x\neq a\\ b & ; x=a\end{cases}$ و $g(x)=۲^{x}+۱$ برابرند. حاصل عبارت $۹^{\frac{۱}{a}}-[\log_{b}^{۲}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۷- اگر $f(x)=۳^{x}$، آنگاه دامنهٔ $y=\sqrt{۳x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

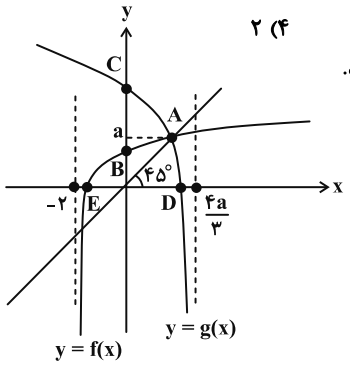
۸- اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(۰/۲)^{|x-۱|}=۵^{-x^{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۹- برد تابع $f(x)=\log_{۲}^{(x-۲)}-\log_{\frac{۱}{۲}}^{(۶-x)}$ به صورت $(-\infty,k]$ می‌باشد، مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۰- نمودارهای توابع $y=f(x)$ و $g(x)=\log_{a}^{(-۶x+c)}$ در شکل مقابل رسم شده‌اند.



اگر $f^{-۱}(x)=\frac{a^{۲x}-b}{۴}$ باشد، نسبت مساحت مثلث ADE به ABC کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۳
۳) ۱/۷
۴) ۱/۸

۱- اگر دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{(3-m)x^2+2mx-(m+2)}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\in[-6,-3]$ ۲) $m\in(-\infty,3)$ ۳) $m\in(-\infty,-6]$ ۴) $m\in(6,+\infty)$

۲- در مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{3x+1}{x-2}<-4<2$ چند عدد صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۳- جدول تعیین علامت $P(x)=(2a-6)x^2+(3a-12)x+b$ به صورت مقابل است. مقدار $2b-3a$ چه عددی است؟

x		-3	
$P(x)$	$+$	0	$-$

۱) ۹

۲) -18

۳) -9

۴) -27

۴- اگر معادله $\frac{2x-1}{x}=\frac{x-8}{x^2+2x}-\frac{k}{x+2}$ فقط یک ریشه داشته باشد، چند مقدار مختلف برای k به دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- در یک مستطیل به عرض $\sqrt{5}$، طول ۳ برابر عرض است. مقدار k را به عرض مستطیل اضافه کرده و k واحد از طول آن کم می‌کنیم. مستطیل به مستطیل طلایی تبدیل می‌شود. حداقل مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+3}$ ۲) $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{5+\sqrt{3}}$

۶- دو فرد A و B با هم کاری را در طی ۱۵ روز تمام می‌کنند. پس از ۶ روز کار مشترک، A را حذف می‌کنیم و B به تنهایی در ۱۵ روز تمام کار را به پایان می‌رساند. اگر بعد از ۶ روز کار مشترک، B را حذف می‌کردیم، A به تنهایی مابقی کار را چند روزه تمام می‌کرد؟

۱) ۳۲/۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۷/۵

۷- ۴۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۲۵ درصد را با ۸۰ کیلوگرم نمک خالص در یک ظرف می‌ریزیم. چقدر به آب آن اضافه کنیم تا غلظت محلول نهایی ۱۰ درصد شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۱۳۲۰ ۴) ۱۵۶۰

۸- معادله $x^{۲} = ۱ + \sqrt{۱+x}$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

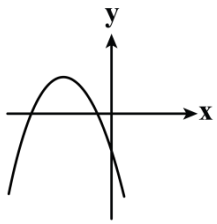
۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی a چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۱۰- اگر معادلهٔ $\sqrt{ax + \sqrt{۲-x}} = \sqrt{x-۲} + \sqrt{۴x+۱}$ دارای جواب باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۴/۵

۱- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه همواره مثبت است؟



۱) $ab+c$

۲) $ac-b$

۳) $a(bc-1)$

۴) $abc+1$

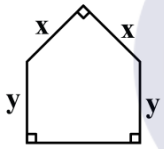
۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، حاصل $A=\frac{\alpha}{\beta(2-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(2-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- α و 3β جواب‌های معادلهٔ $x^2-ax-b=0$، ۳ و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax-18=0$ می‌باشند. مقدار $\frac{b}{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۴- پنجره‌ای مطابق شکل با بیشترین نوردهی می‌خواهیم بسازیم. اگر محیط پنجره ۱۶ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

۲) $\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

۳) $\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$

۴) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

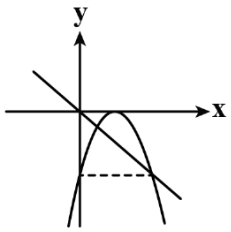
۵- اگر α و β صفرهای سهمی $f(x)=-2x^2+3x+2$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^4-\beta^2}{21\alpha}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۶- هرگاه a و α ریشه‌های $x^2+2x+6m=0$ و b و α ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x+3m=0$ باشند و $m\neq 0$ باشد، مقدار a^2+b^2 چه عددی است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۸ ۴) ۵۲

۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ و خط $y=-6x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{b}{ac}$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۸- اگر α و β جواب‌های $x^2-16x+4=0$ باشند، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha^2+4}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2+4}{\alpha}}$ چه عددی است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

سنجش کلاد

۱- حاصل عبارت $A=\sqrt[6]{108}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[3]{3\sqrt{12}}\times\sqrt[12]{2}$ کدام است؟

۱) $12\sqrt[3]{4}$ ۲) $12\sqrt[4]{3}$ ۳) $6\sqrt[3]{4}$ ۴) $6\sqrt[4]{3}$

۲- در تجزیهٔ عبارت $(2x-3)(4x^2-12x+9)-27$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

۳- حاصل عبارت $A=\frac{27-2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-4\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴- اگر $x^2-9x+1=0$ باشد، حاصل $x^3+\frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۶۸۲ ۲) ۷۱۲ ۳) ۶۹۲ ۴) ۷۰۲

۵- حاصل عبارت $A=(\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}})(\sqrt{10-2\sqrt{14}})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) $2\sqrt{11}$ ۳) $4\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{11}$

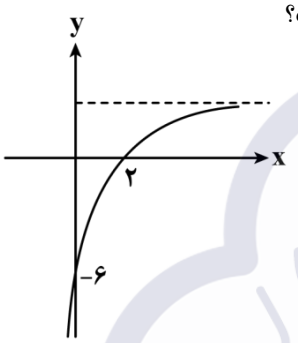
۱- با فرض $\log_5^3 \simeq ۰/۶۸$ و $\log_2^5 \simeq ۲/۴$، مقدار تقریبی $\log ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴۷}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

۲- اگر $(\log_2^{۴x}) \times (\log_۴^{\frac{x}{۴}}) = ۵$ باشد، مقدار $\log_2^{۴x}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- نمودار تابع $f(x) = ۲ - ۲^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-۲۲)$ کدام است؟



۱) $-\log_۳^۲$

۲) $-\log_۲^۳$

۳) $-۲\log_۲^۳$

۴) $-۲\log_۳^۲$

۴- معادلهٔ $\log_2^{(x^۲-۲x+۴)} + \log_2^{|x+۲|} = ۳$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵- نمودار تابع $f(x) = ۲^{x+k} - ۲^{x+۲} + ۲^k$ در شکل مقابل رسم شده است. حدود k کدام است؟

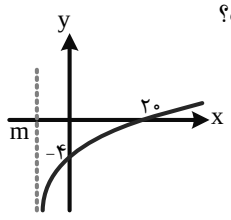
۱) $k < ۲$

۲) $k > ۲$

۳) $۱ < k < ۲$

۴) $۰ < k < ۲$

۶- نمودار تابع $f(x) = \log_a^{(۳x+b)} - c$ در شکل مقابل، رسم شده است. مقدار m کدام است؟



۱) $\frac{۲۰}{۱-a^۴}$ ۲) $\frac{۳۰}{۱-a}$

۳) $\frac{۶۰}{۱-a^۴}$ ۴) $\frac{۲۰}{۱-a}$

۷- جرم نوعی مادهٔ رادیواکتیو هر ۲۰ سال دو سوم برابر می‌شود. اگر ۳۰۰ گرم از این ماده موجود باشد، پس از حداقل چند سال جرم آن کمتر از ۱۰ گرم می‌شود؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۵ \ , \ \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵۱ ۲) ۷۶ ۳) ۳۰۱ ۴) ۱۷۶

۸- نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{(x+۱)}$ در دو نقطه نمودار تابع $g(x)=۲^{x}-۱$ را قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۹- کدام عدد بزرگ‌تر است؟

۱) $\log_{۲}^{۵}$ ۲) $\log_{۴}^{۲۴}$ ۳) $\log_{۸}^{۶۳}$ ۴) ۲

۱۰- اگر α جواب غیرصفر معادلهٔ $۳^{x^{۲}}=۲^{x^{۳}}$ باشد، مقدار $۳^{۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

۱۱- معادلهٔ $\log_{x}^{۸}+m\log_{۴}^{x}=۲$ جواب ندارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن m کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ ۲) $(\frac{۳}{۴},+\infty)$ ۳) $(\frac{۴}{۳},+\infty)$ ۴) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$

۱۲- اگر $\log_{۶}^{۴}=a$، مقدار $\log_{۸}^{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+۲}{۳a}$ ۲) $\frac{a+۱}{۲a}$ ۳) $\frac{a+۳}{۳a}$ ۴) $\frac{a+۲}{۲a}$

۱۳- حاصل عبارت $A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}\log_{۲}^{۶}}$ کدام است؟

۱) $\log_{۶}^{۱۵}$ ۲) $\log_{۲}^{۱۵}$ ۳) $\log_{۳}^{۵}$ ۴) $\log_{۵}^{۳}$

۱- اگر $n(A\cup B)=۳۳$ باشد و $n(A-B)$ و $n(A\cap B)$ و $n(B-A)$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ باشند، مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۲- ۴۰ نفر وارد یک باشگاه ورزشی شده‌اند که دارای ۲ دستگاه A و B است. اگر تعداد افرادی که از هیچ دستگاهی استفاده نکرده‌اند، ۱۰ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه A استفاده نکرده‌اند و ۱۸ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه B استفاده نکرده‌اند، باشد، حداکثر چند نفر از هر دو دستگاه استفاده کرده‌اند؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳- ۵۳۱ سکه را بین ۹ نفر طوری تقسیم کرده‌ایم که تعداد سهم‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر افراد به ترتیب تعداد سهم در یک صف قرار گیرند، نفر نهم ۱۱۱ سکه دارد. نفر هفتم چند سکه دارد؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۶ ۳) ۸۷ ۴) ۸۸

۴- a_n یک الگوی خطی و b_n یک دنبالهٔ حسابی است. اگر $b_۱$ یک واحد بیشتر از $a_۱$ و $b_۴$ دو واحد کمتر از $a_۴$ باشد، $b_۲-a_۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵- دنبالهٔ $a_n:a,b,c$ یک دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ $b_n:b-a,b,a+b$ یک دنبالهٔ هندسی است. مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر ۶ است. حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

۶- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم مربع جملهٔ دوم بوده و جملهٔ هفتم ۶ واحد بیشتر از جملهٔ سوم است. جملهٔ نهم چند واحد بیشتر از جملهٔ پنجم است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt[۴]{۳}$ ۴) $۶\sqrt[۴]{۲۷}$

۷- جملات اول، ششم و چهار برابر جملهٔ نهم در یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. جملهٔ دوم دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۸- اگر A و B دو مجموعه و $n(A\cap B')=n(B)=۴n(A\cap B)$ و $n(A\cup B)=۲۴$ باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ $B-A$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹- در دنبالهٔ حسابی a_n با فرض $a_۱+a_۲+a_۳=۱۸$ و $a_۲a_۳=۴۸$، واسطهٔ هندسی جملات اول و هفتم این دنباله کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱- هرگاه در داده‌های ۴,۳,۶,۲,۵,۴,۶,۷,۴,۹,۸ اعداد بزرگ‌تر از چارک سوم و اعداد کوچک‌تر از چارک اول را حذف کنیم، میانگین اعداد مانده چه عددی است؟

۱) $\frac{۳۴}{۷}$ ۲) ۵/۵ ۳) ۵/۲۵ ۴) $\frac{۳۶}{۷}$

۲- میانگین اعداد $a,a+۲,a+۴,a+۶$ با واریانس آن‌ها برابر می‌باشد. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳- کدام دسته از متغیرها به ترتیب، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی است؟

۱) شاخص تودهٔ بدن، گروه خونی، جنسیت

۲) تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، گروه خونی، قد افراد

۳) تعداد شهرهای یک استان، نژاد افراد، سطح تحصیلات

۴) وزن افراد، مراحل رشد یک انسان، میزان بارندگی

۴- واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی فرد چند برابر واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی زوج است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۷۲

۵- اگر از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸,...,۹۶,۹۸\}$ سه عدد زوج متوالی انتخاب کنیم، کم‌ترین مقدار ضریب تغییرات چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۸۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

۶- در چهار داده آماری، میانگین برابر ۳ و واریانس برابر ۲/۵ است. اگر ۶ داده برابر میانگین به آن‌ها اضافه کنیم، واریانس ۱۰ دادهٔ به دست آمده، چه عددی است؟

۱) $\frac{۶}{۱۰}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۶ وجود دارد به طوری‌که میانگین مربع آن‌ها ۵۲ می‌باشد. ضریب تغییرات این هشت عدد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱- در یک دنباله‌ی حسابی اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله باشد و $S_۶ - S_۵ = ۱۲$ و $S_۹ - S_۷ = ۶۰$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۶/۸ ۲) ۷/۲ ۳) ۷/۴ ۴) ۷/۸

۲ - در یک دنباله‌ی حسابی با ۱۳ جمله‌ی عمومی a_n، مجموع جملات شماره‌های زوج یعنی $a_۲, a_۴, ..., a_{۱۲}$ از مجموع جملات شماره‌های فرد یعنی $a_۱, a_۳, ..., a_{۱۳}$ به اندازه ۷ واحد کمتر است. اگر $a_{۱۱} = ۳a_q$ باشد، جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷ ۲) صفر ۳) ۷- ۴) ۱۴-

۳ - اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله‌ی $(۲m-۳)x^۲ - ۲mx + m - ۲ = ۰$ باشند و $\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} < ۱$، آن‌گاه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ - اگر نقطه‌ی رأس سهمی $f(x) = x^۲ - ۴x + m^۲ + ۳$ در ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $|m| > ۱$ ۲) $|m| < ۱$ ۳) $m < ۲$ ۴) $-۳ < m < ۲$

۵ - نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۹$ و خط‌های $y = ۷$ و $y = -۵$ در چهار نقطه‌ی A, B, C و D متقاطع‌اند. مساحت ذوزنقه‌ی $ABCD$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۶ - مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲ + x + ۱} = ۱ - x - x^۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۷ - دو فرد A و B در یک شرکت همکار هستند و در هر ۶ ساعت یک دستگاه کامل تولید می‌کنند. اگر سرعت کار فرد B، ۳برابر فرد A باشد، فرد B بعد از چند ساعت به تنهایی یک دستگاه را تولید می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

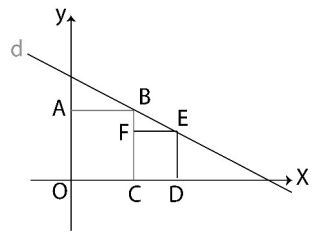
۸ - مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{|x-۲| + ۳|۲-x|}{|x-۲| + ۱۲} < ۱$ شامل چند صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹ - اگر رئوس مثلث ABC به صورت $A(۱,۹)$، $B(۳,۳)$ و $C(۷,۱۱)$ باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۱۰- مطابق شکل، دو مربع در ناحیهٔ اول مختصات قرار گرفته‌اند و رأس **B** و **E** روی خط **d** به معادلهٔ $x+2y-18=0$ قرار دارد. فاصلهٔ رأس **E** از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $2\sqrt{29}$

۲) $6\sqrt{3}$

۳) ۱۰

۴) ۱۲/۵

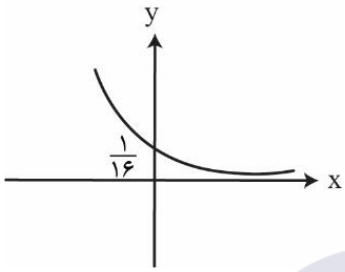
۱- اگر $f(x)=(\frac{m^۲-m-۶}{۳m^۲+۵m-۲})^x$ تابعی نمایی باشد، حدود m شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{۲}-۱)^{۲x^۲}>(۵\sqrt{۲}+۷)^{۳-۳x}$، بازهٔ (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۳- توابع $f(x)=(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b$ و $g(x)=(a+۱)^x$ مفروض است. اگر نمودار تابع نمایی $gof(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

۴- اگر $\log_{۱۸}۵۴=\frac{k+۲}{k+۱}$ باشد، حاصل $\log_۳۱۲$ کدام است؟

۱) $k+۱$ ۲) $۲k-۱$ ۳) k ۴) $۲k-۲$

۵- اگر $a=\frac{\log_۲۳+\log_۵۳}{\log_۲۳\times\log_۵۳}$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۱+\log_۵۶}+\frac{۱}{۱+\log_۲۱۵}$ بر حسب a کدام است؟

۱) $\frac{a+۱}{a}$ ۲) $\frac{a}{a+۱}$ ۳) $\frac{۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

۶- اگر $a=\log_۸۵$ و $b=\log_۴۳$ باشد، مقدار $\log_{۱۵}۹$ کدام است؟

۱) $\frac{۲b}{۲b+۳a}$ ۲) $\frac{۴a}{۲a+۳b}$ ۳) $\frac{۴b}{۲b+۳a}$ ۴) $\frac{۲a}{۲a+۳b}$

۷- اگر $\log_x(۳x)\times\log_۳x^۳=۹$ باشد، حاصل $\log_{(x-۳)}۴x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

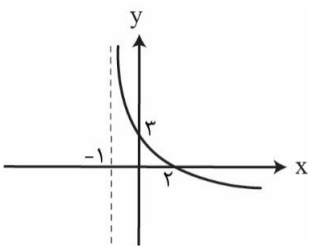
۸- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_۲(x-۱)\times\log_۲(۶-x)>۰$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\log_x|1-x^2|$ به صورت $(a,b)\cup(c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{a^3}{bc}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۹

۴) ۳

ریاضی ۲۹ آبان ۱۴۰۴ ماراتون

۱- کدام‌یک از نقاط زیر، می‌تواند روی یک دایره‌ی مثلثاتی باشد؟

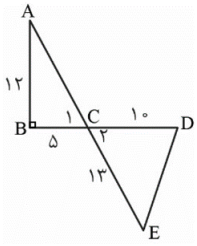
۱) $(\tan ۴۸^\circ, \sin x)$ ۲) $(-\frac{۳}{۴}, \frac{\sqrt{۶}}{۴})$ ۳) $(\cos x, \cot ۲۰^\circ)$ ۴) $(۱-\sin\frac{\pi}{۲}, \sin x)$

۲- اگر $\cos x \tan x < ۰$ و $\sin x \cot x > ۰$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin(x-\frac{\pi}{۳}).\cos(x+\frac{\pi}{۲}) < ۰$ ۲) $\tan(\frac{x}{۲})\sin(۲x) > ۰$

۳) $\cot(x).\cot(\frac{x}{۳}) < ۰$ ۴) هیچ‌کدام

۳- با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث DEC کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۶۰

۳) ۵۰

۴) ۱۲۰

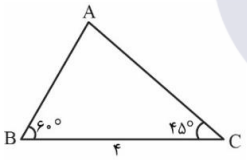
۴- اگر $\frac{\pi}{۱۲} < x < \frac{\pi}{۳}$ و $m = ۱+۴\sin ۲x$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

۱) $[-۳, ۳)$ ۲) $(۱-۲\sqrt{۳}, ۳)$ ۳) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۱)$

۵- اگر $k = \frac{\tan x}{\frac{۱}{\cos x}-۱}$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{\cos x}+۱)\cot x$ بر حسب k کدام است؟

۱) $k-۱$ ۲) $\frac{۱}{k}$ ۳) k ۴) $k+۱$

۶- در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۸(\sqrt{۳}-۱)$ ۲) $۸(۳-\sqrt{۳})$

۳) $۴(۳-\sqrt{۳})$ ۴) $۴(\sqrt{۳}-۱)$

۷- اگر $\tan^۲ x = ۵\sin^۲ x + ۱$ باشد، حاصل $\sin^۴ x + \cos^۴ x$ کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۸- حاصل عبارت $\frac{\sin\frac{\pi}{۸}+\cos\frac{\pi}{۸}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ ۴) $-(۲+\sqrt{۲})$

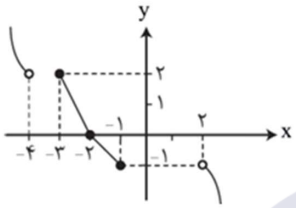
۹- اگر $\log_{۲\sqrt{۲}}(\sin ۱۵^\circ) = ۳m - ۱۲$ باشد، مقدار $\log_m(۳^m - ۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) -۲

۱۰- اگر $\frac{۱-\cos ۲x}{\sin x} + \frac{۱+\cos ۲x}{\cos x} = ۱$ باشد، حاصل $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱- نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر رسم شده است؛ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[f(2x-1)]+[f(2-x)]}{[f(x^2-1)]}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۵}{۲}$

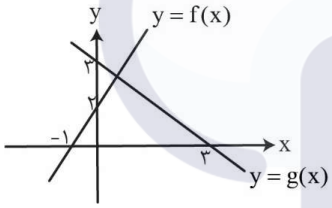
۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۴^+}\frac{۱-۲x}{[\sin\frac{\pi}{۲}x]+۱}$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷ ۳) $-\infty$ ۴) وجود ندارد.

۳- اگر f یک تابع خطی باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^{-1}(۲x)}{x+\sqrt{۲x+۳}}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۳

۴- نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)(x-۳)}{(x+۲)g(x)}$ کدام است؟



۱) $-۱/۶$

۲) $-۱/۴$

۳) $-۱/۲$

۴) -۱

۵- اگر $f(x)=\frac{[۳x^2]+\sqrt{۲+a|x|}}{۵x^2-b|-x^2+۱|}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}[\frac{۱}{x-۲}]f(x)=\frac{-۸}{۵}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

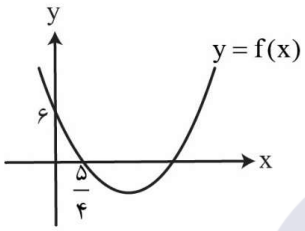
۶- حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}\frac{x}{۳}}{۲\log_{۳}\sqrt{x}-\log_{x}۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۷- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+x^۲-۴}{\sqrt[۳]{x^۲-۴}+x^۳-۸}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

۸- نمودار تابع درجهٔ دوم f به صورت مقابل است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(۲x)-f(x)}{x^۲-۱}=۳$ باشد، مقدار f(۲) کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۳) $\frac{۱۵}{۴۱}$

۴) $\frac{۱۹}{۷۰}$

۹- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۴ & x\geq a\\ ۲x-۵ & x<a\end{cases}$، تابعی همواره پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲-b & |[x]|\leq ۲\\ ۳x+۴ & |[x]|>۲\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل a − b کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۱- اگر مجموعه‌ی $A=[m+1,m^2]\cap[9,15-m]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، مجموع اعداد صحیح مجموعه‌ی $B=(-m^2,3m)$ کدام است؟ $(m\in\mathbb{N})$

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۳ ۴) ۸۱

۲- در یک نظرسنجی ۹۰ نفره، در مورد علاقه‌مندی به نوشیدنی چای و قهوه، ۴۶ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط چای و ۱۲ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط قهوه هستند. اگر تعداد علاقه‌مندان به چای ۳ برابر علاقه‌مندان به قهوه باشند، آن‌گاه چند نفر به هیچ‌کدام علاقه‌مند نیستند؟

۱) ۱۷ ۲) ۳ ۳) ۲۷ ۴) ۲۲

۳- اگر $n(A-B)=5-x$ و $n(B-A)=2x-7$ و $n(A\cap B)=x-2$ و $n(A)=n(B)$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۴- اگر جملات سوم و هفتم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر با $2x$ و $3x+2$ و $8x-2$ باشد، جمله‌ی a_{2x} کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

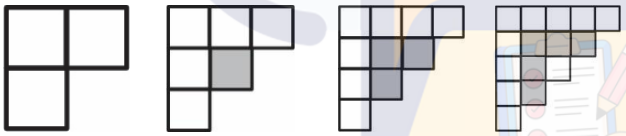
۵- بین دو عدد ۱۵ و ۶۹، هشت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم به گونه‌ای که ۱۰ جمله تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله چند برابر مجموع چهار جمله‌ی دوم دنباله است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

۶- به ازای چند عدد صحیح و بزرگ‌تر از منفی یازده m، اشتراک دو بازه‌ی $A=[\frac{m}{2},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{m^2+3m+2}{m+11})$ هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۵

۷- با توجه به الگوی داده شده نسبت مربع‌های سفید به رنگی در شکل بیستم کدام است؟



۱) $\frac{194}{39}$
۲) $\frac{194}{37}$
۳) $\frac{193}{37}$
۴) $\frac{193}{39}$

۸- در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی a_n و قدرنسبت r، اگر $a_1=3+r$ و $a_8=a_6+72a_4$ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۹- اعضای مجموعه‌ی $\{2,4,a\}$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف برای a کدام است؟

۱) ۸ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) ۱۶

۱۰- جملات اول و سوم و چهارم یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت با جملات مثبت تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی به جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

۱- به ازای چند مقدار صحیح x، رابطه‌ی $\sqrt{6} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[6]{300}$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- اگر $x^3-3x^2+3x+7=(x+1)(ax^2+bx+c)$ باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $-\frac{4}{7}$ ۴) $-\frac{7}{4}$

۳- اگر $x>0$; $f(x)=x+\frac{1}{x}$ و $f(a^2)=23$ باشد، مقدار $f(a^3)$ کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

۴- اگر $\sqrt{a}=\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{b}=\sqrt{2}-1$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۵- اگر $\sqrt[4]{2\sqrt[6]{x+1}}=\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{x+1}$ کدام است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۵۶

۶- حاصل عبارت $(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}})(\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۷- اگر $\sqrt{x-\sqrt{2}}+\sqrt{x+\sqrt{2}}=4$ باشد، حاصل $\sqrt{x+\sqrt{2}}-\sqrt{x-\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۸- حاصل $\frac{\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۹- دو عدد حقیقی a و b را در نظر بگیرید. اگر $a<b<0$ باشد و $x=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}$ و $y=4a+4b+\sqrt{64ab}$ باشد، حاصل $\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) ab ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

۱۰- اگر $x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}}$ و $y=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$ باشد، مقدار x^6+y کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ریاضی ۲۴ بهمن ۱۴۰۳ ماراتون

۱- با حروف کلمه‌ی (دانشجو) و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که دو حرف (ج، و) کنار ه باشند و به حرف (ش) ختم نشود؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

۲- با ارقام $۰,۱,۲,۳,۴,۵$ چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۳- با حروف کلمه‌ی «قفسه کتاب» و بدون تکرار حروف، نسبت تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف «ق» و «ف» کنار هم باشند به تعداد کلمات ۶ حرفی که به «کتاب» ختم می‌شوند، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۵\times۷!$ ۲) $۴\times۷!$ ۳) $۷\times۵!$ ۴) $۷\times۴!$

۴- به $(m\times n!)$ طریق می‌توان ۷ کتاب متمایز را به ۴ نفر هدیه داد به طوری که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت می‌کند،اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ کدام است؟ $(m,n\in N)$

۱) ۷۵ ۲) ۴۱۲۷ ۳) ۲۷۹ ۴) ۸۳۲۶

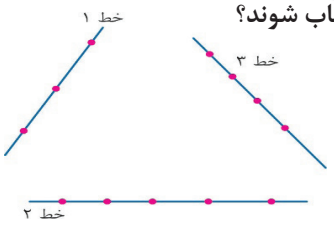
۵- با حروف کلمه‌ی «دفترچه آموزش» چندکلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حروف نقطه‌دار و بدون نقطه به صورت یک‌در میان قرار داشته و شروع کلمه با حرف بدون نقطه باشد؟

۱) $۵!\times۶!$ ۲) $\frac{۱}{۴}\times۵!\times۶!$ ۳) $\frac{۱}{۲}\times۵!\times۶!$ ۴) $۵!\times۶!\times۲!$

۶- تاسی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که یک عدد یک بار، عدد دیگری دو بار و یک عدد دیگر سه بار تکرار شوند؟

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۷۲۰۰

۷- چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد، به طوری که رئوس آنها از نقاط روی خطوط زیر انتخاب شوند؟



۱) ۲۲۰
۲) ۲۰۵
۳) ۱۱۰
۴) ۵۵

۸- مجموعهٔ $A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ چند زیر مجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد که شامل ۴ و فاقد ۵ باشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

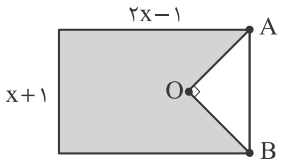
۹- با ارقام $۰,۱,۲,۴,۵,۷$ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام که مضرب ۵ نباشند، می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۱۰- علی و حسن و جواد و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت‌های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟

۱) حسن قبل از جواد باشد.
۲) حسن قبل از جواد و بعد از علی باشد.
۳) علی نفر سوم باشد.
۴) حسن نفر آخر نباشد.

۱ - در مستطیل شکل زیر، مثلث AOB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده برابر ۱۶ باشد، محیط مستطیل کدام است؟

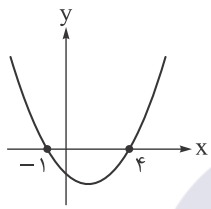


۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۳۰

۲ - اگر نقطهٔ $A(۲,k)$ رأس سهمی $f(x)=ax^۲-۲bx+a$ باشد، حاصل $\frac{f(۵)}{f(-۱)}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۱

۳ - نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{c-۳b}{a}$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۴ - اگر $(-۲,۳)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن سهمی $y=x^۲-ax-b$ پایین‌تر از خط $y=۲ax+۴b$ قرار می‌گیرد، حاصل ab کدام است؟

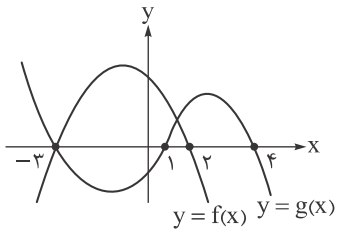
۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۵ - جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=(a+۴)x^۲+(a-b+۴)x-b$ به صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

x	$-\infty$	$a+۱$		-۱	$+\infty$
P(x)	+	۰	−	۰	+

۱) ۶ ۲) ۳
۳) -۳ ۴) -۶

۶ - اگر نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به صورت زیر باشند، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(x+۱)g(x)}{f(x)}\le ۰$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۴

۷ - اگر m و n جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $A = (۳m + \frac{۲}{n})(۳n + \frac{۲}{m})$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۸ - اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})x^۲ + (\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳} - ۱)x + \sqrt{۳} + ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۲} + ۱)$ ۲) $(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + ۱)$

۳) $(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۲} + ۱)$ ۴) $(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + ۱)$

۹ - حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی از مجموع آن‌ها ۱۷ واحد بیشتر است. اگر اختلاف این دو عدد ۳ واحد باشد، نسبت آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

۱۰ - نمودار تابع $f(x) = (x-۱)(x^۲ - ۲mx - m - ۱)$ محور xها را در ۳ نقطه قطع می‌کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها برابر ۹ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۱ - با فرض $a + b \neq ۰$ و $ab \neq ۰$، معادلهٔ $\frac{۱}{x+a+b} = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ دارای جواب‌های α و β است. حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ab ۲) ۱ ۳) $a^۲b^۲$ ۴) $ab(a+b)$

۱۲ - اگر $x = a$، جواب معادلهٔ $\frac{x-۲}{x+۳} = \frac{x+۱}{x+a}$ باشد، حاصل $a^۲ + \frac{۹}{a^۲}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۷ ۳) ۸۶ ۴) ۷۰

۱۳ - جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۲} + a = \sqrt{۸x + \sqrt{۴ - x^۲}}$ در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم برابر $\frac{۷}{۲}$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۰ ۳) ۴۶ ۴) ۵۶

۱ - از یک قطعهٔ مقوایی مربع‌شکل به طول ضلع ۱۶ می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز بسازیم. برای این منظور، از هر چهار گوشهٔ این مقوا چهار مربع به طول ضلع x می‌بریم و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام‌یک از توابع زیر حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟

۱) $V(x)=2x(16-x)^2$
۲) $V(x)=x(16-x)^2$
۳) $V(x)=x(16-x^2)^2$
۴) $V(x)=x(16-2x)^2$

۲ - در تابع خطی f، اگر $f(2)=3$ و $f(-2)=-5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x)=\frac{3f(x)-7}{f(x)-3}$ با دامنهٔ $D_g=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۳ - اگر دامنه و برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=b\sqrt{(a-2)x+a^2-2a-2}+b^2-b$ به ترتیب بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[2,+\infty)$ باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(4,-1)$
۲) $(4,2)$
۳) $(1,-1)$
۴) $(1,2)$

۴ - به ازای xهای مثبت، اگر $f(x-\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد، $f(\sqrt{2})$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۵ - در مجموعهٔ اعداد حقیقی، تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(2)=3g(1)$ باشد، مقدار $\frac{(fog)(x-[x])}{(f-g)(2)}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) -3
۲) ۳
۳) -2
۴) ۲

۶ - تعداد اعداد صحیح دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{2[x]-1}}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷ - نمودار وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3+3x+a$ خط $2x-y-1=a$ را روی محور x قطع می‌کند. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) -5
۳) -4
۴) ۴

۸ - اگر $f(x)=\begin{cases}2x+6 & ; \ x\le -1\\ x+2 & ; \ x>-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x-2 & ; \ f(x)<0\\ 2x-6 & ; \ f(x)\ge 0\end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -6 ۳) -1 ۴) -10

۹ - اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، به ازای $x\ge 1$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(gof)(x)=\sqrt{x^2-1}$

۲) $(fog)(x)=x-1$

۳) $(fof)(x)=x^4-2x^2$

۴) $(gog)(x)=\sqrt{x^4}$

۱۰ - کدام تابع روی بازهٔ $(\frac{3}{2},+\infty)$ وارون‌پذیر نیست؟

۱) $f(x)=x^2-2x+1$ ۲) $g(x)=5x-x^2$

۳) $h(x)=\frac{x-2}{|x-1|}$ ۴) $k(x)=x^3-3x+1$

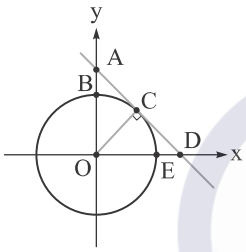
۱- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$، حاصل $\sin^۵ x + \cos^۵ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۱۳}{۹\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{۱۱}{۹\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

۲- اگر $\frac{\sin x}{۱+\cos x} = -۲$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x}$ کدام است؟

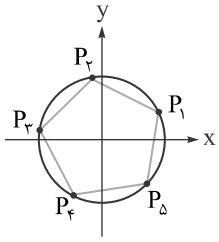
۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

۳- در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر طول پاره‌خط AB برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول پاره‌خط DE کدام است؟



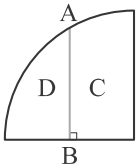
۱) $\frac{۳}{\sqrt{۷}} - ۱$
۲) $\frac{۴}{\sqrt{۷}} - ۱$
۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵}} - ۱$
۴) $\sqrt{۵} - ۱$

۴- در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر عرض نقطهٔ $P_۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ و چندضلعی $P_۱P_۲P_۳P_۴P_۵$ منتظم باشد، طول نقطهٔ $P_۴$ کدام است؟



۱) $-\sin ۲۴^\circ$
۲) $-\cos ۲۴^\circ$
۳) $-\sin ۲۶^\circ$
۴) $-\cos ۲۶^\circ$

۵- در شکل زیر پاره‌خط AB به طول $\sqrt{۳}$، عمودمنصف شعاع ربع دایره است. محیط ناحیهٔ C چه‌قدر از محیط ناحیهٔ D بیشتر است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}$
۲) $۲ - \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲ - \frac{\pi}{۶}$
۴) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

۶- با فرض $\tan ۵۰^\circ = \frac{۱۷}{۲۰}$، حاصل $\frac{۳\sin ۴۰۰^\circ + ۲\cos ۲۲۰^\circ}{۳\sin ۱۴۰^\circ - \cos ۵۰^\circ}$ کدام است؟

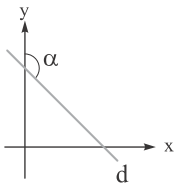
۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$

۲) $\frac{۱۳}{۲۰}$

۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$

۴) $\frac{۲۱}{۲۰}$

۷- در شکل مقابل، شیب خط d برابر $-\frac{۳}{۴}$ است. حاصل $\cot(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$

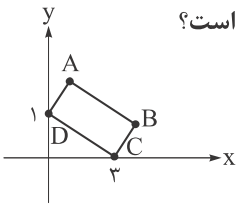
۴) $-\frac{۵}{۳}$

سنجش کلاد

۱ - از مبدأ مختصات، دو مماس بر سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ + ۱$ رسم می‌کنیم. مساحت مثلثی با رئوس $A(۰,-۱)$ و نقاط تماس کدام است؟

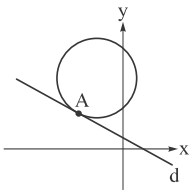
۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲ - در شکل زیر، مساحت مستطیل برابر ۵ است. مجموع طول نقطهٔ A و عرض نقطهٔ B کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

۳ - در شکل زیر، شعاع دایره برابر $\sqrt{۱۰}$ و مرکز آن روی خط $y = x + ۵$ قرار دارد. اگر خط d در نقطهٔ $A(-۲,۱)$ بر دایره مماس باشد، معادلهٔ خط d کدام است؟



۱) $۳y + x = ۲$ ۲) $۳y + x = ۱$
۳) $۴y + x = ۱$ ۴) $۴y + x = ۲$

۴ - مساحت ذوزنقه‌ای که محدود به خط‌های $x = -۱$، $y = ۲$ و $x^۲ + y^۲ = ۲xy + ۴$ است، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱- اگر a,b,c به ترتیب از چپ به راست سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت و $a,2b,3c$ نیز به ترتیب از چپ به راست سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چند برابر a است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۲- مجموع m جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر n و مجموع n جملهٔ اول آن برابر m است. اگر $m \neq n$ باشد، مجموع $m+n$ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) $m+n$ ۲) $-(m+n)$ ۳) $۲(m+n)$ ۴) $-۲(m+n)$

۳- دنبالهٔ هندسی a_n با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۳^{n-۱}}{۲}$ مفروض است. اگر مجموع جملات mاُم تا $(m+۳)$اُم برابر ۴۸۶۰ باشد، S_m کدام است؟ (S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله است.)

۱) ۲۰ ۲) ۱۸۲ ۳) $\frac{۱۲۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۰۹۳}{۲}$

گروه آموزشی ماز

دوپینگ

۱- نمودار یک تابع درجه دوم به شکل کلی $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های ۳ و -1 و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -6 قطع می‌کند، کمترین مقدار این تابع کدام است؟

۱) -9 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

۲- حاصل عبارت $A=\frac{1+x+x^2+x^3+...+x^9}{1-x+x^2-x^3+...-x^9}$ به ازای $x=2-\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $3-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{3}$

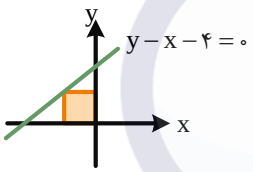
۳- در یک مستطیل طلایی به عرض ۲، به اندازهٔ $1+\sqrt{5}$ واحد به طول آن اضافه کنیم و یک مستطیل جدید می‌سازیم. نسبت مساحت مستطیل جدید به مستطیل طلایی اولیه چقدر است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) ۴

۴- اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+(k-1)x+3=0$ برابر $\frac{k-5}{2}$ است. حاصل $\left[\frac{-k+2}{3}\right]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۵- مساحت مربع شکل مقابل کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۶- کدام گزینه در مورد معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1$ صحیح است؟

۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است.
۲) فقط یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $(2,3)$ دارد.
۳) فقط یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $(3,4)$ دارد.
۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۷- اگر $x=6$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $(x+a)^2-4x=b$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر برابر $a+b$ و $a-b$ است؟

۱) $x^2+24x-80=0$
۲) $x^2-24x-80=0$
۳) $x^2-8x-384=0$
۴) $x^2+8x-384=0$

۸- معادله‌ای که هر یک از ریشه‌های آن از مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x-۲=۰$، یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۳۱x+۳۷=۰$ ۲) $x^۲-۳۱x+۳۴=۰$

۳) $x^۲-۲۳x+۲۶=۰$ ۴) $x^۲-۲۳x+۲۹=۰$

۹- حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ $|x-۱|+x^۲-۲x=۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰- اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲-۷x+۹b=۰$ و $a<b$ باشند، مقدار $b-a$ کدام است؟ $(b\neq ۰)$

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۱- نقاط $A(۱۳,-۷)$ و $B(-\frac{۹}{۲},-۷)$ روی تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ قرار دارند. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۲$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

۱۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲-x+۱۰}{x^۲+x+۳}>۴$ با مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۶x+a|<b$ برابر است. حاصل $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

۱۳- مساحت محدود به نمودار تابع $y=|x-۱|+|x-۴|$ و خط $y=x+۲$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۱۸ ۴) ۹

۱۴- به ازای چند مقدار صحیح منفی برای m هر دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $۳x^۲+mx+m=۰$ کوچک‌تر از ۱ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۱۵- مساحت مربع $ABCD$ که دو ضلع AB و CD از آن مربع به ترتیب روی خطوط $y=۳mx+۲m-۱$ و $y=(۴m-۱)x+۶$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۶- یک تاس را سه بار متوالیاً پرتاب می‌کنیم. در چند حالت عدد رو شده روی تاس‌ها در پرتاب‌ها، به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۷- با جایگشت حروف کلمه «دوپینگ ماز» چند کلمه نه حرفی می‌توان ساخت که بین دو حرف «د» و «ن» و همچنین بین دو حرف «م» و «ز» دقیقاً یک حرف قرار گرفته است؟

۱) $۲۵۶\times۶!$ ۲) $۶۴\times۸!$ ۳) $۶۴۰\times۴!$ ۴) $۲۵۶\times۵!$

۱۸- از ۴ استان کرمان، شیراز، یزد و اصفهان و از هر استان ۵ نفر برای درخواست نمایندگی ماز در شهر خود در جلسه‌ای حضور دارند. دکتر موسوی به چند حالت می‌تواند ۳ نفر از آن‌ها را انتخاب کند، به گونه‌ای که دوبه‌دو غیرهم‌استانی باشند؟ آزمون وی ای پی

۱) ۲۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

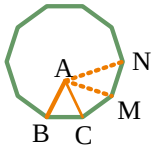
۱۹- در مثلث ABC، اگر $a=۷$ و $b=۴$ و $h_c=\frac{۲h_a+h_b}{۳}$، آن‌گاه اندازهٔ ضلع AB کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۵/۶ ۳) ۴/۴ ۴) ۸/۶

۲۰- در مثلث ABC از رأس A عمودی بر نیمساز B رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در M قطع کند، همچنین عمودی که از A بر نیمساز C رسم می‌شود، ضلع BC را در N قطع می‌کند. اگر $\hat{A}=۱۲۰^\circ$، آن‌گاه زاویه $M\hat{A}N$ کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۳۰° ۳) ۲۰° ۴) ۴۰°

۲۱- در شکل مقابل، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و ده ضلعی منتظم در یک ضلع مشترک‌اند. زاویهٔ $A\hat{M}N$ کدام است؟

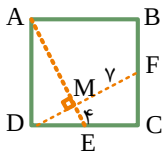


۱) ۶۴°
۲) ۱۲۸°
۳) ۹۶°
۴) ۱۰۸°

۲۲- مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۶ و ۱۰ که عمودمنصف ساق آن از رأس مقابل می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۳- مساحت مربع شکل مقابل چقدر است؟



۱) ۱۱۷
۲) ۱۰۸
۳) ۸۱
۴) ۱۰۰

۲۴- معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=30$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد بزرگ‌تر از ۳، چند جواب دارد؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۲۵- با جایگشت حروف کلمه «تو بی‌نظیری» چند کلمه می‌توان نوشت که عبارت «تو» در آن دیده شود؟

۱) $۷\times۸!$ ۲) $۴۲\times۶!$ ۳) $۱۶\times۷!$ ۴) $۵۶\times۵!$

۲۶- اگر

	x	۴	
		y	
	۳	۲	z
۱			

و

	t		
		۲	
			۳
۱			

مربع‌های لاتین متعامد باشند، حاصل $2x+3y+z+t$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۷

۲۷- ۴ جایزه مختلف **d,c,b,a** را به چند حالت بین مهرسا، ملیکا، نیکی، هلیا، فرنوش، جانان و آوا می‌توان تقسیم کرد به طوری که کسی بیشتر از یک جایزه نبرد و جایزه **a** به مهرسا نرسد و جایزه **d** به فرنوش نرسد؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۵۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۲۰

۲۸- چند عدد طبیعی زوج کوچک‌تر از ۳۰۱ بر ۳ بخش‌پذیر است ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیست؟ آزمون وی ای پی

۱) ۳۲ ۲) ۴۳ ۳) ۵۰ ۴) ۶۳

۲۹- از ظرفی شامل ۶ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، حداقل چند مهره خارج شود تا مطمئن باشیم در بین مهره‌های خارج شده ۲ مهره سیاه یا سه مهره ناهمرنگ داریم؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۳۰- در یک زیرمجموعهٔ دلخواه با **n** عضو از مجموعهٔ $A=\{۵,۶,۷,۸,...,۲۱\}$ مطمئن هستیم که دو عضو با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک وجود دارد، حداقل **n** کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱- اگر $f(x)=(2a-1)x+a-b$ تابعی ثابت و تابع $g(x)=(b-3)x+2c+a$ همانی باشد، تابع خطی $y=(2f-g)(x)$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲- اگر $D_f=[-4,a]$ و $g(x)=8-3x$ به طوری که $D_{fog}=[-2,b]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳- هرگاه تابع $f(x)=(2-a)x^2-4ax+1$ در بازه $(-2,2)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-2<a<0$ ۲) $a\geq 1$ ۳) $0<a<2$ ۴) $0<a<1$

۴- وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+4}$ خط $y=4-2x$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵- اگر $f(x)=\frac{x}{kx-4}$ به طوری که $fof(1)=1$، مقدار $fof(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{36}$ ۳) $-\frac{1}{31}$ ۴) $\frac{1}{41}$

۶- هرگاه $f(2x+3)=3x+4$ و $g^{-1}(4x-6)=5x+9$، مقدار $gof^{-1}(-2)$ چه عددی است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -2 ۴) -14

۷- اگر $f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2})$ و f و g توابعی وارون‌پذیر باشند، حاصل $f^{-1}(-2)+4g^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸- نقطهٔ $A(a,4)$ روی نمودار $y=2+f(\frac{1-x}{3})$ با نقطهٔ $A'(-2,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x)$ متناظر است. شیب خط گذرنده از A و A' کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{2}{9}$ ۳) $-\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{3}{10}$

۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{4x+k}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس طول نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار حاصل را k واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $f(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۰- تابع $f(x)=ax^۴+(a-۱)x^۳-x+۱$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً یکنواست. مجموعه جواب نامعادله $fof(x)<f(۲-x^۳)$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۱۱- نمودار تابع $f(x)=۲-\log_۲^{(ax+b)}$ نمودار وارون خود را در نقاطی به طول صفر و یک قطع کرده است. مقدار $a^۲+b^۲$ کدام است؟ $(a<۰)$

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

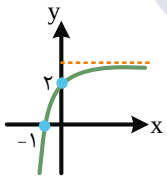
۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(\frac{۲۵}{۴})^{۲-x}=(۰/۴)^{x^۲-۶x}$ باشد، حاصل $\log_۲^{(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۳- اگر $x=۲^a$ یک جواب معادلهٔ $\log_۴^x+\log_۳^x=۱$ باشد، حاصل ۱۲^a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۴- نمودار تابع $f(x)=۳+a\times ۳^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۵- یک نوع عنصر در پایان هر سال، ۴ درصد از جرم خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت چند سال ۲۰ درصد از جرم آن باقی می‌ماند؟

$(\log ۲\simeq ۰/۳۰۱, \log ۳\simeq ۰/۴۸)$

۱) ۴۲ ۲) ۴۶/۶ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸/۶

۱۶- اگر خط d بر دو خط متمایز d' و d'' عمود باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) d' و d'' موازی هستند.

۲) اگر d' و d'' متقاطع و با خط D هم‌صفحه باشند، اما با d هم صفحه نباشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.

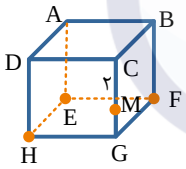
۳) اگر d' و D متقاطع باشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.

۴) d' و d'' متعامد هستند.

۱۷- یک مثلث قائم‌الزاویه را اگر حول یک ضلع قائمه‌اش دوران دهیم جسمی با حجم V و اگر حول وترش دوران دهیم جسمی با حجم $\frac{۱}{۲}V$ تشکیل می‌شود، در صورت دوران سطح این مثلث حول ضلع دیگر قائمه آن، جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}V$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}V$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}V$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}V$

۱۸- نقطه M روی یال CG از مکعب زیر به طول یال ۳ واقع شده است. از نقاط M و F و H صفحه‌ای می‌گذرانیم تا مکعب را برش دهد، مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟ $(MC=۲)$



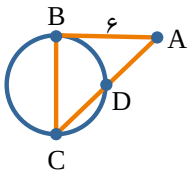
۱) $\sqrt{۱۱}$

۲) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۱}$

۳) $۲\sqrt{۱۱}$

۴) $\frac{۵}{۲}\sqrt{۱۱}$

۱۹- در شکل زیر، AB بر دایره مماس است. C نقطه‌ای روی دایره است به طوری که قاطع AC، دایره را در نقطه D قطع می‌کنند، اگر $BA=۶$ و $\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}$ آن‌گاه اندازه DC چقدر است؟



۱) ۴/۵

۲) ۵

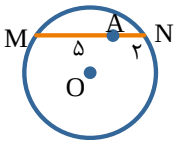
۳) ۵/۵

۴) ۶

۲۰- در دایره‌ای به شعاع واحد، دو وتر موازی دو طرف مرکز دایره با اندازه‌های ۱ و $\sqrt{۳}$ دو قاعده یک ذوزنقه را تشکیل می‌دهند. زاویه بین قطرهای این ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۶۰° ۲) ۴۵° ۳) ۷۵° ۴) ۹۰°

۲۱- A نقطه‌ای روی وتر MN از دایره است به طوری که $AN=۲$ و $AM=۵$، طول کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد، چقدر است؟

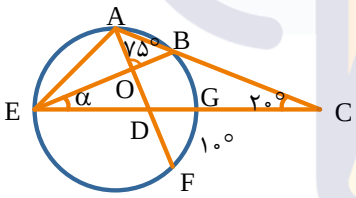


۱) $\sqrt{۱۰}$
۲) $۲\sqrt{۱۰}$
۳) $\sqrt{۲۰}$
۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$

۲۲- در دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۱۰}$، دو وتر AB و CD ویژگی جالبی دارند. فاصله مرکز دایره از وتر AB، ۳ برابر فاصله آن از وتر CD است، از طرفی اندازه وتر CD دقیقاً ۳ برابر اندازه وتر AB است. کدام عدد، اندازه یکی از وترهاست؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۳- در دایره مقابل، $\overset{\frown}{GF}=۱۰^\circ$ و $B\hat{C}G=۲۰^\circ$ و $A\hat{O}B=۷۵^\circ$، اندازهٔ زاویه $B\hat{E}C$ چقدر است؟



۱) ۵۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۴۰°

۲۴- اگر $A=\{\{\ \},\{\{\}\}\}$ و $P(A)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های A باشد، آن‌گاه $P(A)-A$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵- اگر $A\cap B\subseteq A\cup C$، آن‌گاه کدام گزینه را نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد؟

۱) $C\subseteq A$ ۲) $C\subseteq B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $A\subseteq C$

۲۶- اگر $r \Rightarrow \sim q \vee p$ و $\sim r \Rightarrow \sim p \wedge q$ گزاره‌هایی درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره قطعاً درست است؟

۱) $r \wedge p \Rightarrow r \vee q$ ۲) $r \vee p \Rightarrow r \vee q$ ۳) $p \wedge q \Rightarrow r \wedge q$ ۴) $q \Leftrightarrow r$

۲۷- اگر $A = \{2,4,6,...,102\}$ و $B = \{3,6,9,...,102\}$، آن‌گاه $A^2 - B^2$ چند عضو دارد؟

۱) ۲۱۳۲ ۲) ۲۳۱۲ ۳) ۲۲۳۱ ۴) ۲۳۲۱

۲۸- مجموعه همه زیرمجموعه‌های A، B و $A \cup B$ را با $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cup B)$ نشان می‌دهیم. اگر $|P(A \cup B)| = |P(A)| + |P(B)| + 464$، آن‌گاه $\|A| - |B\|$ چقدر است؟ (A و B دو مجموعه مجزا هستند.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹- کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{Z}; \exists y \in \mathbb{Z}; y | x$ ۲) $\forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}; y = x + 1$

۳) $\exists x \in \mathbb{Z}; \forall y \in \mathbb{Z}; x | y$ ۴) $\forall x \in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}: x = y + 1$

۳۰- اگر $A \cup B = U$، آن‌گاه متمم مجموعه $\big[(A-(A-B)) \cup ((A-B)-B)\big] - B$ کدام است؟

۱) B ۲) $B - A$ ۳) A' ۴) $B' \cup A'$

۱- در یک باشگاه ورزشی ۸۰ نفر حضور دارند که ۳۵ نفر از آن‌ها والیبال و ۲۵ نفر از آن‌ها بسکتبال بازی می‌کنند. اگر تعداد افرادی که در هر دو رشته بازی می‌کنند، $\frac{۱}{۳}$ افرادی باشد که در هیچ‌یک از دو رشته فعالیت نمی‌کنند، در این صورت در این باشگاه، چند نفر فقط والیبال بازی می‌کنند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۲- در دنباله هندسی با جملات مثبت اگر با جمله اول a و $\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۶$، قدرنسبت دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d تساوی $۶a_۲^۲-۵a_۳a=۳aa_۲$ برقرار باشد، واسطه حسابی جمله نهم و پنجم چند برابر قدرنسبت دنباله است؟

۱) ۴ یا ۷ ۲) ۳ یا ۹ ۳) ۸ یا ۴ ۴) ۴ یا ۷/۵

۴- اگر جملات چهارم و هشتم دنباله خطی a_n به ترتیب برابر جملات دوم و هفتم دنباله خطی b_n باشند و قدرنسبت‌ها دو عدد طبیعی یک رقمی باشند، اختلاف جملات بیستم آن‌ها چه عددی است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) ۲۴

۵- اعداد طبیعی را چنان دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد در هر دسته مربع کامل باشد، در دسته‌ای که تعداد اعضای آن به ۱۳ می‌رسد، جمله وسط آن دسته کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۳۱ ۳) ۳۴ ۴) ۴۳

۶- اگر a,b,d دنباله هندسی و a,b,c,d دنباله حسابی تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله هندسی چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۷- هرگاه a_n یک الگوی خطی و $b_n=a_n\cdot a_{n+۱}$ یک الگوی درجه ۲ باشد، به طوری که جملات اول و سوم الگوی خطی به ترتیب ۴ و ۱۰ باشند، جمع جمله چهارم دو دنباله چه عددی است؟

۱) ۲۲۱ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۶ ۴) ۱۸۱

۸- حاصل $A=\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{27}}\cdot\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\times 81^{-\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) $6\sqrt[3]{9}$ ۴) $4\sqrt[3]{3}$

۹- اگر $A^3=8-(3+\sqrt[3]{2})(3+\sqrt[3]{4})$، مقدار $(A-1)^3$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰- اگر $A=\frac{4\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ و $B=\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5+\sqrt{6}}$، ساده شده $A-B^2$ کدام است؟

۱) $8\sqrt{6}$ ۲) ۵ ۳) $4\sqrt{6}$ ۴) ۱۰

۱۱- اگر $A=\frac{\sqrt[3]{4}}{2-\sqrt[3]{4}}$ و $B=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $AB=2$ ۲) $A+B=\sqrt[3]{2}$ ۳) $A+B=1$ ۴) $AB=1$

۱۲- اگر $a=\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ساده شدهٔ $A=(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}-1$ ۲) $2\sqrt{3}+1$ ۳) $2\sqrt{3}-2$ ۴) $2\sqrt{3}+2$

۱۳- اگر $A=\frac{3+\sqrt{24}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$، حاصل $(A-3)^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۴- اگر $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2+1}=2$ ساده شده عبارت $A=\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{a^2+a+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۵- هرگاه $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2}(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}})$، ساده شده A کدام است؟

۱) $-2\sqrt{3}$ ۲) ۱ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) -1

۱- **گزینهٔ «۲»** *(حامد معنوی)*

ابتدا شرط تعریف بازه را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} A=[m-2\ ,\ 4) \Rightarrow 4>m-2 \Rightarrow m<6 \quad (1) \\ B=[-3\ ,\ 3m-1) \Rightarrow 3m-1>-3 \Rightarrow 3m>-2 \Rightarrow m>-\frac{2}{3} \end{cases}$$

برای این‌که دو بازهٔ A و B جدا از هم باشند داریم:

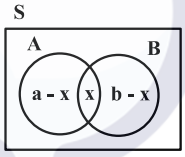
$$3m-1\le m-2 \Rightarrow 2m\le -1 \Rightarrow m\le -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$(1)\cap(2)\cap(3) \Rightarrow -\frac{2}{3}<m\le -\frac{1}{2}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

با فرض $n(A)=a$ و $n(B)=b$ و نمودار ون زیر داریم:



$$\begin{cases} |a-b|=7 \\ a-x=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a=-7 \text{ یا } 7 \\ a-x=10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دوتا}]{\text{جمع}} b-x=3 \text{ یا } 17$$

در نتیجه:

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=(a-x)+(b-x)=a+b-2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-x=10 \\ b-x=3 \text{ یا } 17 \end{cases} \Rightarrow a+b-2x=\begin{cases} 10+3=13 \\ 10+17=27 \end{cases}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمد زنگنه)*

جملات موجود در شکل، مربوط به دنبالهٔ حسابی $a_n=n+3$ هستند. از طرفی چون جملات a_{16} و a_2 با هم و a_{13} و a_5 نسبت به a_9 متساوی‌الفاصله هستند پس می‌توان نوشت:

$$\frac{a_2+a_{16}}{2}=a_9 \Rightarrow a_2+a_{16}=2a_9$$

$$\frac{a_5+a_{13}}{2}=a_9 \Rightarrow a_5+a_{13}=2a_9$$

$$\Rightarrow a_2+a_5+a_9+a_{13}+a_{16}=(a_2+a_{16})+(a_5+a_{13})+a_9$$

$$=2a_9+2a_9+a_9=5a_9 \xrightarrow[a_9=12]{a_n=n+3} 5\times 12=60$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۴)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$t_n=an^2+bn+c \Rightarrow \begin{cases} t_1=a+b+c=5 \\ t_4=16a+4b+c=14 \\ t_5=25a+5b+c=20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_4-t_1=15a+3b=9 \\ t_5-t_4=9a+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a+b+c=5 \Rightarrow c=5 \Rightarrow t_n=\frac{3}{4}n^2-\frac{3}{4}n+5$$

$$\Rightarrow t_8=48-6+5=47$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(ستار زواری)*

اگر بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد درج شده را به ترتیب y و x در نظر بگیریم، داریم:

$$8\ ,\ x\ ,\ \dots\ ,\ y\ ,\ 155$$

طبق خاصیت دنبالهٔ حسابی:

$$8+155=x+y=163 \quad (*)$$

طبق صورت سؤال:

$$y-x=141 \xrightarrow{(*)} y=152\ ,\ x=11$$

پس قدرنسبت این دنباله برابر $11-8=3$ می‌باشد.

حال داریم:

$$d=\frac{155-8}{n+1}=3 \Rightarrow n=48$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهسان کوهرزی)*

$$۳^{m}\times ۳^{n}=(۳\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow ۳^{m+n}=۲۷=۳^{۳}\Rightarrow m+n=۳$$

$$\Rightarrow \text{واسطهٔ حسابی}=\frac{m+n}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۶)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

برای سه جملهٔ متوالی در دنباله‌های هندسی داده شده داریم:

$$\begin{cases} b^{۲}=ac \\ (-b)^{۲}=(a+۱۰)(c+۱۰)\Rightarrow b^{۲}=ac+۱۰(a+c)+۱۰۰ \end{cases}$$

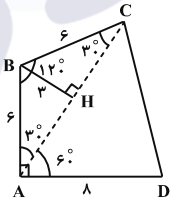
$$\xrightarrow{b^{۲}=ac} ۱۰(a+c)=-۱۰۰\Rightarrow \frac{a+c}{۲}=-۵$$

برای رد کردن بقیهٔ گزینه‌ها کافی است اعداد $a=-۲$، $b=۴$ و $c=-۸$ را در نظر بگیریم.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، قطر AC را رسم می‌کنیم؛ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زوایای مجاور ساق ۳۰ درجه هستند و داریم:



$$\frac{BH}{BC}=\sin ۳۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BH=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

$$\frac{CH}{BC}=\cos ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow CH=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

داریم $AC=۲CH=۶\sqrt{۳}$ و در نتیجه:

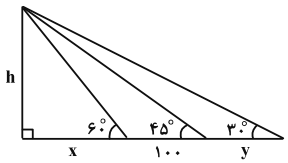
$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{BH\times AC}{۲}=\frac{۳\times ۶\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳} \\ S_{ACD}=\frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin ۶۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}\times ۶\sqrt{۳}\times ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳۶ \end{cases}$$

مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر می‌شود با:

$$S=S_{ABC}+S_{ACD}=۳۶+۹\sqrt{۳}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۳ و ۳۵)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*



$$\begin{cases} \tan ۶۰^{\circ}=\sqrt{۳}=\frac{h}{x}\Rightarrow h=\sqrt{۳}x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h \\ \tan ۴۵^{\circ}=\frac{h}{x+۱۰۰}=۱\Rightarrow h=x+۱۰۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} h=۵۰(۳+\sqrt{۳}) \\ x=۵۰(\sqrt{۳}+۱) \end{cases}$$

$$\tan ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{h}{x+۱۰۰+y}\Rightarrow x+۱۰۰+y=\sqrt{۳}h$$

$$\Rightarrow ۵۰\sqrt{۳}+۵۰+۱۰۰+y=\sqrt{۳}\times ۵۰(۳+\sqrt{۳})$$

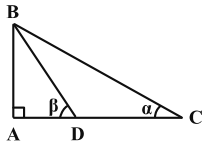
$$\Rightarrow ۵۰\sqrt{۳}+۱۵۰+y=۱۵۰\sqrt{۳}+۱۵۰\Rightarrow y=۱۰۰\sqrt{۳}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

طبق فرض $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$، پس مطابق شکل $AB=۳x$ و $AC=۴x$؛

همچنین $\cot\beta=\frac{۵}{۱۲}$، پس $AD=۵y$ و $AB=۱۲y$ در نظر می‌گیریم.



داریم $AB=۱۲y=۳x$، یعنی $x=۴y$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$AC=۴x=۴(۴y)=۱۶y$$

پس $DC=AC-AD=۱۱y$ و لذا:

$$\frac{DC}{AB}=\frac{۱۱y}{۱۲y}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** (روح‌اله حسنی)

داریم: $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \quad (*)$$

بنابراین: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \cot\theta = 1/5 \xrightarrow{(*)} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1+\cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{9}{4} \Rightarrow \cot^2\theta = \frac{9}{4}-1 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

اما چون $\sin\theta > 0$ و $90^\circ < \theta < 270^\circ$ پس انتهای کمان زاویهٔ θ در ربع دوم است. در نتیجه: $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} = -0/4\sqrt{5}$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** (یاسین گشاورزی‌هرات)

راه‌حل اول: نقطهٔ $P(-\frac{2}{3}, y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. بنابراین:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$$

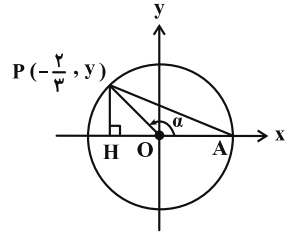
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha>0]{\text{ناحیهٔ دوم}} \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\triangle POA} = \frac{1}{2}\times OP\times OA\times\sin\alpha = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

راه دوم: ارتفاع PH را رسم می‌کنیم. ارتفاع PH در واقع همان $\sin\alpha$ است پس $PH = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$S_{\triangle POA} = \frac{1}{2}\times PH\times OA = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times 1 = \frac{\sqrt{5}}{6}$$



(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** (غلامرضا نیازی)

روش اول:

$$(\tan x-\cot x)^2 = \tan^2 x+\cot^2 x-2(\tan x.\cot x)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-2 = \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-2$$

$$= \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}-2$$

$$= \frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}-2 = \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-2-2$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x\cos x^2}-4 \Rightarrow a=1,\ b=-4 \Rightarrow a+b=-3$$

روش دوم: می‌توان زوایایی که مخرج را صفر نمی‌کنند را جای‌گذاری کرد.

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow (1-1)^2 = \frac{a}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+b \Rightarrow 0 = 4a+b \Rightarrow b=-4a$$

$$x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow (\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{a}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})^2}+b$$

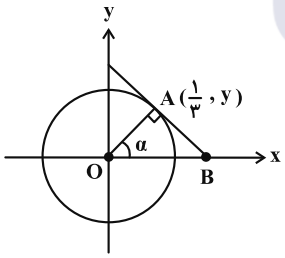
$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{16a}{3}-4a \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4a}{3} \Rightarrow a=1,\ b=-4$$

$$\Rightarrow a+b=-3$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۴- **گزینهٔ «۳»** (غلامرضا نیازی)

شعاع OA را رسم می‌کنیم. اگر $A\hat{O}B=\alpha$، آنگاه با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم: $O\hat{A}B = 90^\circ$



$$\overset{\Delta}{OAB}: \cos\alpha = \frac{OA}{OB} \xrightarrow[\cos\alpha=\frac{1}{3}]{OA=1} \frac{1}{3} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = 3$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** (کیان کریمی‌خراسانی)

با توجه به گزینه‌ها، $\cos x$ نمی‌تواند صفر باشد، همچنین داریم:

$$4\cos^4 x = 1-\sin^4 x \Rightarrow 4\cos^4 x = (1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 4\cos^4 x = \cos^2 x(1+1-\cos^2 x)$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} 4\cos^2 x = 2-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

روش اول: ابتدا مخرج مشترک را بین دو کسر اول می‌گیریم. سپس به ساده کردن آن می‌پردازیم:

$$A = \underbrace{\frac{3x}{3x+1}+\frac{3}{3x-1}}-\frac{6x+4}{9x^2-1}$$

$$=\frac{3x(3x-1)+3(3x+1)}{(3x+1)(3x-1)}-\frac{6x+4}{9x^2-1}$$

$$=\frac{9x^2-3x+9x+3}{9x^2-1}-\frac{6x+4}{9x^2-1}=\frac{9x^2+6x+3-6x-4}{9x^2-1}$$

$$=\frac{9x^2-1}{9x^2-1}=1$$

روش دوم: به عنوان مثال $x=0$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow A=\frac{0}{1}+\frac{3}{-1}-\frac{4}{-1}=0-3+4=1$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

داریم: $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^2=1$

عبارت $3-2\sqrt{2}$ در مخرج را به صورت $(\sqrt{2}-1)^2$ می‌نویسیم، در این صورت:

$$n<\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^4}{3-2\sqrt{2}}}<n+1 \Rightarrow n<\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}}<n+1$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}\times\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^4}=\sqrt{2}+1$$

در نتیجه:

$$n<\sqrt{2}+1<n+1 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=2$$

$$\xrightarrow{n=2} 5n-1=9 \xrightarrow{\text{ریشهٔ چهارم}} \pm\sqrt{3}$$

اختلاف ریشه‌ها: $\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۰ و ۶۶)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(رضا ماجدی)*

طبق فرض داریم:

$$\sqrt{9a+4}-3\sqrt{a+1}=b \Rightarrow \sqrt{9a+4}-\sqrt{9a+9}=b$$

فرض: $\begin{cases}\sqrt{9a+4}=m\\ \sqrt{9a+9}=n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m-n=b\\ m^2-n^2=-5\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}m-n=b\\ (m-n)(m+n)=-5\end{cases} \Rightarrow m+n=-\frac{5}{b}$$

$$\begin{cases}n-m=-b\\ m+n=-\frac{5}{b}\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2n=-b-\frac{5}{b}$$

$$\Rightarrow n=\sqrt{9a+9}=3\sqrt{a+1}=-\frac{b}{2}-\frac{5}{2b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+1}=-\frac{b}{6}-\frac{5}{6b}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحهٔ ۶۳)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

با ساده‌سازی A، فرض مسئله را آسان‌تر می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}+\sqrt{\sqrt[3]{4}-1} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\ (\sqrt{\sqrt[3]{4}}+1)$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\ (\sqrt[3]{2}+1)=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\ (\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)^2})$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\times\sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

$$8+4A=8+4\sqrt{3} \xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم و مثبت}} \sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۰ و ۶۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(حسین صنمی)*

از صورت کسر a^2 و از مخرج کسر b^3 را فاکتور می‌گیریم:

$$M=\frac{a^2(a^3b^3+1)}{b^3(a^2b^2+1)} \Rightarrow \frac{\frac{(a^3b^3+1)}{b^3}}{\frac{(a^2b^2+1)}{a^2}}=\frac{(a^3+\frac{1}{b^3})}{(b^2+\frac{1}{a^2})}$$

$$=\frac{(a+\frac{1}{b})^3-3(a+\frac{1}{b})(\frac{a}{b})}{(b+\frac{1}{a})^2-2\frac{b}{a}}$$

برای به دست آوردن $b+\frac{1}{a}$، طبق فرض می‌توان نوشت:

$$a+\frac{1}{b}=4 \Rightarrow 2b+\frac{2}{a}=4 \Rightarrow b+\frac{1}{a}=2$$

$$M=\frac{4^3-3(4)(2)}{2^2-1}=\frac{64-24}{3}=\frac{40}{3}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(حامد قاسمیان)*

معادلهٔ درجه دوم مذکور، ریشهٔ مضاعف دارد، پس:

$$\Delta=0\Rightarrow m^2-6m+9=0\Rightarrow (m-3)^2=0\Rightarrow m=3$$

جای‌گذاری در معادله $\frac{3}{4}x^2-3x+3=0$:

$$\Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف}\quad \alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

در نتیجه: $m-\alpha=3-2=1$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(غلامرضا نیازی)*

روش اول:

$$y=mx^2-2mx+3 \xrightarrow{y=1} mx^2-2mx+3=1$$

$$\Rightarrow mx^2-2mx+2=0\Rightarrow \Delta=\underbrace{4m^2-8m}_{4m(m-2)}$$

$$\xrightarrow{\Delta>0}(m<0)\cup(m>2)\qquad (1)$$

$$\begin{cases}y=mx^2-2mx+3\\ y=5\end{cases}\Rightarrow mx^2-2mx+3=5$$

$$\Rightarrow mx^2-2mx-2=0\Rightarrow \Delta=\underbrace{4m^2+8m}_{4m(m+2)}$$

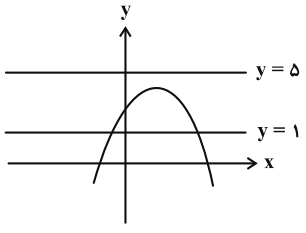
$$\xrightarrow{\Delta<0}-2<m<0\qquad (2)$$

$$(1)\cap(2):-2<m<0\Rightarrow m=\text{مقدار صحیح}=\{-1\}$$

روش دوم: برای این‌که نمودار سهمی، خط $y=1$ را در دو نقطه قطع کند و با $y=5$ نقطهٔ تلاقی نداشته باشد باید دو شرط زیر را داشته باشد.

۱) مقعر به پایین باشد $(a<0)$

۲) عرض رأس سهمی بین ۱ و ۵ باشد.



$$\Rightarrow\begin{cases}m<0 \quad (1)\\ 1<-\frac{\Delta}{4a}<5\Rightarrow 1<\frac{12m-4m^2}{4m}<5\\ \Rightarrow 1<3-m<5\Rightarrow -2<-m<2\\ \Rightarrow -2<m<2\qquad (2)\end{cases}$$

$$(1)\cap(2):\ -2<m<0\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=-1$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۷۹)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

در سهمی

$$y=kx^2+2kx+k+5=k(x^2+2x+1)+5=k(x+1)^2+5$$

مختصات رأس $(-1\ ,\ 5)$ است. پس این نقطه در معادلهٔ سهمی $y=mx^2+x+2m$ صدق می‌کند:

$$5=m(-1)^2+(-1)+2m=3m-1\Rightarrow 3m=6\Rightarrow m=2$$

پس معادلهٔ این سهمی به صورت $y=2x^2+x+4$ است. مختصات رأس این سهمی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a})=(-\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1-4(2)(4)}{8})=(-\frac{1}{4}\ ,\ \frac{31}{8})$$

مختصات رأس این سهمی در معادلهٔ سهمی $y=k(x+1)^2+5$ صدق می‌کند پس:

$$\frac{31}{8}=k(-\frac{1}{4}+1)^2+5\Rightarrow \frac{31}{8}=\frac{9}{16}k+5$$

$$\xrightarrow{\times 16}62=9k+80\Rightarrow 9k=-18\Rightarrow k=-2$$

بنابراین: $k-m=-2-2=-4$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدهادی جلالی)*

با استفاده از عرض از مبدأ و طول رأس سهمی، مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم.

عرض از مبدأ: $c-2=-1\Rightarrow c=1$

طول رأس سهمی: $\frac{-(b+3)}{2\times\frac{3}{4}a}=\frac{4}{3}\Rightarrow -b-3=2a\Rightarrow 2a+b=-3$

$$\Rightarrow 2a+b-c=-4$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا ذاکرزاده)*

با توجه به جواب نامعادله، جدول تعیین علامت عبارت مربوطه به صورت زیر است:

x		-1		b	
p	$-$	۰	$-$	۰	$+$

پس می‌توان نتیجه گرفت $x=-1$ ریشهٔ مضاعف عبارت سمت چپ نامعادله است پس ریشهٔ سادهٔ داخل پرانتز دومی می‌باشد.

$$۲x^۲+ax+۳a=۰ \xrightarrow{x=-۱} ۲-a+۳a=۰ \Rightarrow a=-۱$$

$$p=(x+۱)(۲x^۲-x-۳)=(x+۱)^۲(۲x-۳)$$

و ریشهٔ دیگر پرانتز دوم b می‌باشد یعنی $۲x-۳=۰$ و لذا $b=\frac{۳}{۲}$ است.

پس:

$$a-b=-۱-\frac{۳}{۲}=-\frac{۵}{۲}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(حامد قاسمیان)*

برای محاسبهٔ ریشهٔ مشترک باید دو معادله را مساوی هم گذاشت پس:

$$x^۲+۲x-۵m=x^۲+۳x-۷m$$

پس از ساده‌سازی به رابطهٔ $m=\frac{x}{۲}$ خواهیم رسید. با جای‌گذاری در هر یک از معادلات، رابطهٔ $x^۲-\frac{۱}{۲}x=۰$ به دست می‌آید که ریشه‌های آن برابر با ۰ و $\frac{۱}{۲}$ است. به دلیل غیرصفر بودن، پس مقدار $m=\frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید. داریم:

ریشه‌های $x^۲+۲x-\frac{۵}{۴}=۰$ برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۵}{۲}$.

ریشه‌های $x^۲+۳x-\frac{۷}{۴}=۰$ برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۷}{۲}$.

پس جمع ریشه‌های غیرمشترک برابر است با ۶-.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$\frac{۱۱x+۱}{x^۲+x-۲}>\frac{x+۳}{x-۱} \Rightarrow \frac{۱۱x+۱}{(x+۲)(x-۱)}-\frac{x+۳}{x-۱}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱x+۱-x^۲-۵x-۶}{(x+۲)(x-۱)}>۰ \Rightarrow \frac{-x^۲+۶x-۵}{(x+۲)(x-۱)}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)(x-۵)}{(x+۲)(x-۱)}<۰ \xrightarrow{x\neq ۱} \frac{x-۵}{x+۲}<۰ \Rightarrow -۲<x<۵$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

که $x=۱$ قابل قبول نمی‌باشد پس ۵ عدد صحیح قابل قبول است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

در تابع، هیچ دو زوج مرتبی نباید مؤلفهٔ اول برابر و مؤلفهٔ دوم نابرابر داشته باشند. پس $۲b-۱=۱$ و در نتیجه $b=۱$. حال می‌نویسیم:

$$f=\{(۲,۱),(۴,۱),(۲,a)\} \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow a^۲-۲b=-۱$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(رضا ماجدی)*

برد تابع به کمک ضابطه و دامنهٔ آن به دست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{b}{۳}\le x\le ۳ \Rightarrow -۶\le -۲x\le -\frac{۲b}{۳} \Rightarrow -۲\le ۴-۲x\le ۴-\frac{۲b}{۳}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le \frac{۴-۲x}{۳}\le \frac{۴}{۳}-\frac{۲b}{۹} \Rightarrow R_f=[-\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}-\frac{۲b}{۹}]$$

از طرفی می‌دانیم $R_f=[a,۴]$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} a=-\frac{۲}{۳} \\ \frac{۴}{۳}-\frac{۲b}{۹}=۴ \Rightarrow \frac{۲b}{۹}=-\frac{۸}{۳} \Rightarrow b=-۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a+۲b=-۲-۲۴=-۲۶$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۵)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال آرکیش)*

ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱,x=۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۳\}$$

$$f(x)=\frac{x^۳-۹x+x^۲-۹}{x^۲-۲x-۳}=\frac{x(x^۲-۹)+(x^۲-۹)}{(x+۱)(x-۳)}$$

$$=\frac{(x^۲-۹)(x+۱)}{(x+۱)(x-۳)}=\frac{(x-۳)(x+۳)(x+۱)}{(x+۱)(x-۳)} \Rightarrow f(x)=x+۳$$

برد تابع $f(x)$ تمام اعداد حقیقی خواهند بود به جز دو مقداری که خروجی $f(۳)$ و $f(-۱)$ باشند:

$$\begin{cases} f(-۱)=-۱+۳=۲ \\ f(۳)=۳+۳=۶ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع این دو عدد}=۲+۶=۸$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(سینا خیرخواه)*

طبق تعریف، تابع همانی $f(x)=x$ و تابع ثابت $g(x)=c$ را در نظر می‌گیریم:

$$g(4x)+3f(1-x)=4-3x \Rightarrow c+3(1-x)=4-3x$$

$$\Rightarrow c+3-3x=4-3x \Rightarrow c=1 \Rightarrow \begin{cases} g(5)=c=1 \\ f(-2)=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(-2)}{g(5)}=-\frac{2}{1}=-2$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۱۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(حامد معنوی)*

توجه کنید که $1-k$ ریشهٔ مخرج است. پس:

$$2(1-k)-a=0 \Rightarrow a=2(1-k) \Rightarrow f(x)=\frac{12+2kx}{2x-2(1-k)}$$

به ازای $x \neq 1-k$، نمودار تابع f منطبق بر نمودار تابع ثابت $y=k$ است، پس:

$$\frac{12+2kx}{2x-2(1-k)}=k \Rightarrow 6+kx=kx-k(1-k)$$

$$\Rightarrow -k+k^2=6 \Rightarrow k^2-k-6=0 \Rightarrow (k-3)(k+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=3 & \text{غ ق ق} \quad (1-k)>0 \\ k=-2 \Rightarrow a=2(1-k)=2(1+2) \Rightarrow a=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+k=6-2=4$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۱۰)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

ابتدا نمودار تابع را یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y_{\text{جدید}}=|x|-2+1=|x|-1$$

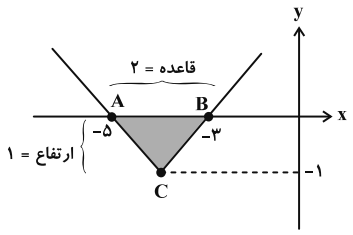
حال نمودار تابع جدید را ۴ واحد به طرف xهای منفی منتقل می‌کنیم، یعنی به جای x، $(x+4)$ قرار می‌دهیم: $y_{\text{جدید}}=|x+4|-1$

برای به دست آوردن مساحت مورد نظر، نمودار تابع $y=|x+4|-1$ را رسم می‌کنیم.

$$x=-4 \Rightarrow y=|-4+4|-1=-1$$

$$y=0 \Rightarrow |x+4|-1=0 \Rightarrow |x+4|=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4=1 \Rightarrow x=-3 \\ x+4=-1 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$



$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1\times 2}{2}=1$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۵)

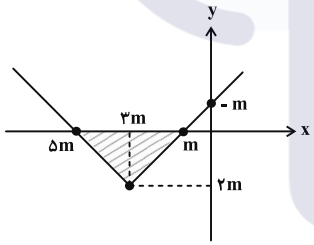
۴- **گزینهٔ «۲»** *(حامد معنوی)*

توجه کنید که:

$$f(x)=0 \Rightarrow |x-3m|+2m=0$$

$$\Rightarrow |x-3m|=-2m \xrightarrow{m<0} \begin{cases} x-3m=-2m \Rightarrow x=m \\ x-3m=2m \Rightarrow x=5m \end{cases}$$

$$f(0)=|0-3m|+2m=-m \quad , \quad f(3m)=2m$$



$$S_{\text{هاشورخورده}}=\frac{(-4m)(-2m)}{2}=4m^2=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow m^2=\frac{1}{36} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{6} & \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{1}{6} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$m=-\frac{1}{6} \Rightarrow f(x)=|x+\frac{1}{2}|-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{3})=|\frac{1}{3}+\frac{1}{2}|-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۵)

۵- **گزینهٔ «۱»** (غلامرضا نیازی)

انتخاب‌های ۴ رقم متوالی = {۱,۲,۳,۴} , {۲,۳,۴,۵} , ... , {۶,۷,۸,۹}

⇒ ۶ انتخاب

تعداد اعداد ۴ رقمی با هر دسته = جایگشت ۴ رقم = !۴

⇒ حالات مطلوب = ۶×۴! = ۶×۲۴ = ۱۴۴

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۶- **گزینهٔ «۲»** (احمد حسن‌زاده‌فرد)

راه‌حل اول:

حالت اول که رقم سمت راست صفر باشد ⇒ ۴×۳×۲×۱ = ۲۴ حالت

حالت دوم که رقم سمت راست ۲ یا ۴ باشد ⇒ ۳×۳×۲×۲ = ۳۶ حالت

⇒ ۲۴ + ۳۶ = ۶۰ (تعداد کل اعداد چهار رقمی زوج)

راه‌حل دوم: از تعداد کل اعداد ۴ رقمی با ارقام غیرتکراری، اعداد فرد را کم کنیم:

$$\begin{cases} \text{تعداد کل اعداد ۴ رقمی}: ۴\times۴\times۳\times۲ = ۹۶ \\ \text{تعداد کل اعداد ۴ رقمی فرد}: ۳\times۳\times۲\times۲ = ۳۶ \end{cases} \Rightarrow ۹۶ - ۳۶ = ۶۰$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

۷- **گزینهٔ «۴»** (غلامرضا نیازی)

کل تعداد کلمات ۶ حرفی که در آن (ج) و (م) کنار هم باشند:

$\boxed{\text{ج , م}}$, هـ , و , ر , ی = ۵!×۲!

کل تعداد کلمات ۶ حرفی که در آن (ج) و (م) کنار هم و (ر) و (ی) نیز کنار هم باشند:

$\boxed{\text{ج , م}}$, $\boxed{\text{ر , ی}}$, و , هـ = ۴!×۲!×۲!

در نتیجه طبق اصل متمم، تعداد حالات مطلوب برابر می‌شود با:

= ۵!×۲! − ۴!×۲!×۲! = ۲۴۰ − ۹۶ = ۱۴۴

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۸- **گزینهٔ «۱»** (کیان کریمی‌خراسانی)

دو حالت داریم:

- شامل حروف «ش»: در این حالت یکی از حروف «ب» یا «ز» و همچنین یکی از حروف «ا» یا «د» یا «هـ» را نیاز داریم که تعدادشان ۲×۳×۳! = ۳۶ است.

- فاقد حرف «ش»: در این حالت، باید از هر سه حرف «ت»، «ب» و «ز» استفاده کنیم که تعدادشان ۳! = ۶ است.

جواب نهایی ۳۶ + ۶ = ۴۲ است.

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۹- **گزینهٔ «۴»** (غلامرضا نیازی)

مهرهٔ سفید = w مهرهٔ سیاه = b

متمم حالات مطلوب = (هر سه سفید کنار هم باشند)

= تعداد حالات قرار گرفتن مهره‌ها به‌طوری که ۳ مهرهٔ سفید کنار هم باشند

$\boxed{\text{www}}$, b , b , b , b , b = ۶!×۳!

کل حالات قرار گرفتن مهره‌ها کنار هم = !۸

حالات مطلوب = ۸! − ۶!×۳! = ۸×۷×۶! − ۶×۶!

= ۵۰×(۶!) = ۵۰×۷۲۰ = ۳۶۰۰۰

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (سینا خیرخواه)

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: دقیقاً ۲ نفر بین دو برادر باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A } \underline{۴}\ \underline{۳}\ \text{B } \underline{۲}\ \underline{۱} \Rightarrow \text{حالت } ۲۴ \\ \underline{۴}\ \text{A } \underline{۳}\ \underline{۲}\ \text{B } \underline{۱} \Rightarrow \text{حالت } ۲۴ \\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \text{A } \underline{۲}\ \underline{۱}\ \text{B} \Rightarrow \text{حالت } ۲۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۷۲ \xrightarrow[\text{جای B و A عوض شود}]{\times ۲} \text{حالت } ۱۴۴$$

حالت دوم:

دو برادر کنار هم باشند − کل حالات = دو برادر کنار هم نباشند

$\boxed{\text{AB}}$ ----

$\underbrace{۶!}_{۶\times۵!} - (۵!\times۲!) = ۴\times۵!$

$$\frac{\text{حالت اول}}{\text{حالت دوم}} = \frac{۱۴۴}{۴\times۱۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

به $\binom{5}{2}$ طریق می‌توان ۲ رقم متمایز انتخاب کرد و با این دو رقم می‌توان 2^4 عدد چهاررقمی تولید کرد که در دو تا از آن‌ها فقط از یک رقم استفاده شده است. پس تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$$\binom{5}{2}(2^4-2)=10\times14=140$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد زنگنه)*

مقدار A را با استفاده از نکتهٔ صفحهٔ ۱۳۸ کتاب درسی (رابطهٔ خیام-پاسکال) به دست می‌آوریم:

$$A=\binom{9}{5}+\binom{9}{7}-\binom{11}{7}+2\binom{9}{6}$$

$$=\left[\binom{9}{5}+\binom{9}{6}\right]+\left[\binom{9}{6}+\binom{9}{7}\right]-\binom{11}{7}$$

$$=\left[\binom{10}{6}+\binom{10}{7}\right]-\binom{11}{7}=\binom{11}{7}-\binom{11}{7}\Rightarrow A=0$$

می‌دانیم تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n است، پس:

$$B=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$$

$$=2^7-\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{7}\right]=128-(1+7+1)=119$$

در نتیجه: $A+B=0+119=119$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

۸ سوال امتحان کتبی را به ۵ سوال اول و ۳ سوال بعدی تقسیم می‌کنیم. دو حالت مطلوب است:

حالت اول: ۴ سوال از ۵ سوال اول و ۱ سوال از ۳ سوال بعدی

حالت دوم: فقط ۵ سوال از ۵ سوال اول

تعداد روش‌های مطلوب برابر می‌شود با:

$$\binom{5}{4}\binom{3}{1}+\binom{5}{5}\binom{3}{0}=5\times3+1\times1=16$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی برابر است با:

$$n(S)=\binom{8}{5}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3!}=56$$

تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با:

$$\{\boxed{a},b,c,d,e,f,\cancel{g},\cancel{h}\}\Rightarrow n(A)=\binom{5}{4}=5$$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر می‌شود با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{56}$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال آرکیش)*

تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد اعضای پیشامد مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$n(S)=\binom{13}{3}=286$$

$$n(A)=\binom{7}{2}\times\binom{6}{1}+\binom{7}{1}\times\binom{6}{2}=\frac{7\times6}{2}\times6+7\times\frac{6\times5}{2}$$

$$=126+105=231$$

در نتیجه احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{231}{286}=\frac{21\times11}{26\times11}=\frac{21}{26}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

در یک خانوادهٔ ۴ نفری، $2^4=16$ حالت برای جنسیت فرزندان وجود دارد. اما چون علی فرزند این خانواده است حالتی که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، ممکن نیست. پس اگر S فضای نمونه این آزمایش تصادفی باشد آنگاه $n(S)=16-1=15$ خواهد بود. A را پیشامدی در نظر می‌گیریم که تعداد دختران کمتر از پسران نباشد، یعنی تعداد دختران دو یا سه باشد، پس:

$$n(A)=\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=6+4=10$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(غلامرضا نیازی)*

تعداد مهره‌های سیاه را n در نظر می‌گیریم، پس تعداد کل مهره‌ها برابر $(n+۳)$ است. داریم:

$P(\text{خارج شدن حداقل یک مهرهٔ سفید}) = ۱ - P(\text{هر دو سیاه})$

$$=۱-\frac{\binom{n}{۲}}{\binom{n+۳}{۲}}=۱-\frac{\frac{n!}{(n-۲)!\times ۲!}}{\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!\times ۲!}}=۱-\frac{n(n-۱)}{(n+۳)(n+۲)}=\frac{۹}{۱۴}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{(n+۳)(n+۲)}=\frac{۵}{۱۴}\Rightarrow \frac{n^۲-n}{n^۲+۵n+۶}=\frac{۵}{۱۴}$$

بعد از طرفین وسطین کردن رابطهٔ اخیر، به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$۹n^۲-۳۹n-۳۰=۰\Rightarrow \underbrace{۳n^۲-۱۳n-۱۰}_{(۳n+۲)(n-۵)}=۰\Rightarrow n=۵$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا مقادیر $P(A)$ و $P(B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}P(A')=۰/۶\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۰/۴\\ P(B')=۰/۳\Rightarrow P(B)=۱-P(B')=۰/۷\end{cases}$$

حال طبق فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\underbrace{P(A\cap B')}_{P(A-B)}+\underbrace{P(B\cap A')}_{P(B-A)}=۰/۷$$

$$\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷$$

$$\Rightarrow ۱/۱-۲P(A\cap B)=۰/۷\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۰/۴+۰/۷-۰/۲=۰/۹$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق تعریف پیشامدهای A، B و C داریم:

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

$$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$$

$$C=\left\{\begin{matrix}(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),\\ (۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\end{matrix}\right\}$$

حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. دو پیشامدی ناسازگار هستند که اشتراک آن‌ها تهی باشد.

گزینهٔ «۱»: $(A\cap B)\cap C=\{(۳,۳)\}\neq\varnothing$

گزینهٔ «۲»: $(C-B)\cap A=\{(۲,۲),(۵,۵)\}\neq\varnothing$

گزینهٔ «۳»: $(A-B)\cap C=\{(۲,۲),(۵,۵)\}\neq\varnothing$

گزینهٔ «۴»: $(B-C)\cap A=\varnothing$

بنابراین دو پیشامد $B-C$ و A ناسازگارند.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۶)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در گزینه‌های «۱» و «۲»، هیچ کدام از متغیرها کیفی ترتیبی نیستند.

در گزینهٔ «۴»، هیچ کدام از متغیرها، کمی گسسته نیستند.

در گزینهٔ «۳»، متغیرها به ترتیب کمی پیوسته، کیفی ترتیبی، کیفی اسمی و کمی گسسته هستند.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۱- **گزینهٔ «۳»** (میلاد منصوری)

$a_1=1$ و $a_2=3$; $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$; $n\geq 3$

$a_3=2a_2+a_1=6+1=7$

$a_4=2a_3+a_2=14+3=17$

$a_5=2a_4+a_3=34+7=41$

$a_6=2a_5+a_4=82+17=99$

$\Rightarrow a_7-a_5=2a_6=198$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۲- **گزینهٔ «۲»** (بهانبخش نیکنام)

فرض کنیم ۴ جمله اول این دنباله به‌صورت a,aq,aq^2,aq^3 باشد. طبق فرض:

$$\begin{cases} aq-a=24 \\ aq^3-aq^2=216 \end{cases} \Rightarrow \frac{aq^2(q-1)}{a(q-1)}=\frac{216}{24}$$

$$\Rightarrow q^2=9 \xrightarrow{q<0} q=-3$$

$$\Rightarrow a(-3)-a=24 \Rightarrow a=-6$$

$$-6,18,-54,162 \Rightarrow \text{مجموع چهارجمله}=120$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۳- **گزینهٔ «۴»** (رحمان پوررحیم)

شیب خط برابر با $\tan\alpha$ می‌باشد. بنابراین: $\tan\alpha=-3$ (*)

برای یافتن حاصل عبارت $\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$، صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-\tan\alpha+1}{1+\tan\alpha} \overset{(*)}{=\!=} \frac{-(-3)+1}{1+(-3)}=\frac{4}{-2}=-2$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** (وحید رامتی)

$$\underbrace{(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$

$$=a^4+2(ab)^2+b^4-(ab)^2$$

$$=a^4+b^4+(ab)^2=15+2\sqrt{14}+15-2\sqrt{14}$$

$$+\left(\sqrt[4]{\underbrace{(15+2\sqrt{14})(15-2\sqrt{14})}_{225-56}}\right)^2=30+\sqrt{169}=30+13=43$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۵- **گزینهٔ «۱»** (علی ساوجی)

با توجه به فرض سؤال، مثلث ABC را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(5x-4)^2=x^2+(4x+4)^2$$

$$\Rightarrow 25x^2-40x+16=x^2+16x^2+32x+16$$

$$\Rightarrow 8x^2-72x=0 \Rightarrow x^2-9x=0 \Rightarrow x(x-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ \boxed{x=9} \Rightarrow \text{طول ضلع کوچک} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث}=x+(4x+4)+(5x-4)=10x=90$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۶- **گزینهٔ «۳»** (عباس اشرفی)

$x=-2$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است، چرا که در همسایگی $x=-2$ تغییر علامت نداریم و در این نقطه، $P(x)$، تعریف نشده است.

از طرفی $x=1$ ریشهٔ درجهٔ یک صورت است. بنابراین:

$$P(x)=\frac{-(x-1)(x+2)}{x+2}=\frac{-x^2-x+2}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=2\end{cases}$$

در نتیجه: $\Rightarrow\frac{2a-b}{c}=\frac{-2-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(سعید علی‌پور)*

در تابع ثابت، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج‌های مرتب یکسانند:

$$\Rightarrow k^2+8=7k-2=\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow k^2-7k+10=(k-5)(k-2)=0\Rightarrow k=2\ \text{یا}\ 5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=2\Rightarrow b=2\times(7k-2)=24\Rightarrow b+k=26\\ \text{یا}\\k=5\Rightarrow b=2\times(7k-2)=66\Rightarrow b+k=71\end{cases}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

برد تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $a<0$ (سهمی رو به پایین) برابر با $(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$ است. بنابراین:

$$-\frac{\Delta}{4a}=8\Rightarrow\frac{-(64-4a(a+2))}{4a}=8$$

$$\Rightarrow a^2+2a-16=8a\Rightarrow a^2-6a-16=0$$

$$\Rightarrow(a-8)(a+2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=8>0 & \text{غ ق ق}\\ a=-2<0 & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x^2+8x\Rightarrow f(1)=6$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۱۷)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(یاسین سپهر)*

دو حالت داریم:

الف) حرف اول با "ی"شروع شده و حرف آخر یکی از حروف (و،ا،ل) باشد: $3\times5!\times1$

ب) حرف اول با یکی از حروف "ف،ت،ب"شروع شده و حرف آخر "ا، ل، و، ی"باشد: $4\times5!\times3$

مجموع حالات : $3\times5!+12\times5!=15\times5!$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(سعید عزیزخانی)*

در پرتاب ۱۲ سکه داریم: $n(S)=2^{12}=4096$

پرتاب این ۱۲ سکه سه بخش دارد:

حداقل سه بار پشت ظاهر شود	می‌تواند پشت یا رو بیاید	دقیقاً دوبار پشت بیاید
_ _ _ _ _ _	_ _	_ _ _ _

$$\left.\begin{array}{ll}\text{سه بار پشت}: & \binom{6}{3}=20\\ \text{چهار بار پشت}: & \binom{6}{4}=15\\ \text{پنج بار پشت}: & \binom{6}{5}=6\\ \text{شش بار پشت}: & \binom{6}{6}=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مجموع}}42$$

در نهایت داریم:

$$n(A)=\binom{4}{2}\times2^2\times42=1008\Rightarrow P(A)=\frac{1008}{2^{12}}=\frac{63}{256}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

با توجه به طول بازه که مقداری غیرصفر است، داریم:

$$\text{طول بازه} = (-۴a+۸)-(۳a+۱) = -۷a+۷ = ۲۱$$

$$\Rightarrow -۷a = ۱۴ \Rightarrow a = -۲$$

$$\text{بازه } (a-۴\ ,\ -۳a+۴) = (-۲-۴\ ,\ ۶+۴)$$

$$(-۶\ ,\ ۱۰) \xrightarrow{\text{مرکز بازه}} \frac{۱۰-۶}{۲} = ۲$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

چون $(A-B)\cup(B-A)$ نامتناهی است، پس یکی از دو مجموعهٔ $(A-B)$ و $(B-A)$ قطعاً نامتناهی‌اند. در مورد متناهی بودن یا نامتناهی بودن $A\cap B$، اظهارنظر قطعی نمی‌توان کرد ولی قطعاً مجموعهٔ $A\cup B$ نامتناهی است، زیرا:

$$(A\cup B) = \underbrace{(A-B)\cup(B-A)}_{\text{نامتناهی}}\cup(A\cap B)$$

پس دو مجموعه از چهار مجموعهٔ مذکور حتماً نامتناهی‌اند.

توجه: به عنوان مثال، با فرض $A=\mathbb{N}$ و $B=\{۱\}$، مجموعه‌های $A-B$ و $A\cup B$ نامتناهی‌اند و مجموعه‌های $B-A$ و $A\cap B$ متناهی خواهند بود.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۵ تا ۷)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا نیازی)*

$n(F)=$ تعداد قبولی درس فیزیک ، $n(R)=$ تعداد قبولی درس ریاضی

$$\begin{cases} n(R\cup F)=۳۰ & (۱)\\ n(R)-n(F)=۸ & (۲)\\ n(R)-n(R\cap F)=۱۴ & (۳)\end{cases}$$

$$n(R\cup F)=n(R)+n(F)-n(R\cap F)$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۳)} ۳۰ = ۱۴+n(F)$$

$$n(F)=۱۶ \xrightarrow{(۲)} n(R)=۲۴$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

سوال می‌گوید $n((A-B)\cup(B-A))$ دو برابر $n(A\cap B)$ است. بنابراین:

$$n(A-B)+n(B-A)-n(\underbrace{(A-B)\cap(B-A)}_{\varnothing})$$

$$= ۲n(A\cap B) \qquad (*)$$

از طرفی داریم: $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$

$$\xrightarrow{(*)} n(A\cup B)=۳n(A\cap B) \xrightarrow{n(A\cap B)=x>۰} n(A'\cap B')$$

$$= n(S)-n(A\cup B) = ۴۰-۳x$$

$$\Rightarrow \frac{n(A'\cap B')}{n(A\cap B)} = \frac{۴۰-۳x}{x} = \frac{۴۰}{x}-۳$$

مقدار $\frac{۴۰}{x}-۳$ زمانی کمینه می‌شود که $\frac{۴۰}{x}$ کمترین مقدار ممکن و در نتیجه x بیشترین مقدار ممکن باشد. داریم:

$$n(A\cup B)\le ۴۰\Rightarrow ۳n(A\cap B)\le ۴۰\Rightarrow x\le \frac{۴۰}{۳}\Rightarrow \max(x)=۱۳$$

در نتیجه به ازای $n(A\cap B)=x=۱۳$، حاصل عبارت مورد نظر کمینه می‌شود.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(حامد قاسمیان)*

ابتد تعداد دایره‌ها را در حالت کلی می‌یابیم.

روش اول:

شمارهٔ مرحله	(۱)	(۲)	(۳)	(n)
تعداد دایرهٔ بالا	۲	۶	⋮	$n(n+۱)$
تعداد دایرهٔ پایین	۱	۲	⋮	n
جمع کل	۳	۸	⋮	$n^۲+۲n$

روش دوم: در هر مرحله، تعداد دایره‌ها یک واحد از مربع کامل کمتر است.

پس: $\text{تعداد دایره‌ها}=(n+۱)^۲-۱=n^۲+۲n$

حال طبق فرض داریم: $n^۲+۲n=۴۲+n\Rightarrow n^۲+n-۴۲=۰$

$$\Rightarrow (n+۷)(n-۶)=۰\Rightarrow n=۶$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(سینا خیرخواه)*

$$۹a_۴^۲-a_۲^۲=۴a_۵\Rightarrow (۳a_۴-a_۲)(۳a_۴+a_۲)=۴a_۵$$

$$(۳(a_۱+۳d)-(a_۱+d))(۳(a_۱+۳d)+(a_۱+d))=۴a_۵$$

$$(۲a_۱+۸d)(۴a_۱+۱۰d)=۴a_۵$$

$$۲\overbrace{(a_۱+۴d)}^{a_۵}\times ۲(۲a_۱+۵d)=۴a_۵\xrightarrow{a_۵=a_۱+۴d}۲a_۱+۵d=۱$$

از طرفی: $a_۶=-۵\Rightarrow a_۱+۵d=-۵$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a_۱+۵d=۱\\ a_۱+۵d=-۵\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_۱=۶\\ d=-\frac{۱۱}{۵}\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۶+۱۰(-\frac{۱۱}{۵})=۶-۲۲=-۱۶$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد کریمی)*

در این دنبالهٔ هندسی صعودی، جملهٔ اول و قدرنسبت را به ترتیب a و r می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}a+ar=۴\\ ar^۲+ar^۳=۳۶\end{cases}\Rightarrow \frac{a(۱+r)}{ar^۲(۱+r)}=\frac{۴}{۳۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r^۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow r=\pm ۳$$

دنبالهٔ صعودی است، بنابراین $r=۳$ و $a=۱$ خواهد بود.

جملهٔ دهم این دنباله برابر است با: $a_{۱۰}=ar^۹=۱\times ۳^۹=۳^۹$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(الهام شیخ‌ممو)*

با جای‌گذاری مقدار عددی هر عبارت، خواهیم داشت:

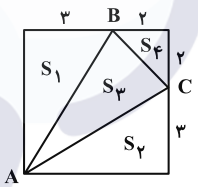
$$(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\text{اتحادمزدوج}} (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۲}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

همچنین $\sin^۲ ۳۰^\circ=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

مربع به ۴ قسمت تقسیم شده که مجموع مساحت آن‌ها $۵^۲$ است. داریم:



$$S_۱=\frac{۳\times۵}{۲}=۷/۵ \qquad S_۲=\frac{۳\times۵}{۲}=۷/۵$$

$$S_۴=\frac{۲\times۲}{۲}=۲$$

$$S_{کل}=S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$$

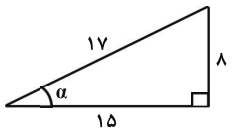
$$۲۵=۷/۵+۷/۵+۲+S_۳ \Rightarrow S_۳=۸$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول اضلاع AB و AC را می‌یابیم:

$$AB=AC=\sqrt{۳^۲+۵^۲}=\sqrt{۳۴}$$

$$S_۳=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin\alpha \Rightarrow \frac{۸}{۱۷}=\sin\alpha$$

با استفاده از مثلث کمکی زیر می‌توان $\cos\alpha$ را به راحتی یافت: $\cos\alpha=\frac{۱۵}{۱۷}$



در نتیجه: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۸}{۱۷}+\frac{۱۵}{۱۷}=\frac{۲۳}{۱۷}$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد منصوری)*

از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نتیجه می‌شود: $BC=۱۰$

از طرفی: $AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۶\times۸}{۱۰}=۴/۸$

پس در مثلث قائم‌الزاویه AHC طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$HC^۲=AC^۲-AH^۲=۸^۲-۴/۸^۲=۸^۲(\underbrace{۱^۲-(۰/۶)^۲}_{(۰/۸)^۲})$$

$$\Rightarrow HC=۸\times۰/۸=۶/۴$$

از طرفی $PH=\frac{AH}{۲}=۲/۴$، پس:

$$\cot\theta=\frac{PH}{HC}=\frac{۲/۴}{۶/۴}=\frac{۳}{۸}=۰/۳۷۵$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** (سینا خیرخواه)

P روی دایرهٔ مثلثاتی است $\Rightarrow \begin{cases} x_P = \cos\alpha = a \\ y_P = \sin\alpha = 3a-1 \end{cases}$

از طرفی : $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow (3a-1)^2+a^2=1$

$\Rightarrow 9a^2-6a+1+a^2=1 \Rightarrow 10a^2-6a=0$

$\Rightarrow a(10a-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \quad \text{غ ق ق} \\ a=\frac{3}{5} \end{cases}$

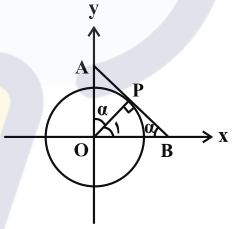
$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\frac{3}{5} \\ \sin\alpha=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{3}{4}$

در نتیجه: $\cot^2\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{9}{16}-\frac{5}{3}=-\frac{53}{48}$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** (روح‌اله حسنی)

در شکل زیر $\hat{O}_1+\hat{B}=90^\circ$ و $\hat{O}_1+\alpha=90^\circ$ پس $\hat{B}=\alpha$ و داریم:



$\overset{\Delta}{OAP}: \cos\alpha=\frac{OP}{OA}=\frac{1}{OA} \Rightarrow OA=\frac{1}{\cos\alpha}$

$\overset{\Delta}{OPB}: \sin\alpha=\frac{OP}{OB}=\frac{1}{OB} \Rightarrow OB=\frac{1}{\sin\alpha}$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$AB^2=OA^2+OB^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$=1+\tan^2\alpha+1+\cot^2\alpha=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2$

$\Rightarrow AB^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^2$

$\Rightarrow AB=\sqrt{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2}=|\tan\alpha+\cot\alpha|$

اما چون α زاویه‌ای حاده است پس $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ هر دو مثبت هستند و بنابراین: $AB=\tan\alpha+\cot\alpha$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ و ۴۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** (حامد معنوی)

توجه کنید که معادلهٔ خط ℓ_1 به صورت زیر به دست می‌آید:

$\begin{cases} m_{\ell_1}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-5 \\ C=(0,-5) \end{cases}$

دو خط ℓ_1 و ℓ_2 بر هم عمودند پس $m_{\ell_2}=\frac{-1}{m_{\ell_1}}=-\sqrt{3}$، بنابراین معادلهٔ خط ℓ_2 به صورت زیر به دست می‌آید:

$\begin{cases} m_{\ell_2}=-\sqrt{3} \\ (\sqrt{3},0) \end{cases} \Rightarrow y=-\sqrt{3}x+3 \xrightarrow{x=0} A(0,3)$

برای پیدا کردن طول نقطهٔ B (ارتفاع BH در مثلث ABC) طول نقطهٔ برخورد دو خط ℓ_1 و ℓ_2 را به دست می‌آوریم:

$\frac{\sqrt{3}}{3}x-5=-\sqrt{3}x+3 \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{3}x=8 \Rightarrow x=2\sqrt{3}$

در نتیجه:

$S_{ABC}=\frac{AC\times BH}{2}=\frac{(y_A-y_C)\times x_B}{2}=\frac{8\times 2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴- **گزینهٔ «۱»** (حمید علیزاده)

در عبارت فوق از اتحاد $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ استفاده می‌کنیم:

$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x+2}$

$=\frac{\sin^2 x(1-\sin x)+\cos^2 x(1-\cos x)}{\sin x+\cos x+2}$

$=\frac{(1-\cos^2 x)(1-\sin x)+(1-\sin^2 x)(1-\cos x)}{\sin x+\cos x+2}$

$=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\sin x)+(1-\sin x)(1+\sin x)(1-\cos x)}{\sin x+\cos x+2}$

$=\frac{(1-\cos x)(1-\sin x)(1+\cos x+1+\sin x)}{(\sin x+\cos x+2)}$

$=(1-\cos x)(1-\sin x)$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۵- **گزینهٔ «۱»** (فاطمه صدیقی)

عبارت A را ساده می‌کنیم:

$A=2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+5=2\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)+5$

$=3\cos^2\alpha+4$

می‌دانیم: $0 \le \cos^2\alpha \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2\alpha \le 3 \Rightarrow 4 \le A \le 7$

$\Rightarrow \min(A) = 4 = a$

$$B = \frac{5-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}} B = \frac{5-\tan^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$= 5\cos^2\alpha - \cos^2\alpha.\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 5\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 5\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 6\cos^2\alpha - 1$$

می‌دانیم: $0 \le \cos^2\alpha \le 1 \Rightarrow 0 \le 6\cos^2\alpha \le 6 \Rightarrow -1 \le B \le 5$

ولی $B = -1$ قابل قبول نیست زیرا به ازای $\cos\alpha = 0$ به دست آمده که در آن صورت $\tan\alpha$ تعریف نشده خواهد بود، پس $-1 < B \le 5$ حدود قابل قبول برای B است و داریم:

$$\max(B) = 5 = b \Rightarrow a - b = 4 - 5 = -1$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۵)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

$$\sqrt[a-2]{\sqrt[a+1]{8}\times 2} = \sqrt[(a-2)(a+1)]{2^3\times 2^{a+1}} = \sqrt[a^2-a-2]{2^{a+4}} = 2^{\frac{a+4}{a^2-a-2}}$$

از طرفی: $\sqrt[8]{16} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{a+4}{a^2-a-2}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{a+4}{a^2-a-2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2a+8 = a^2-a-2 \Rightarrow a^2-3a-10 = 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 & \text{غ‌ق‌ق} \\ a=5 \end{cases}$$

عبارت مورد نظر برابر می‌شود با: $\sqrt[3]{\sqrt{5+11}} = \sqrt{\sqrt{16}} = 2$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

توجه کنید که مزدوج $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$، عبارت $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ است و داریم:

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 12+2+4\sqrt{6} = 14+4\sqrt{6} = 2(7+2\sqrt{6})$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{12-2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$$

$$= \sqrt{5}\times\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^2\times 2} = \sqrt[4]{50}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

فرض مسئله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A = \frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})(2^{\frac{5}{4}}+2^{\frac{1}{4}})}{3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt{2}\times 2^{\frac{1}{4}}(2^1+1)}{5\sqrt[3]{2}} = 3\times 2^{\frac{5}{12}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{3} = 2^{\frac{5}{12}} \Rightarrow (\frac{A}{3})^{24} = 2^{10}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۱)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمد موسوی)*

داریم:

$$4x^4-17x^2y^2+4y^4 = (4x^4-x^2y^2)-(16x^2y^2-4y^4)$$

$$= x^2(4x^2-y^2)-4y^2(4x^2-y^2) = (x^2-4y^2)(4x^2-y^2)$$

$$= (x-2y)(x+2y)(2x-y)(2x+y)$$

به جز گزینهٔ «۲»، بقیهٔ گزینه‌ها، در تجزیهٔ عبارت مذکور قرار دارند.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

قرار می‌دهیم $a = \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$ و $b = \sqrt[3]{5-\sqrt{17}}$، بنابراین:

$$\begin{cases} ab = \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} = \sqrt[3]{5^2-(\sqrt{17})^2} = \sqrt[3]{8} = 2 \\ a^3-b^3 = (5+\sqrt{17})-(5-\sqrt{17}) = 2\sqrt{17} \end{cases}$$

از طرفی داریم $x = a-b$، پس می‌توان نوشت:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$$

$$\Rightarrow x^3 = 2\sqrt{17}-3(2)x \Rightarrow x^3+6x = 2\sqrt{17}$$

$$\Rightarrow (x^3+6x)^2 = (2\sqrt{17})^2 = 68 \Rightarrow x^6+12x^4+36x^2 = 68$$

$$\Rightarrow x^6+12x^4+36x^2-4 = 64$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^6+12x^4+36x^2-4} = 8$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمد موسوی)*

اگر ریشهٔ یکسان را x_0 در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} x_0^2+4x_0+m+1=0 \\ x_0^2+(m+3)x_0+2=0 \end{cases}$$

از تفاضل دو معادله به دست می‌آوریم: $(1-m)x_0+m-1=0$

و از آنجا (*) $(m-1)(1-x_0)=0$.

اگر $m=1$ باشد، معادلات داده شده، هر دو به $x^2+4x+2=0$ تبدیل می‌شوند. لذا از متمایز بودن معادلات داده شده باید $m\neq 1$ باشد. بنابراین از معادلهٔ (*) نتیجه می‌گیریم که $x_0=1$. با جای‌گذاری $x_0=1$ در معادلهٔ اول به دست می‌آوریم: $1+m+1+4+m=0$ و از آنجا $m=-6$.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

معادلهٔ $x^2-(m+3)x-2m^2+3m+2=0$ را به روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta=(m+3)^2-4(-2m^2+3m+2)$$
$$=m^2+6m+9+8m^2-12m-8$$
$$=9m^2-6m+1=(3m-1)^2$$

بنابراین: $x_{1,2}=\dfrac{(m+3)\pm(3m-1)}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3+3m-1}{2}=\dfrac{4m+2}{2}=2m+1 \\ \dfrac{m+3-3m+1}{2}=\dfrac{-2m+4}{2}=-m+2 \end{cases}$$

چون ریشه‌های این معادله عددی طبیعی‌اند، پس $2m+1>0$ و $-m+2>0$ و بنابراین: $m<2\ ,\ m>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<m<2$

چون $(-m+2)$ عددی صحیح است، پس m نیز عددی صحیح خواهد بود. بنابراین $m=0$ یا $m=1$. اگر $m=0$ باشد آنگاه $-m+2=2$ و $2m+1=1$ که متوالی و غیرقابل قبول هستند. اما اگر $m=1$ آنگاه $-m+2=1$ و $2m+1=3$. پس باید $m=1$ باشد. اکنون این مقدار را در معادلهٔ درجهٔ دوم بعدی جای‌گذاری می‌کنیم:

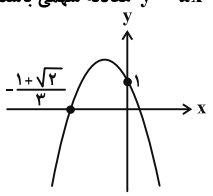
$$(1-5)x^2+2(1+2)x+1+9=0\Rightarrow -4x^2+6x+10=0$$
$$\Rightarrow 4x^2-6x-10=0\Rightarrow (4x-10)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\dfrac{10}{4}=2/5 \end{cases}$$

بنابراین $x=2/5$ ریشهٔ غیرصحیح معادلهٔ دوم است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

فرض کنیم $y=ax^2+bx+c$ معادلهٔ سهمی باشد.



چون سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است پس $c=1$. بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=ax^2+bx+1$ است.

چون $x=-\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$، طول نقطهٔ برخورد سهمی با محور طول‌ها است پس ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+1=0$ است. از طرفی داریم:

$$x=-\frac{1+\sqrt{2}}{3}\Rightarrow 3x=-1-\sqrt{2}\Rightarrow 3x+1=-\sqrt{2}$$
$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}^2]{\text{طرفین را به توان}} (3x+1)^2=(-\sqrt{2})^2$$
$$\Rightarrow 9x^2+6x+1=2\Rightarrow 9x^2+6x-1=0$$
$$\xrightarrow{\times(-1)} -9x^2-6x+1=0$$

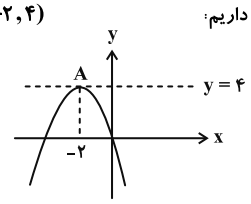
پس $b=-6$ و $a=-9$، اما چون $S(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a})$ بنابراین:

$$x_S+y_S=-\frac{b}{2a}-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-6}{2(-9)}-\frac{(-6)^2-4(-9)(1)}{4(-9)}$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{72}{36}=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا نیازی)*

روش اول: طبق فرض داریم: $A(-2,4)$: رأس سهمی



$$y(0)=0\Rightarrow c=0$$
$$-\frac{b}{2a}=-2\Rightarrow b=4a \qquad (1)$$
$$y(-2)=4\Rightarrow 4a-2b=4\xrightarrow{(1)} b-2b=4\Rightarrow b=-4\ ,\ a=-1$$
$$y=-x^2-4x\Rightarrow -x^2-4x>-x\Rightarrow x^2+3x<0$$
$$\Rightarrow -3<x<0\Rightarrow \text{طول بازه}=3$$

روش دوم: معادلهٔ سهمی که رأس آن (h,k) می‌باشد به صورت $y=a(x-h)^2+k$ است.

$$\text{رأس: } (-2,4)\Rightarrow y=a(x+2)^2+4$$
$$y(0)=0\Rightarrow a=-1$$
$$y=-(x+2)^2+4=-x^2-4x$$

مابقی راه‌حل، مانند روش اول است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(سامان سلامیان)*

$$\sqrt{3x+4} > 2|x-1|$$

$$3x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+4 > 4(x-1)^2 \Rightarrow 3x+4 > 4x^2-8x+4$$

$$4x^2-11x<0 \Rightarrow x(4x-11)<0$$

$$\Rightarrow 0<x<\frac{11}{4} \Rightarrow \text{وسط بازه} = \frac{0+\frac{11}{4}}{2} = \frac{11}{8}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۳)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(فاطمه صدیقی)*

ابتدا مخرج را باز می‌کنیم: $x^3+x^2-ax^2+x-ax-a$

حال به این صورت دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(x^3-ax^2)+(x^2-ax)+(x-a)$$

$$=x^2(x-a)+x(x-a)+(x-a)=(x-a)(x^2+x+1)$$

عبارت (x^2+x+1) همواره مثبت است و در تعیین علامت تاثیری ندارد.

به ازای عبارت $(x-a)$ عبارت $|a-x|$ را در صورت داریم. پس باید علامت f در نقطهٔ $x=a$ تغییر کند. با توجه به جدول، تنها نقطه‌ای که تابع در آن تغییر علامت داده، $x=5$ می‌باشد. پس $a=5$

عبارت $(4x^2-b)^2$ دو ریشهٔ قرینهٔ هم دارد که تابع در این دو نقطه تغییر علامت نمی‌دهد. پس: $c=-6 \Rightarrow (4(6)^2-b)^2=0 \Rightarrow b=144$

در این صورت داریم: $\frac{b}{ac} = \frac{144}{5(-6)} = -\frac{24}{5} = -4/8$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

$$\left|\frac{x+3}{ax+5}\right|<1 \Rightarrow \frac{|x+3|}{|ax+5|}<1 \xrightarrow{\times|ax+5|>0} |x+3|<|ax+5|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+6x+9<a^2x^2+10ax+25$$

$$\Rightarrow (a^2-1)x^2+x(10a-6)+16>0$$

با توجه به جواب نامعادله می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در نامعادلهٔ اخیر، عبارت از درجهٔ ۲ نیست (چرا؟)، پس: $a^2-1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow 4x+16>0 \Rightarrow x>-4 \Rightarrow (-4,+\infty) \Rightarrow b=-4 \\ a=-1 \Rightarrow -16x+16>0 \Rightarrow x<1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab=-4$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(سیرمحمد موسوی)*

از ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$، x را برحسب $f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$xf(x)-3f(x)=x+3 \Rightarrow x(f(x)-1)=3f(x)+3$$

$$\Rightarrow x=\frac{3f(x)+3}{f(x)-1}$$

حال داریم:

$$f(3x)=\frac{3x+3}{3x-3}=\frac{x+1}{x-1}=\frac{\frac{3f(x)+3}{f(x)-1}+1}{\frac{3f(x)+3}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{\frac{3f(x)+3+f(x)-1}{f(x)-1}}{\frac{3f(x)+3-f(x)+1}{f(x)-1}}=\frac{4f(x)+2}{2f(x)+4}=\frac{2f(x)+1}{f(x)+2}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(الهام شیخ‌ممو)*

با توجه به این‌که f تابعی خطی است، پس شیب خط واصل بین هر دو نقطه‌ای از آن، با هم برابر است.

$$\frac{m-0}{1-2}=\frac{-8-0}{m-2} \Rightarrow m(m-2)=8$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2-2m-8}_{(m-4)(m+2)}=0 \Rightarrow m=4,-2$$

در نتیجه مجموع مقادیر m برابر $2-2=4$ است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۰۳)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$0<\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-(x+3)}{x^2-9} \Rightarrow 0<\frac{-3}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow -3<x<3 \Rightarrow 0 \leq |x|<3 \Rightarrow 1 \leq 2|x|+1<7$$

مجموع مقادیر صحیح برد $f = 1+2+\ldots+6 = \frac{6\times 7}{2} = 21$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱- **گزینهٔ «۱»** (احمد حسن‌زاده‌فرد)

$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]\xrightarrow{S_n>400}$$

$$\frac{n}{2}[2\times4+(n-1)8]>400\Rightarrow n[8+8n-8]>800$$

$$\Rightarrow 8n^2>800\Rightarrow n^2>100\Rightarrow n>10\Rightarrow \min(n)=11$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ و ۳)

۲- **گزینهٔ «۳»** (علی آزاد)

با توجه به این‌که جمع دو جمله برابر با $\frac{8}{3}$ و ضرب آن‌ها برابر با $\frac{4}{3}$ شده است بنابراین با حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=0$ می‌توان جملات t_1 و t_2 را که ریشه‌های این معادله هستند به دست آورد.

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=0\xrightarrow{\times3}3x^2-8x+4=0\Rightarrow\Delta=16$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\pm4}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\Rightarrow t_1=\frac{2}{3}\\ x_2=2\end{cases},\ t_2=2\Rightarrow q=3$$

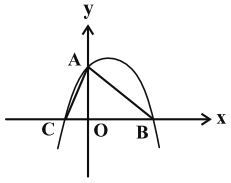
$$S_5=\frac{\frac{2}{3}(1-3^5)}{1-3}=-\frac{1}{3}(1-3^5)=-\frac{1}{3}+3^4$$

$$=-\frac{1}{3}+81=\frac{242}{3}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۴ تا ۹)

۳- **گزینهٔ «۲»** (محمد زنگنه)

محل تقاطع تابع با محور yها برابر با $2m$ و فرض کنیم صفرهای آن α و β هستند به‌طوری که $\alpha\beta=-2m$ و چون یکی از ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+6x+2m=0$ مثبت و دیگری منفی است پس $\alpha\beta<0$ و در نتیجه $m>0$، چون مثلث در رأس A قائمه است پس:



$$OA^2=BO\times CO$$

$$(2m)^2=|\alpha|\times\beta\xrightarrow{\alpha<0}4m^2=-\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 4m^2=-\frac{c}{a}\xrightarrow[a=-1]{c=2m}4m^2=2m$$

$$\Rightarrow 2m(2m-1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$$

فقط مقدار $m=\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۴- **گزینهٔ «۴»** (علی آزاد)

با توجه به معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ خواهیم داشت: $S=\alpha+\beta=3$

از آنجا که α و β ریشه‌های معادلهٔ داده شده هستند بنابراین در خود معادله نیز صدق می‌کنند:

$$x^2-3x+1=0\xrightarrow{x=\beta}\beta^2-3\beta+1=0\Rightarrow\beta^2+1=3\beta$$

$$\Rightarrow\frac{\beta^2+1}{3}=\beta$$

$$\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^2-3\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow\alpha(\alpha-3)=-1\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3-\alpha}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{3-\alpha}+\frac{\beta^2+1}{3}=\alpha+\beta=S=3$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۵- **گزینهٔ «۴»** (علی آزاد)

ابتدا به وسیلهٔ تغییر متغیر، معادلهٔ داده شده را به معادلهٔ درجهٔ ۲ تبدیل می‌کنیم.

$$x^6-7x^3+8=0\xrightarrow{x^3=t}t^2-7t+8=0$$

با توجه به این‌که $\Delta>0$ می‌باشد فرض می‌کنیم ریشه‌های معادلهٔ $t^2-7t+8=0$ به صورت α' و β' باشند پس داریم:

$$\alpha'+\beta'=7\quad,\quad\alpha'\beta'=8$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x^3=t\Rightarrow\begin{cases}\alpha'=\alpha^3\\ \beta'=\beta^3\end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{cases}\alpha^3\beta^3=8\quad(*)\Rightarrow\alpha\beta=2\\ \alpha^3+\beta^3=7\xrightarrow{\text{توان }2}\alpha^6+\beta^6+2\alpha^3\beta^3=49\\ \xrightarrow{(*)}\alpha^6+\beta^6=33\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^6+\beta^6}{\alpha\beta}=\frac{33}{2}=16/5$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۶- **گزینهٔ «۳»** (احمدرضا ذاکرزراده)

با توجه به فرض سؤال، نتیجه می‌شود که ضابطهٔ تابع به صورت $y=(x-2)^2$ یا $y=-(x-2)^2$ است و با توجه به ضابطهٔ داده شده، فقط $y=(x-2)^2$ قابل قبول است و داریم:

$$(x+2a)^2-4x+b=(x-2)^2$$
$$x^2+4ax+4a^2-4x+b=x^2-4x+4$$
$$x^2+(4a-4)x+4a^2+b=x^2-4x+4$$
$$\Rightarrow\begin{cases}4a-4=-4\Rightarrow a=0\\4a^2+b=4\Rightarrow b=4\end{cases}$$
$$g(x)=4x-f(x)=4x-(x^2-4x+4)=-x^2+8x-4$$

چون $\Delta=64-16>0$ است، پس داریم:

$$S=-\frac{b}{a}=8 \qquad P=\frac{c}{a}=4$$
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S}{P}=\frac{8}{4}=2$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(حامد معنوی)*

معادلهٔ فرض سؤال به صورت زیر است:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{a+1}{3(x+2)}=\frac{a}{x}$$

دو طرف معادله را در $(x-2)(x+2)(3x)$ ضرب می‌کنیم:

$$3x+(a+1)(x^2-2x)=3a(x^2-4)$$
$$\Rightarrow(2a-1)x^2+(2a-1)x-12a=0 \qquad (*)$$

برای این‌که معادله فرض سؤال، یک جواب داشته باشد، دو حالت برای (*) در نظر می‌گیریم:

حالت اول: معادلهٔ درجه دوم (*)، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta=(2a-1)^2-4(2a-1)(-12a)=0$$
$$\Rightarrow(2a-1)(2a-1+48a)=0\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2} & \text{غ ق ق}\\ a=\frac{1}{50} & \text{ق ق}\end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $a=\frac{1}{2}$، معادله (*) بی‌معنی خواهد بود!

حالت دوم: معادلهٔ درجهٔ دوم (*)، دو ریشهٔ ساده داشته باشد که یکی از آن‌ها در بین ریشه‌های مخرج‌های معادلهٔ فرض سؤال باشد:

$$x=0\xrightarrow{(*)}a=0\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (*)}}-x^2-x=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق}\\ x=-1 & \text{ق ق}\end{cases}$$
$$x=2\xrightarrow{(*)}(2a-1)(4)+(2a-1)(2)-12a=0\Rightarrow -6=0 \quad \text{غیرممکن}$$
$$x=-2\xrightarrow{(*)}(2a-1)(4)+(2a-1)(-2)-12a=0\Rightarrow -8a=2$$
$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (*)}}-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+3=0$$
$$\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1 & \text{ق ق}\\ x=-2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس مقادیر $\frac{1}{50}$، صفر و $-\frac{1}{4}$ برای a قابل قبول است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(جوانبخش نیکنام)*

$$-\sqrt{2x-1}=t\xrightarrow{t<0}2x-1=t^2\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}$$
$$(3+t)(\frac{t^2+3}{2})+\frac{19}{2}=0\Rightarrow(t+3)(t^2+3)+19=0$$
$$\Rightarrow t^3+3t^2+3t+9+19=0\Rightarrow(t+1)^3+27=0$$
$$\Rightarrow t+1=-3\Rightarrow t=-4\Rightarrow\sqrt{2x-1}=4\Rightarrow 2x-1=16$$
$$\Rightarrow x=\frac{17}{2}=8/5$$

می‌دانیم $9>8/5>8$ و در نتیجه جواب سؤال $17=9+8$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

از $|t|=-t$ نتیجه می‌شود که $t\le 0$. پس داریم:

$$|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5\xrightarrow{x^2-6x+5=t}x^2-6x+5\le 0$$
$$\Rightarrow 1\le x\le 5$$

همچنین برای نامعادله داریم:

$$|x-a|\le b\Rightarrow -b\le x-a\le b\Rightarrow a-b\le x\le a+b$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=1\\a+b=5\end{cases}\Rightarrow a=3\ ,\ b=2\Rightarrow ab=6$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا نیازی)*

دو خط L و L' موازی‌اند زیرا شیب‌های برابر دارند در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها برای اندازهٔ یک ضلع مستطیل است.

$$L: y=2x+\frac{3}{2}\quad ,\quad L': y=2x$$
$$\text{فاصلهٔ } L' \text{ و } L=\frac{|\frac{3}{2}-0|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$$
$$\begin{cases}L': y=2x\\L'': y=4x\end{cases}\Rightarrow x=0=y\Rightarrow\begin{cases}L: 4x-2y+3=0\\L'': y-4x=0\end{cases}$$
$$-y+3=0\Rightarrow y=3\ ,\ x=\frac{3}{4}$$

دو رأس مقابل مستطیل $(0,0)$ و $(3,\frac{3}{4})$ می‌باشند.

$$\text{طول قطر}=\sqrt{(\frac{3}{4})^2+(3)^2}=\sqrt{9(\frac{17}{16})}=\frac{3}{4}\sqrt{17}$$
$$\Rightarrow \text{اندازه ضلع دیگر مستطیل}=\sqrt{(\frac{3}{4}\sqrt{17})^2-(\frac{3}{2\sqrt{5}})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{729}{80}}=\frac{27}{4\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل}=\frac{27}{4\sqrt{5}}\times\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{81}{40}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تن‌آرا)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) با فرض $x=1$ داریم: $y^2=1+1=2\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

پس تابع نیست.

۲) با فرض $x=-1$ داریم: $|y|=|-1|-(-1)=2\Rightarrow y=\pm 2$

پس تابع نیست.

۳) چون زیر هر دو رادیکال باید عددی نامنفی باشد لذا مقدار x فقط می‌تواند صفر باشد. $x=0\Rightarrow y^2=\sqrt{0}+\sqrt{0}=0\Rightarrow y=0$

پس این گزینه یک تابع را مشخص می‌کند که فقط یک زوج مرتب دارد.

۴) با فرض $x=64$ داریم:

$$|y|=\sqrt{64}-\sqrt[3]{64}=8-4=4\Rightarrow y=\pm 4$$

پس تابع نیست.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحهٔ ۴۸)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(رضا ماجدی)*

برای این‌که دامنهٔ تابع $f(x)$، مجموعه اعداد حقیقی باشد، باید زیر رادیکال به ازای هر x، نامنفی باشد. از آنجایی که برد توابع درجه سوم، همواره $\mathbb{R}$ می‌باشد، در نتیجه نباید زیر رادیکال، تابع درجه سوم داشته باشیم، پس ضریب x^3، برابر با صفر خواهد بود: $2a-b=0\Rightarrow 2a=b$

حال یک تابع درجه دوم زیر رادیکال داریم که باید به ازای هر x، نامنفی باشد، پس:

(الف) باید ضریب x^2 مثبت باشد $\Rightarrow -2b>0\Rightarrow b<0$

(ب) $\Delta\le 0\Rightarrow a^2+8b\le 0\xrightarrow{2a=b}a^2+16a\le 0\Rightarrow a(a+16)\le 0$

$\Rightarrow a\in[-16,0]\Rightarrow$ کمترین مقدار a برابر با ۱۶- است.

$\Rightarrow b=2a=-32\Rightarrow a+b=-48$

بنابراین کمترین مقدار ممکن برای $a+b$ برابر با ۴۸- است.

توجه: اگر ضریب x^2 برابر صفر باشد، آنگاه $a=b=0$ خواهد بود و f تابع ثابت $y=1$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌شود که در آن $a+b=0$ کمترین مقدار ممکن نخواهد بود.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

$$D_f=D_{2f}=\{-1,3,-2,1\}=D_{2f+1}$$

$$D_g=[-2,2]$$

حال باید $D_g\cap D_{2f+1}$ را در نظر بگیریم و مراقب باشیم که $g(x)\neq 0$، پس:

$$\frac{2f+1}{g}=\{(-1,\frac{2\times 2+1}{\sqrt{3}}),(1,\frac{2\times 3+1}{\sqrt{3}})$$

$$=\{(-1,\frac{5}{\sqrt{3}}),(1,\frac{7}{\sqrt{3}})\}$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(رضا ماجدی)*

راه‌حل اول: سعی می‌کنیم مقدار x را برحسب y پیدا کنیم:

$$y=\underbrace{\sqrt{5x+3}}_{a}+\underbrace{\sqrt{5x-1}}_{b}\qquad (I)$$

$$\Rightarrow(\sqrt{5x+3}+\sqrt{5x-1})(\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-1})$$

$$=(\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-1})y$$

$$\Rightarrow 5x+3-(5x-1)=(\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-1})y$$

$$\Rightarrow\sqrt{5x+3}-\sqrt{5x-1}=\frac{4}{y}\qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)}2\sqrt{5x+3}=y+\frac{4}{y}\Rightarrow\sqrt{5x+3}=\frac{y}{2}+\frac{2}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}5x+3=\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}+2$$

$$\Rightarrow 5x=\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}-1\Rightarrow x=(\frac{y^2}{4}+\frac{4}{y^2}-1)\times\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2}{20}+\frac{4}{5x^2}-\frac{1}{5}\Rightarrow a=20,b=5\Rightarrow ab=100$$

راه‌حل دوم:

$$y=\sqrt{5x+3}+\sqrt{5x-1}\Rightarrow y-\sqrt{5x-1}=\sqrt{5x+3}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}y^2-2y\sqrt{5x-1}+5x-1=5x+3$$

$$\Rightarrow y^2-4=2y\sqrt{5x-1}\Rightarrow\frac{y}{2}-\frac{2}{y}=\sqrt{5x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{y^2}{4}-2+\frac{4}{y^2}=5x-1\Rightarrow\frac{y^2}{20}+\frac{4}{5y^2}-\frac{1}{5}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2}{20}+\frac{4}{5x^2}-\frac{1}{5}$$

بنابراین: $b=5\ ,\ a=20\Rightarrow ab=100$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(کیان کریمی‌فراسانی)*

اگر طول رأس سهمی درون دامنهٔ تابع به صورت بازهٔ (m,n) باشد، آن‌گاه تابع یک به یک نمی‌شود. پس با شرط زیر، تابع یک به یک نیست:

$x_S = a \in (2a-5 , 3a-8) \Rightarrow 2a-5 < a < 3a-8$

$\Rightarrow 4 < a < 5 \Rightarrow a \in (4 , 5)$

بنابراین جواب مسئله، مکمل بازهٔ فوق می‌شود، یعنی $\mathbb{R} - (4 , 5)$. (I)

همچنین باید $2a-5 < 3a-8$ برقرار باشد که در این صورت داریم $a > 3$. (II)

جواب نهایی: $\xrightarrow{I \cap II} (3 , 4] \cup [5 , +\infty)$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۶- **گزینهٔ «۲»** (حامد معنوی)

توجه کنید که: $[x]-2 > 0 \Rightarrow [x] > 2 \Rightarrow x \in [3 , +\infty)$

$\Rightarrow D_f = [3 , +\infty) \quad , \quad f(3/6) = \sqrt{\frac{1}{[3/6]-2}} = 1$

با توجه به D_f و این‌که $D_f = D_g$ واضح است که $a = 0$ و $g(3) = 0$ (چرا؟)، پس:

$\Rightarrow g(x) = \sqrt{bx-5} \Rightarrow g(3) = 3b-5 = 0 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow g(x) = \sqrt{\frac{5}{3}x-5} \Rightarrow g(3/6) = \sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{36}{10} - 5} = 1$

$(f+g)(3/6) = f(3/6) + g(3/6) = 1+1 = 2$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۵۳ و ۶۳ تا ۶۶)

۷- **گزینهٔ «۲»** (یاسین کشاورزی هرات)

می‌دانیم که $(f^{-1}of)(x) = x$ و $x \in D_f$. همچنین $(fof^{-1})(x) = x$ و $x \in R_f$. بنابراین باید دامنه و برد f را به دست آوریم و دامنه و برد f تنها یک عضو مشترک داشته باشند:

$D_f : x-b \geq 0 \Rightarrow x \geq b \Rightarrow [b , +\infty)$

$\sqrt{x-b} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-b} \leq 0$

$\Rightarrow -\sqrt{x-b} + a \leq a \Rightarrow R_f = (-\infty , a]$

برای این‌که دامنه و برد f تنها یک عضو مشترک داشته باشند باید $a = b$ باشد. پس:

$D_f \cap R_f = \{a\} \quad , \quad y = (fof^{-1})(x) + (f^{-1}of)(x) = 2x \Rightarrow \{(a , 2a)\}$

$\{(a , 2a)\} = \{(1 , c)\} \Rightarrow a = 1 , b = 1 , c = 2 \Rightarrow a+b+c = 4$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۷۰)

۸- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا نداف‌زاده)

با توجه به فرض داریم:

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} \\ g(x) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 7x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{14} & \text{ق ق} \\ 3x-4 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$g(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} 7x-1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{21} & \text{ق ق} \\ 3x-4 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{11}{9} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس تابع ۲ تا صفر دارد.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۹- **گزینهٔ «۱»** (احمدرضا ذاکرزاده)

اگر تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، $(c , d \neq 0)$ غیر یک‌به‌یک باشد باید $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$، پس داریم: $\frac{2a-1}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a-2 = 2a \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow g(x) = \frac{2x+1}{x+1} \Rightarrow yx+y = 2x+1 \Rightarrow yx-2x = 1-y$

$x(y-2) = 1-y \Rightarrow x = \frac{1-y}{y-2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1-x}{x-2}$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

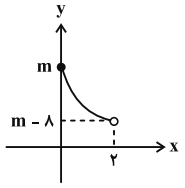
۱۰- **گزینهٔ «۴»** (غلامرضا نیازی)

ابتدا برد تابع g را به دست می‌آوریم و سپس برد تابع $y = 2x^2 - 8x + m$ را به ازای $x \in R_g$ به دست می‌آوریم:

می‌دانیم: $0 \leq t - [t] < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] < 1$

$\xrightarrow{\times 2} 0 \leq x - 2[\frac{x}{2}] < 2 \Rightarrow 0 \leq g(x) < 2 \Rightarrow R_g = [0 , 2)$

حال $y = f(x)$ را در بازهٔ $[0 , 2)$ رسم می‌کنیم.



پس برد تابع f برابر $(m-8 , m]$ است. بنابراین:

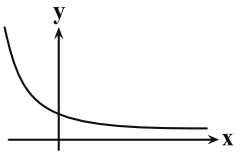
$$\begin{cases} a = m-8 \\ b = m \end{cases} \Rightarrow b-a = 8$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲ و ۶۶ تا ۶۸)

۱- **گزینهٔ «۲»** (حامد قاسمیان)

در تابع نمایی $y=a^x$ مطابق شکل زیر به ازای $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقادیر آن کاهش می‌یابد، بنابراین ویژگی ذکر شده در صورت سؤال مربوط به حالت $0<a<1$ می‌باشد.

$0<a<1$:



$$0<\frac{4m-2}{12m-3}<1\Rightarrow$$

(الف $0<\frac{4m-2}{12m-3}\Rightarrow m\in(-\infty,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ (۱)

(ب $\frac{4m-2}{12m-3}<1\Rightarrow\frac{4m-2}{12m-3}-1<0\Rightarrow\frac{-8m+1}{12m-3}<0$

$$\Rightarrow m\in(-\infty,\frac{1}{8})\cup(\frac{1}{4},+\infty)\qquad(2)$$

$$\text{اشتراک (۱), (۲)}\Rightarrow(-\infty,\frac{1}{8})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$$

$$\Rightarrow m\in\mathbb{R}-[\frac{1}{8},\frac{1}{2}]\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{8}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a+b=\frac{3}{4}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۲- **گزینهٔ «۴»** (احمد حسن‌زاده‌فرد)

می‌دانیم که نیمه‌عمر به مدت زمانی گفته می‌شود که مادهٔ پرتوزا به نصف مقدار اولیه خود کاهش می‌یابد.

$$m(t)=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{48}}(256)\Rightarrow m(144)=(\frac{1}{2})^{\frac{144}{48}}(256)$$

$$\Rightarrow m(144)=\frac{1}{8}(256)=32gr$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحهٔ ۷۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** (غلامرضا نیازی)

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\begin{cases}f(0)=k+b=y_A\\ f(x)=ka^{\frac{x}{2}}+b\Rightarrow y_B=0+b=b\end{cases}$$

طبق فرض : $y_A=-y_B\Rightarrow k+b=-b\Rightarrow k=-2b$ (۱)

$$f(-1)=0\Rightarrow k(a^{\frac{-1}{2}})+b=0\Rightarrow\frac{k}{\sqrt{a}}=-b$$

$$\xrightarrow{(1)}\frac{-2b}{\sqrt{a}}=-b\Rightarrow a=4$$

$$f(0)=k+b=-b\Rightarrow b<0\ ,\ k>0$$

$$A(0,-b)\ ,\ C(-1,0)\Rightarrow AC=\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{1+b^2}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow b^2=4\Rightarrow\begin{cases}b=-2 & \text{ق ق}\\ b=2 & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$a+b=4-2=2$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۹)

۴- **گزینهٔ «۳»** (حامد معنوی)

ابتدا توجه کنید که: $a(2)+b=0\Rightarrow 2a+b=0$ (۱)

از طرفی:

$$f(7)=1+\log_5^{(b+9)}$$

$$\Rightarrow\log_5^{(7a+b)}=1+\log_5^{(b+9)}$$

$$\Rightarrow\log_5^{(7a+b)}=\log_5^{5b+45}$$

$$\Rightarrow 7a+b=5b+45\Rightarrow 7a-4b=45\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}2a+b=0\\ 7a-4b=45\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-6\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\log_5^{(3x-6)}\Rightarrow f(\frac{31}{3})=\log_5^{(3\times\frac{31}{3}-6)}$$

$$=\log_5^{25}=2$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۵- **گزینهٔ «۱»** (رضا جعفری)

از طرفین معادله، لگاریتم در مبنای ۱۰ می‌گیریم:

$$\log 2^{x+1}=\log 5^{x-1}\Rightarrow(x+1)\log 2=(x-1)\log 5$$

$$x\log 2+\log 2=x\log 5-\log 5$$

$$\Rightarrow x\log۲ - x\log۵ = -\log۲ - \log۵$$

$$\Rightarrow x(\log۲ - \log۵) = -(\log۲ + \log۵) = -\log۱۰$$

از طرفی: $$\Rightarrow x(\log۲ - \log۵) = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{\log۲ - \log۵}$$

از طرفی می‌دانیم: $$\log۵ = \log\frac{۱۰}{۲} = \log۱۰ - \log۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۱}{۲\log۲ - ۱} = \frac{-۱}{\log۴ - ۱} = \frac{۱}{۱ - \log۴}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد زنگنه)*

$$A = \log_۶^{(۱۱+۶\sqrt{۲})} + ۲\log_۶^{(۳-\sqrt{۲})}$$

$$= \log_۶^{(۱۱+۶\sqrt{۲})} + \log_۶^{(۳-\sqrt{۲})^۲}$$

$$= \log_۶^{(۱۱+۶\sqrt{۲})} + \log_۶^{(۱۱-۶\sqrt{۲})} = \log_۶^{(۱۲۱-۷۲)} = \log_۶^{۴۹}$$

$$۶^۲ < ۴۹ < ۶^۳ \Rightarrow ۲ < \log_۶^{۴۹} < ۳ \Rightarrow ۲ < A < ۳$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمد زنگنه)*

$$\log^{\sqrt[۵]{۶/۲۵}} = \frac{۱}{۵}\log^{\frac{۶۲۵}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۵}(\log۵^۴ - \log۱۰۰)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۴(۱ - \log۲) - ۲) = \frac{۴}{۵} - \frac{۴a}{۵} - \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}(۱ - ۲a)$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تن‌آرا)*

با توجه به تعریف f داریم:

$$f^{-۱}(x) = \log x \Rightarrow f^{-۱}(x+۳) = \log(x+۳)$$

از طرفی بنا بر خواص لگاریتم خواهیم داشت:

$$\log_{۱۰۰}^{x} = \log_{۱۰^۲}^{x} = \frac{۱}{۲}\log_{۱۰}^{x}$$

بنابراین معادله داده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\log(x+۳) + ۲(\frac{۱}{۲}\log x) = ۱ \Rightarrow \log x(x+۳) = ۱$$

$$\Rightarrow x(x+۳) = ۱۰ \Rightarrow \underbrace{x^۲ + ۳x - ۱۰}_{(x+۵)(x-۲)} = ۰ \Rightarrow x = ۲, -۵$$

در این معادله فقط جواب $x = ۲$ قابل قبول می‌باشد یعنی $a = ۲$. لذا:

$$\log_۲^{(۳-a)} = \log_۲^{(۳-۲)} = \log_۲^{۱} = ۰$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۱، ۸۶ و ۸۷)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

$$\log_۲^{(۱-x)} + \log_۲^{(x^۲+x+۱)} = \log_۲^{(۱-x)(x^۲+x+۱)} = \log_{۲^۲}^{۹}$$

$$\Rightarrow \log_۲^{۱-x^۳} = \log_۲^{۹} \Rightarrow ۱ - x^۳ = ۹ \Rightarrow x^۳ = -۸ \Rightarrow x = -۲$$

$x = -۲$ را در $\log_۹^{\frac{-x}{۲}}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log_{۳^۲}^{۳^۱} = \frac{۱}{۲}\log_۳^{۳} = \frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

$$\log_{\sqrt[۳]{۳}}^{x^۲} + \log_x^{۲۷} = \frac{۲}{\frac{۱}{۳}}\log_۳^{x} + ۳\log_x^{۳} = ۶\log_۳^{x} + ۳\log_x^{۳}$$

قرار می‌دهیم $y = \frac{۱}{x}$ پس $x = \frac{۱}{y}$ بنابراین عبارت بالا به‌صورت:

$$۶\log_۳^{\frac{۱}{y}} + ۳\log_{\frac{۱}{y}}^{۳} = ۶\log_۳^{y^{-۱}} + ۳\log_{y^{-۱}}^{۳}$$

$$= -۶\log_۳^{y} - ۳\log_y^{۳} = -(۶\log_۳^{y} + ۳\log_y^{۳})$$

با توجه به این‌که $۰ < x < ۱$ پس $y > ۱$ بنابراین $t = \log_۳^{y} > ۰$. پس

عبارت بالا به‌صورت $-(۶t + \frac{۳}{t}) = -۳(۲t + \frac{۱}{t})$ است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی $(a, b > ۰ \Rightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab})$

داریم:

$$۲t + \frac{۱}{t} \geq ۲\sqrt{(۲t)(\frac{۱}{t})} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow -۳(۲t + \frac{۱}{t}) \leq -۶\sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۱- **گزینهٔ «۲»** (مهسان کوررزی)

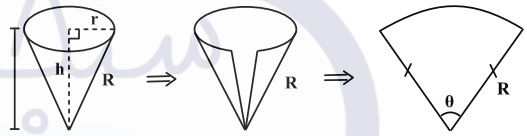
می‌دانیم که $\sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و انتهای کمان مربوط به زاویهٔ θ در ربع دوم است پس $\theta=۱۲۰^\circ$ است. حال آن را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$۱۲۰^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{۲\pi}{۳}=\frac{a\pi}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a+b=۵$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۵)

۲- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

اگر ارتفاع مخروط h و شعاع قاعدهٔ آن r باشد، طول شعاع قطاع حاصل از شکل گستردهٔ مخروط، برابر با اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول اضلاع زاویهٔ قائم h و r است. بنابراین: $R=\sqrt{r^۲+h^۲}$



طول کمان این قطاع برابر محیط قاعدهٔ مخروط $۲\pi r$ است. همچنین اگر θ (برحسب رادیان) زاویهٔ مرکزی این قطاع باشد، آن‌گاه:

$$\theta=\frac{۲\pi r}{R}=\frac{۲\pi r}{\sqrt{r^۲+h^۲}}$$

$$\theta=۲۱۶^\circ=\frac{۶\pi}{۵}\text{rad}\Rightarrow\frac{۶\pi}{۵}=\frac{۲\pi\times۱۲}{\sqrt{۱۲^۲+h^۲}}\Rightarrow\sqrt{h^۲+۱۴۴}=۲۰$$

$$\Rightarrow h^۲+۱۴۴=۴۰۰\Rightarrow h^۲=۲۵۶\Rightarrow h=۱۶$$

بنابراین: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi\times۱۲^۲\times۱۶=۷۶۸\pi$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحهٔ ۹۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** (امیرمهدی حقیقت‌پور)

می‌دانیم طول کمان از رابطهٔ $\ell=r\theta$ به دست می‌آید که در آن r شعاع و θ زاویه برحسب رادیان است. پس:

$$\frac{۳۶^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\theta}{\pi}\Rightarrow\theta=\frac{۳۶^\circ\times\pi}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi}{۵}\text{rad}$$

$$\ell=r\theta=۶۳۲۰\times\frac{\pi}{۵}=۱۲۶۴\pi\ (\text{km})$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحهٔ ۹۷)

۴- **گزینهٔ «۳»** (محمد کریمی)

A را می‌توان به صورت زیر، نیز نوشت:

$$A=\frac{\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۱۲})+\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲})}{\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۱۲})+\cos(\pi+\frac{\pi}{۱۲})}=\frac{\cos\frac{\pi}{۱۲}+\sin\frac{\pi}{۱۲}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}}$$

توجه داشته باشید که مقدار A منفی است. حال داریم:

$$A^۲=\frac{\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}}{\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}+\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}-۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}}$$

$$=\frac{۱+\sin\frac{\pi}{۶}}{۱-\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳\xrightarrow{A<۰}A=-\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۲)

۵- **گزینهٔ «۴»** (حامد معنوی)

توجه کنید که:

$$\cot۱۰۰^\circ=\cot(۹۰^\circ+۱۰^\circ)=-\tan۱۰^\circ$$

$$\cot۲۸۰^\circ=\cot(۲۷۰^\circ+۱۰^\circ)=-\tan۱۰^\circ$$

$$\tan۱۹۰^\circ=\tan(۱۸۰^\circ+۱۰^\circ)=\tan۱۰^\circ$$

$$\tan۸۰^\circ=\tan(۹۰^\circ-۱۰^\circ)=\cot۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{\cot۱۰۰^\circ+\cot۲۸۰^\circ}{\tan۱۹۰^\circ-\tan۸۰^\circ}=\frac{-\tan۱۰^\circ-\tan۱۰^\circ}{\tan۱۰^\circ-\cot۱۰^\circ}$$

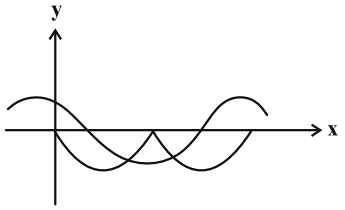
$$=\frac{-۲\tan۱۰^\circ}{\tan۱۰^\circ-\cot۱۰^\circ}\xrightarrow{\times(\sin۱۰^\circ\cos۱۰^\circ)}\frac{-۲\sin^۲۱۰^\circ}{\sin^۲۱۰^\circ-\cos^۲۱۰^\circ}$$

$$=\frac{-۲\sin^۲۱۰^\circ}{۲\sin^۲۱۰^\circ-۱}=\frac{-۲m^۲}{۲m^۲-۱}=\frac{۲m^۲}{۱-۲m^۲}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۶- **گزینهٔ «۲»** (افشین خاصه‌خان)

نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



نمودار توابع f و g در $[۰\ ,\ ۲\pi]$ همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحهٔ ۱۰۹)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(احمد حسن‌زاده‌فرد)*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=۳\sin\alpha\cos\beta-۳\cos\alpha\sin\beta$$

$$۴\cos\alpha\sin\beta=۲\sin\alpha\cos\beta\Rightarrow ۲\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cot\beta=۲\cot\alpha$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحهٔ ۱۱۱)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمد کریمی)*

عبارت مورد نظر برابر است با:

$$(\tan۱۵^\circ-\cot۱۵^\circ)(\tan۱۵^\circ+\cot۱۵^\circ)$$

$$=-۲\cot۳۰^\circ\times\frac{۲}{\sin۳۰^\circ}=-۲\sqrt{۳}\times۴=-۸\sqrt{۳}$$

توجه: طبق روابط مثلثاتی ۲α داریم:

$$۱)\ \tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=-\frac{\cos۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha}=-۲\cot۲\alpha$$

$$۲)\ \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha}=\frac{۲}{\sin۲\alpha}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(سینا خیرخواه)*

$$\frac{\sin^۳x+\cos^۳x}{\cos۲x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^۲x-\sin x\cos x+\cos^۲x)}{\cos^۲x-\sin^۲x}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{۱-\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}$$

از طرفی:

$$\sin x-\cos x=\frac{۵}{۴}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$\underbrace{\cos^۲x+\sin^۲x}_{۱}-۲\sin x\cos x=\frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow -۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{۹}{۳۲}$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\frac{۱+\frac{۹}{۳۲}}{-\frac{۵}{۴}}=-\frac{۴۱}{۴۰}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

نکته: سه جملهٔ متوالی a، b و c از یک دنبالهٔ حسابی در رابطهٔ $۲b=a+c$ صدق می‌کنند.

گام اول: با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{۲}{\cos x}=\frac{۱}{\cos(x-y)}+\frac{۱}{\cos(x+y)}=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\cos(x-y).\cos(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\cos x}=\frac{۲\cos x\cos y}{\cos^۲x\cos^۲y-\sin^۲x\sin^۲y}$$

$$\Rightarrow \cos^۲x.\cos y=\cos^۲x.\cos^۲y-(۱-\cos^۲x)\sin^۲y$$

$$\Rightarrow \cos^۲x.\cos y=\cos^۲x.\underbrace{(\cos^۲y+\sin^۲y)}_{۱}-\sin^۲y$$

$$\Rightarrow \cos^۲x.\underbrace{(۱-\cos y)}_{۲\sin^۲(\frac{y}{۲})}=\underbrace{\sin^۲y}_{۴\sin^۲(\frac{y}{۲})\cos^۲(\frac{y}{۲})}$$

$$\xrightarrow[y\neq ۲k\pi]{\sin\frac{y}{۲}\neq ۰}\cos^۲x=۲\cos^۲(\frac{y}{۲})$$

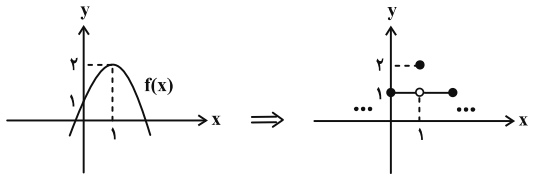
گام دوم: چون $۱+\tan^۲\frac{y}{۲}=\frac{۱}{\cos^۲\frac{y}{۲}}$ است، داریم:

$$\cos^۲x(۱+\tan^۲\frac{y}{۲})=۲\cos^۲(\frac{y}{۲})\times\frac{۱}{\cos^۲(\frac{y}{۲})}=۲$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱- **گزینهٔ «۱»** (احمد حسن‌زاده‌فرد)

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار: $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]=۱$

در نتیجه: $\dfrac{\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]}{[\lim\limits_{x\to ۱}f(x)]}=\dfrac{۱}{[۲]}=\dfrac{۱}{۲}=۰/۵$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۲۹)

۲- **گزینهٔ «۲»** (دانیال آرکیش)

می‌دانیم $\cos x$ در همسایگی $x=۰$ با مقادیر کمتر به عدد ۱ نزدیک می‌شود، پس داریم: $\lim\limits_{x\to ۰}f(\cos x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)$

لذا باید حد تابع $f(x)$ را به ازای $x\to ۱^-$ محاسبه کنیم. عبارت $(x-۱)(x+۱)$ به ازای $x\to ۱^-$ منفی می‌شود، لذا داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|(x-۱)(x+۱)|}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=-۲$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۳- **گزینهٔ «۱»** (حمید علیزاده)

با توجه به نمودار تابع f، حدهای چپ و راست تابع g در نقطهٔ $x=-۱$ به صورت زیر می‌شود:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}g(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-|f(x)|}{xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-(-f(x))}{xf(x)}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۲f(x)}{xf(x)}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}g(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-|f(x)|}{xf(x)}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-f(x)}{xf(x)}=۰$$

در نتیجه مجموع حد چپ و راست مورد نظر برابر می‌شود با:

$$-۲+۰=-۲$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۴- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

اگر $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=b$ باشد، طبق فرض داریم:

$$\lim_{x\to ۲}(۲f-۳g)(x)=۲\lim_{x\to ۲}f(x)-۳\lim_{x\to ۲}g(x)=۲a-۳b$$

$$\lim_{x\to ۲}(۳f+۲g)(x)=۳\lim_{x\to ۲}f(x)+۲\lim_{x\to ۲}g(x)=۳a+۲b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-۳b=۱۱\\ ۳a+۲b=۱۰\end{cases}\Rightarrow a=۴\ ,\ b=-۱$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{xf(x)+۴x-۲f(x)-۸}{xg(x)-x-۲g(x)+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)+۴)(x-۲)}{(g(x)-۱)(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۴}{g(x)-۱}$$

$$= \frac{a+۴}{b-۱} = \frac{۴+۴}{-۱-۱} = -۴$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۴)

۵- **گزینهٔ «۴»** (احمدرضا ذاکرزاده)

$$\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{۱+\sin ۲x}}{\cos ۲x} = \lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{|\sin x+\cos x|}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{(\sin x+\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} \frac{۱}{\cos x-\sin x} = \frac{۱}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۱}{-\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

توجه: به ازای $x \to (\frac{۳\pi}{۴})^-$ داریم $\cos x < -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sin x > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

در نتیجه $\sin x+\cos x > ۰$.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۶- **گزینهٔ «۴»** (حمید علیزاده)

طبق فرض داریم: $\lim_{x\to ۱^+} \frac{x+\sqrt{x-۱}+a}{\sqrt{x^۲-۱}} = b$

چون $\lim_{x\to ۱^+} \sqrt{x-۱} = ۰$ ، پس $\lim_{x\to ۱^+} \sqrt{x^۲-۱} = ۰$ باید در حد اخیر به ابهام $\frac{۰}{۰}$ رسیده باشیم، یعنی: $\lim_{x\to ۱^+}(x+a) = ۱+a = ۰ \Rightarrow a = -۱$

حد فوق را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x+\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱+(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}((x-۱)^{\frac{۱}{۲}}+۱)}{\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}} = \frac{۰+۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = b$$

در نتیجه: $\frac{a}{b} = \frac{-۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = -\sqrt{۲}$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۷- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله حسنی)

چون حد مخرج به ازای $x = ۲$ برابر صفر می‌شود، پس باید حد صورت نیز به ازای $x = ۲$ برابر صفر شود:

$$۲(۲+۱)(۲+۲)+m = ۰ \Rightarrow ۲۴+m = ۰ \Rightarrow m = -۲۴$$

مقدار حد مذکور را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x(x+۱)(x+۲)-۲۴}{\sin(۴-۲x)} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۳+۳x^۲+۲x-۲۴}{\sin(-۲(x-۲))}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^۲+۵x+۱۲)}{\sin(-۲(x-۲))} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{\sin(-۲(x-۲))}$$

$$\times \lim_{x\to ۲}(x^۲+۵x+۱۲) = -\frac{۱}{۲}\times(۴+۱۰+۱۲) = -۱۳$$

پس $n = -۱۳$ بوده و داریم: $m-n = -۲۴+۱۳ = -۱۱$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۸- **گزینهٔ «۳»** (غلامرضا نیازی)

با توجه به فرض داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} \frac{bx[\frac{۱}{(-۱)^+}]+a[(-۱)^+]}{\left|\underbrace{x^۲-۱}_{۰^-}\right|}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{bx[(-1)^-]-a}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-2bx-a}{-(x^2-1)} = \frac{1}{2}$$

چون $\lim_{x\to(-1)^+}(x^2-1)=0$ ، پس حد صورت کسر اخیر نیز باید برابر صفر باشد، یعنی:

$$-2b(-1)-a=0 \Rightarrow a=2b$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-2bx-2b}{-(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-2b(x+1)}{-(x-1)(x+1)} = -b \Rightarrow -b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=2b=-1 \Rightarrow a+b=-\frac{3}{2}=-1/5$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهسان کوررزی)*

طول نقاطی که تابع f احتمالاً در آن‌ها ناپیوسته است، عبارتند از $x=-4$، ریشه‌های مخرج ضابطهٔ پایین و اعداد صحیحی که در ضابطهٔ بالا قرار دارند.

الف) $f(-4)=\lim_{x\to(-4)^-} f(x)=\frac{1}{16-4-7}=\frac{1}{5}$

$$\lim_{x\to(-4)^+} f(x)=(-4+7)(-4)=-12$$

پس تابع f در $x=-4$ ناپیوسته است.

ب) $x^2+x-7=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$

هر دو ریشهٔ مخرج ضابطهٔ پایین، بزرگ‌تر از (۴-) هستند، پس در ضابطهٔ پایین، هیچ نقطهٔ ناپیوستگی نداریم.

ج) اعداد صحیح ضابطهٔ بالا (با توجه به دامنهٔ آن)، اعداد ۳- و ۲- هستند:

$$x=-3: \begin{cases} f(-3)=\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=(-3+7)(-3)=-12 \\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=(-4+7)(-4)=-12 \end{cases}$$

تابع f در $x=-3$ پیوسته است.

$$x=-2: \begin{cases} f(-2)=\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=(-2+7)(-2)=-10 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=(-3+7)(-3)=-12 \end{cases}$$

پس تابع f در $x=-2$ ناپیوسته است.

در نتیجه تابع f، در مجموع در دو نقطه (به طول‌های $x=-4$ و $x=-2$) ناپیوسته است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمد زنگنه)*

چون تابع f در $x=1$ حد دارد، پس حد راست آن موجود و متناهی است و داریم:

موجود و متناهی $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-b[x]}{x-1}=\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-b}{x-1}=$

پس باید مقدار حد صورت کسر اخیر به ازای $x=1$، صفر شود، یعنی:

$$1-b=0 \Rightarrow b=1$$

که در این حالت داریم:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2$$

از طرفی باید $\lim_{x\to1^-} f(x)=2$ باشد. بنابراین $\lim_{x\to1^-} \frac{a(\sqrt{x^2+3}-2)}{bx-c}=2$

و در نتیجه $b-c=0$، یعنی $b=c=1$. پس:

$$\lim_{x\to1^-} \frac{a(\sqrt{x^2+3}-2)}{(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{a(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=2$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}=2 \Rightarrow \frac{2a}{4}=2 \Rightarrow a=4$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹)

۱- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا ذاکرزاده)

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی (S_n)، عبارتی درجه دوم است که عدد ثابت ندارد، بنابراین:

$$b+1=0 \Rightarrow b=-1$$

از طرفی ضریب n^2 برابر $\frac{d}{2}$ می‌باشد (d قدر نسبت دنباله است):

$$2a=-\frac{2}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow S_n=-n^2+(-\frac{1}{2}-2)n$$

$$=-n^2-\frac{5}{2}n$$

داریم:

$$a_5=S_5-S_4=(-25-\frac{25}{2})-(-16-10)$$

$$=-\frac{75}{2}+26=-\frac{23}{2}=-11/5$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

۲- **گزینهٔ «۴»** (سروش موئینی)

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}=4 \Rightarrow \sqrt{8-x}=4-\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}} 8-x=16+x+1-8\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow 2x+9=8\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{توان۲}} 4x^2+36x+81=64x+64$$

$$\Rightarrow 4x^2-28x+17=0$$

اختلاف ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ بدست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\Delta=(28)^2-4(4)(17)=784-272=512 \Rightarrow \sqrt{512}=16\sqrt{2}$$

$$\text{اختلاف دو ریشه}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{16\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۳- **گزینهٔ «۲»** (محمدحسن سلامی‌حسینی)

چون دو تابع f و g برابرند پس اولاً $a=1$ است و چون $D_f=R-\{-3\}$ است، پس $x=-3$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر $g(x)$ باشد.

پس $x^2+dx+e=(x+3)^2=x^2+6x+9$، پس $\begin{cases} d=6 \\ e=9 \end{cases}$ حال داریم:

$$g(x)=\frac{x^2+bx+c}{(x+3)^2}=\frac{x-2}{x+3}=f(x)$$

پس صورت کسر $g(x)$ باید شامل عامل $x+3$ و $x-2$ باشد، پس:

$$x^2+bx+c=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$$

پس $b=1$ و $c=-6$ و داریم:

$$\frac{d+e-c}{a+2b}=\frac{21}{3}=7$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۴- **گزینهٔ «۳»** (حسن اسماعیلی)

می‌دانیم $D_{f^{-1}of(x)}=D_{f(x)}$ و $D_{fof^{-1}(x)}=D_{f^{-1}(x)}=R_{f(x)}$

پس دامنهٔ تابع گفته شده برابر اشتراک D_f و R_f است.

دامنهٔ $f(x)$: زیر رادیکال باید نامنفی باشد. $x\geq 0 \rightarrow D_f=[0,+\infty]$

برد $f(x)$: با توجه به دامنهٔ تابع، $x\geq 0$ و همچنین $\sqrt{x}\geq 0$ است، پس:

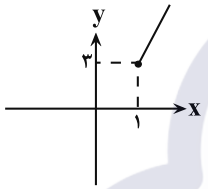
$$f(x)=x+\sqrt{x}+1\geq 0+0+1 \Rightarrow f(x)\geq 1 \Rightarrow R_f=[1,+\infty)$$

در نتیجه:

$$D_y=D_f\cap R_f=[1,+\infty)$$

$$y=2fof^{-1}(x)+f^{-1}of(x)=2(x)+x=3x$$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۵- **گزینهٔ «۲»** (یهزاد محرمی)

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، داریم:

محل برخورد با محور yها

$$f(0)=2 \xrightarrow{x=0} -2+4^{a\times 0-b}=2$$

$$\Rightarrow 4^{-b}=4 \Rightarrow -b=1 \Rightarrow b=-1$$

محل برخورد با محور xها

$$f(\frac{1}{2})=0 \xrightarrow{y=0} -2+4^{a\times\frac{1}{2}-b}=0$$

$$\Rightarrow 4^{\frac{a}{2}-b}=2=4^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{a}{2}-b=\frac{1}{2} \xrightarrow{b=-1} a=-1$$

همچنین با توجه به خط‌چین که $y=-2$ است، مقدار $c=-2$ بدست می‌آید. بعد از بدست آوردن مقادیر a، b و c سراغ حل معادله می‌رویم:

$$(-3a)^{cx+b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{5x^2-6x} \Rightarrow 3^{-2x-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{5x^2-6x}$$

$$\Rightarrow 3^{-2x-1}=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{5x^2-6x}$$

$$\Rightarrow -2x-1=-\frac{5x^2-6x}{2} \Rightarrow 4x+2=5x^2-6x$$

$$\Rightarrow 5x^2-10x-2=0$$

$$\text{حاصل ضرب}: P=\frac{c}{a}=-\frac{2}{5}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(پویان طهرانیان)*

$x=\frac{۱}{۹}$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$\log_۳^{\frac{۱}{۹}}-۳\log_{\frac{۱}{۹}}^{k}=۱\Rightarrow \log_۳^{۳^{-۲}}-۳\log_{۳^{-۲}}^{k}=۱\Rightarrow -۲+\frac{۳}{۲}\log_۳^{k}=۱$$

$$\log_۳^{k}=۲\Rightarrow k=۳^{۲}=۹$$

حال ریشهٔ دیگر را با نوشتن مجدد معادله پیدا می‌کنیم.

$$\log_۳^{x}-۳\log_{x}^{۹}=۱\Rightarrow \log_۳^{x}-۶\log_{x}^{۳}=۱\xrightarrow{\log_۳^{x}=t}$$

$$t-۶(\frac{۱}{t})=۱\xrightarrow{\times t}t^{۲}-t-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۲\\t=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\log_۳^{x}=-۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}\\\log_۳^{x}=۳\Rightarrow x=۲۷\end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر معادله برابر $x=۲۷$ است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(لیلا مرادی)*

باید توجه داشت که $۵x+۴x=۹x=۹\times\frac{\pi}{۱۸}=\frac{\pi}{۲}$ است و در نتیجه $\sin ۵x=\cos ۴x$ است:

$$\frac{-۲\sin ۵x+\cos ۴x}{۳\sin ۵x+۲\cos ۴x}=\frac{-۲\sin ۵x+\sin ۵x}{۳\sin ۵x+۲\sin ۵x}=\frac{-\sin ۵x}{۵\sin ۵x}=-\frac{۱}{۵}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(سجاد داوطلب)*

برای حل سؤال از فرمول مثلثاتی $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\cos ۲x}{\tan x+\cot x}=\frac{\cos ۲x}{\frac{۲}{\sin ۲x}}=\frac{\sin ۲x.\cos ۲x}{۲}=\frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

حال به ازای $x=\frac{\pi}{۴۸}$ خواهیم داشت: $A=\frac{۱}{۴}\sin(۴\times\frac{\pi}{۴۸})=\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۱۲}$

حال برای محاسبهٔ مقدار $\sin\frac{\pi}{۱۲}$، از فرمول مثلثاتی $\sin^{۲}\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{۱۲}=\pm\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

توجه شود که چون $\frac{\pi}{۱۲}$ در ناحیهٔ اول است، پس $\sin\frac{\pi}{۱۲}$ مثبت است.

$$A=\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۸}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(آریان حیدری)*

با توجه به نمودار f، به محاسبهٔ حدود داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to ۳^{+}}f([x])=\lim_{x\to ۳^{+}}f(۳)=\lim_{x\to ۳^{+}}۱=۱$$

$$\lim_{x\to ۳^{+}}[f(x)]=\lim_{x\to ۳^{+}}[۳^{-}]=\lim_{x\to ۳^{+}}۲=۲$$

$$[\lim_{x\to ۳^{+}}f(x)]=[۳]=۳$$

دقت کنید که در مورد آخر، ابتدا باید مقدار حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۳$ محاسبه شود (که برابر ۳ است.) و سپس از عدد حد حاصل، جزء صحیح گرفته شود:

$[۳]=۳$

پس مجموع مقادیر بالا برابر است با: $۱+۲+۳=۶$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(نیما کریوریان)*

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{x+a}{x^{۲}-x}-\frac{x+b}{x^{۲}+x})=\lim_{x\to ۰}(\frac{x+a}{x(x-۱)}-\frac{x+b}{x(x+۱)})$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(x+a)(x+۱)-(x+b)(x-۱)}{x(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x+ax-bx+a+b}{x(x-۱)(x+۱)}$$

با توجه به اینکه حاصل حد برابر b، مقداری صحیح می‌باشد، بنابراین از آن‌جایی‌که مقدار مخرج در $x=۰$ برابر صفر است، مقدار صورت نیز در $x=۰$ برابر صفر است:

$$۲x+ax-bx+a+b=۲(۰)+a(۰)-b(۰)+a+b=۰$$

$$\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{۲x+ax-bx+a+b}{x(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x-bx-bx-b+b}{x(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۲-۲b)}{x(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲b}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲-۲b}{-۱}=b\Rightarrow ۲-۲b=-b\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow a=-۲$$

$$\Rightarrow b-a=۲-(-۲)=۴$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱- **گزینهٔ «۳»** (فاطمه صدیقی)

برای به دست آوردن مجموع اعداد دستهٔ دهم ابتدا باید بدانیم دستهٔ دهم از کدام عضو شروع و با کدام عضو تمام می‌شود.

دستهٔ اول: یک عضو (اولی)

دستهٔ دوم: دو عضو (دومی و سومی)

دستهٔ سوم: سه عضو (چهارمی و پنجمی و ششمی)

شمارهٔ آخرین عضو هر دسته برابر با مجموع تعداد دسته‌ها از اول تا آن دسته می‌باشد، یعنی آخرین عضو دستهٔ نهم: $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{9\times10}{2}=45$

پس دستهٔ دهم از عضو ۴۶ ام شروع و به عضو ۵۵ ام خاتمه می‌یابد. پس مجموع اعداد این دسته برابر است با:

$$46\times7+47\times7+\ldots+55\times7=7(46+47+\ldots+55)$$

ابتدا باید مجموع اعداد از ۱ تا ۵۵ را به دست آوریم، سپس مجموع اعداد ۱ تا ۴۵ را از آن کم کنیم.

$$\frac{45\times46}{2}=1035 \qquad \frac{55\times56}{2}=1540$$

مجموع اعداد از ۴۶ تا ۵۵ برابر است با: $1540-1035=505$

$$\Rightarrow \text{مجموع اعداد دستهٔ دهم}=7\times505=3535$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۲- **گزینهٔ «۱»** (غلامرضا نیازی)

طبق فرض داریم:

$$a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{99}=a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{100}+100$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_2-a_1)}_{d}+\underbrace{(a_4-a_3)}_{d}+\underbrace{(a_6-a_5)}_{d}+\ldots+\underbrace{(a_{100}-a_{99})}_{d}=-100$$

$$50d=-100\Rightarrow d=-2$$

$$\frac{a_{50}^2-a_{20}^2}{a_{35}}=\frac{(a_{50}-a_{20})(a_{50}+a_{20})}{a_{35}}=\frac{(30d)(2a_{35})}{a_{35}}$$

$$=60d=60(-2)=-120$$

نکته: اگر a_m و a_n دو جملهٔ متمایز یک دنبالهٔ حسابی باشد، آن‌گاه:

$$a_{\frac{m+n}{2}}=\frac{a_m+a_n}{2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۳- **گزینهٔ «۳»** (حمید علیزاده)

$$a_n=k(2)^{(k-2)n^2-n} \xrightarrow{\text{جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی است } a_n}$$

$$(\text{ضریب } n^2)\ k-2=0\Rightarrow k=2\Rightarrow a_n=2(2)^{-n}\Rightarrow a_n=2^{1-n}$$

$$\Rightarrow a_n=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$$

مجموع n جملهٔ اول این دنبالهٔ هندسی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{1023}{512}=\frac{1(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1023}{512}=2(1-(\frac{1}{2})^n)$$

$$\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}=۱-(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^n=۱-\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^n=\frac{۱}{۱۰۲۴} \Rightarrow n=۱۰$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۴ تا ۶)

۴- **گزینهٔ «۱»** (محمد زنگنه)

اولاً داریم:

$$۲x=۶-۳x^۲ \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{۲}{۳} \\ P=\alpha\beta=-\frac{۶}{۳}=-۲ \end{cases}$$

ثانیاً می‌توان نوشت:

$$۲x=۶-۳x^۲ \Rightarrow ۳x^۲+۲x=۶ \Rightarrow x(۳x+۲)=۶$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳x+۲}=\frac{x}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \alpha'=\frac{۲}{(۳\alpha+۲)^۲}=۲(\frac{\alpha}{۶})^۲=\frac{\alpha^۲}{۱۸} \\ \beta'=\frac{۲}{(۳\beta+۲)^۲}=۲(\frac{\beta}{۶})^۲=\frac{\beta^۲}{۱۸} \end{cases}$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{۲}{(۳\alpha+۲)^۲}+\frac{۲}{(۳\beta+۲)^۲}=\frac{۱}{۱۸}(\alpha^۲+\beta^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۸}(S^۲-۲P)=\frac{۱}{۱۸}(\frac{۴}{۹}+۴)=\frac{۲۰}{۸۱}$$

$$P'=\alpha'\beta'=\frac{۲}{(۳\alpha-۲)^۲}\times\frac{۲}{(۳\beta-۲)^۲}=\frac{\alpha^۲}{۱۸}\times\frac{\beta^۲}{۱۸}$$

$$=(\frac{\alpha\beta}{۱۸})^۲=(-\frac{۲}{۱۸})^۲=\frac{۱}{۸۱}$$

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۲۰}{۸۱}x+\frac{۱}{۸۱}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۸۱} ۸۱x^۲-۲۰x+۱=۰$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۵- **گزینهٔ «۲»** (محمد کریمی)

$x=۲$ در معادله صدق می‌کند.

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۱+۱-k=۰ \Rightarrow k=۲$$

$x^۲-۳$ را t درنظر می‌گیریم، در این صورت:

$$t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=-۲ \end{cases}$$

$$t=۱ \Rightarrow x^۲-۳=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases}$$

$$t=-۲ \Rightarrow x^۲-۳=-۲ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

مجموع سه ریشهٔ دیگر معادله برابر است با: $-۲+۱-۱=-۲$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۶- **گزینهٔ «۴»** (سینا خیرخواه)

$$x-\frac{۱}{x}-\frac{۱۰x}{x^۲-۱}=۳ \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x}-\frac{۱۰x}{x^۲-۱}=۳$$

$$\xrightarrow{\frac{x^۲-۱}{x}=t} t-\frac{۱۰}{t}=۳ \xrightarrow{\times t} t^۲-۳t-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow (t-۵)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۵ \\ t=-۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x}=۵ \Rightarrow x^۲-۵x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} S_۱=-\frac{b}{a}=۵ \\ \frac{x^۲-۱}{x}=-۲ \Rightarrow x^۲+۲x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} S_۲=-\frac{b}{a}=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{کل}=S_۱+S_۲=۳$$

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۸، ۹ و ۱۷ تا ۱۹)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(مهسان کوهرزی)*

$$x\sqrt{x-2}-x=0\Rightarrow x(\sqrt{x-2}-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \sqrt{x-2}-1=0\end{cases}$$

دامنهٔ تعریف این معادله $x\geq 2$ می‌باشد، پس $x=0$ غیرقابل قبول است چون در دامنه قرار ندارد. لذا داریم:

$$\sqrt{x-2}-1=0\Rightarrow\sqrt{x-2}=1\Rightarrow x-2=1\Rightarrow x=3 \quad \text{ق ق}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*

$$\left.\begin{aligned}OA&=\sqrt{(\sqrt{x}-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{x+2}\\ OB&=\sqrt{(x-0)^2+0}=|x|\xrightarrow{x\geq 0}OB=x\end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}}OA=OB-4$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+2}=x-4\xrightarrow{\text{توان ۲}}x+2=x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14=0\Rightarrow(x-7)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2 & \text{غ ق ق}\\ x=7 & \text{ق ق}\end{cases}\Rightarrow OA=\sqrt{7+2}=3$$

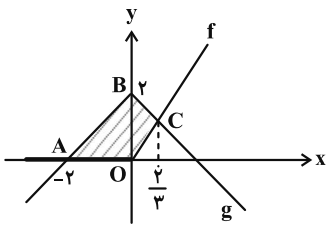
توجه: به دلیل وجود جملهٔ $\sqrt{x}$، باید $x\geq 0$ باشد.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲ و ۳۰)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(طاهر دارستانی)*

تابع f به صورت دوضابطه‌ای روبه‌رو نوشته می‌شود: $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

نمودار هر دو تابع f و g را رسم می‌کنیم:



$$2-x=2x\Rightarrow x=\frac{2}{3}\quad(\text{طول نقطهٔ C})$$

$$\Rightarrow f(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}\quad(\text{عرض نقطهٔ C})$$

مساحت ناحیهٔ هاشورخورده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABCO}=S_{ABO}+S_{BCO}=\frac{1}{2}OA\times OB+\frac{1}{2}OB\times x_C$$

$$\Rightarrow S_{ABCO}=\frac{1}{2}(2\times 2)+\frac{1}{2}(2\times\frac{2}{3})=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا مسکر)*

معادله یکی از قطرهای مربع به صورت $y=-2$ است، از آنجا که قطرهای مربع بر هم عمودند، با توجه به فرض، معادلهٔ قطر دیگر به صورت $x=1$ است؛ بنابراین محل تلاقی قطرها نقطهٔ $O=(1,-2)$ خواهد بود. از آنجا که نقطهٔ O وسط قطرهای AC و BD است، می‌توان گفت:

$$\left.\begin{aligned}x_A+x_C&=2x_O\\ x_B+x_D&=2x_O\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_A+x_B+x_C+x_D=4x_O$$

$$\left.\begin{aligned}y_A+y_C&=2y_O\\ y_B+y_D&=2y_O\end{aligned}\right\}\Rightarrow y_A+y_B+y_C+y_D=4y_O$$

$$\Rightarrow\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{y_A+y_B+y_C+y_D}=\frac{4x_O}{4y_O}=\frac{x_O}{y_O}=\frac{1}{-2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

چون دامنهٔ تابع f یک مجموعهٔ تک عضوی است لذا عبارت داخل رادیکال در ضابطهٔ تابع g باید یک عبارت درجه دوم با ضریب $x^۲$، منفی باشد که دلتای آن صفر است، بنابراین:

$$\Delta = m^۲+۲m+۱+۸(m-۵)=۰ \Rightarrow m^۲+۱۰m-۳۹=۰$$

$$\Rightarrow (m+۱۳)(m-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱۳ \\ m=۳ \end{cases}$$

$$(۱)\ m=-۱۳ \Rightarrow g(x)=\sqrt{-۱۸x^۲+۱۲x-۲}=\sqrt{-۲(۳x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow D_g=\{\frac{۱}{۳}\}\ ,\ g(\frac{۱}{۳})=۰$$

$$(۲)\ m=۳ \Rightarrow g(x)=\sqrt{-۲x^۲-۴x-۲}=\sqrt{-۲(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow D_g=\{-۱\}\ ,\ g(-۱)=۰$$

در نتیجه توابع قابل قبول برای f به صورت زیر است:

$$f=\{(\frac{۱}{۳},۰)\}\ ,\ f=\{(-۱,۰)\} \Rightarrow a_۱+a_۲=\frac{۱}{۳}-۱=-\frac{۲}{۳}$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحهٔ ۴۱)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(سینا خیرخواه)*

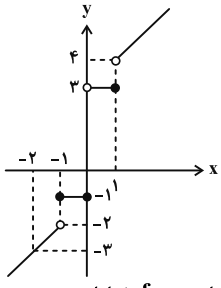
برای به دست آوردن ضابطهٔ $f-g$ ابتدا دامنهٔ تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم. برای این کار بین محدوده‌های x از دو تابع در بازه‌های شماره‌گذاری شده اشتراک می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & ;\ x\le ۰ \quad (۱) \\ ۲x+۳ & ;\ x>۰ \quad (۲) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} ۲x & ;\ -۱\le x\le ۱ \quad (۳) \\ x & ;\ x>۱ \text{ یا } x<-۱ \quad (۴) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f-g=\begin{cases} x-۱ & ;\ x<-۱ \quad (۱),(۴) \\ -۱ & ;\ -۱\le x\le ۰ \quad (۱),(۳) \\ ۳ & ;\ ۰<x\le ۱ \quad (۲),(۳) \\ x+۳ & ;\ x>۱ \quad (۲),(۴) \end{cases}$$

نمودار تابع $f-g$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌کنید برد تابع $f-g$ شامل پنج عدد صحیح $-۲,۰,۱,۲,۴$ نیست.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

$$[-x+\frac{۱}{۲}]=-۲ \Rightarrow -۲\le -x+\frac{۱}{۲}<-۱$$

$$\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} -\frac{۵}{۲}\le -x<-\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{۳}{۲}<x\le \frac{۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۹}{۴}<x^۲\le \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow ۲/۲۵<x^۲\le ۶/۲۵$$

$$\Rightarrow [x^۲]=۲,۳,۴,۵,۶ \Rightarrow \text{مجموع}=۲+۳+۴+۵+۶=۲۰$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تن‌آرا)*

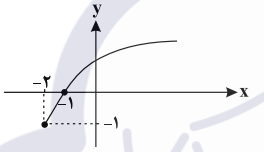
عبارت $xf(x)$، زیر رادیکال با فرجهٔ زوج و در مخرج قرار دارد، لذا باید داشته باشیم: $xf(x)>۰$

بنابراین عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای راحتی تعیین علامت تابع f، نمودار آن را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۲}-۱, D_f=[-۲,+\infty)$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow \sqrt{x+۲}=۱ \Rightarrow x=-۱$$

x	-۲		-۱		۰		$+\infty$
f(x)	▨	−	۰	+		+	
x	▨	−		−	۰	+	
xf(x)	▨	+	۰	−	۰	+	

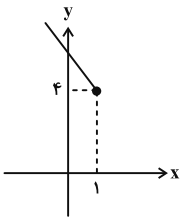


بنابراین دامنهٔ تابع y عبارت است از $(۰,+\infty)\cup(-۱,-۲]$.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(فاطمه صدیقی)*

ابتدا نمودار ضابطهٔ بالایی (که یک خط است) را رسم می‌کنیم.



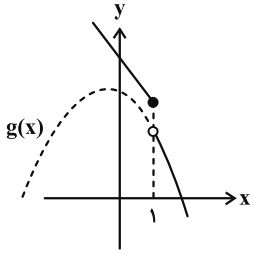
ضابطهٔ پایینی به ازای $a=۰$، مربوط به خط $y=۲x+۱$ است که در آن صورت تابع f یک به یک نخواهد بود.

به ازای $a\neq ۰$، ضابطهٔ پایینی مربوط به یک سهمی است و در صورتی تابع f یک به یک خواهد بود که $a<۰$ باشد (چرا؟).

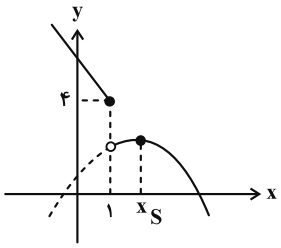
طول رأس سهمی $g(x)=ax^۲+۲x+۱$ به صورت $x_S=-\frac{۲}{۲a}=-\frac{۱}{a}$ است که برای آن دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (۱): $x_S=-\frac{۱}{a}\le ۱$ باشد، یعنی $a\le -۱$، که در آن صورت با توجه به نمودار زیر باید $g(۱)\le ۴$ باشد:

$$g(۱)=a+۲+۱\le ۴ \Rightarrow a\le ۱ \xrightarrow{\cap(a\le -۱)} a\le -۱$$



حالت (۲): $x_S=-\frac{۱}{a}>۱$ باشد که با توجه به شکل، تابع f یک‌به‌یک نخواهد بود!



در نتیجه $a \le -1$ و مجموعه مقادیر قابل قبول a برابر $[-1,-\infty)$ می‌شود.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۷)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی ناری‌ابیانه)*

وارون تابع f را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{x+2}{3x-1} \Rightarrow y=\frac{x+2}{3x-1} \Rightarrow 3xy-y=x+2$$

$$\Rightarrow x(3y-1)=y+2 \Rightarrow x=\frac{y+2}{3y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3x-1}$$

تلاقی f^{-1} را با خط $y=2x+2$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{x+2}{3x-1}=2x+2 \Rightarrow x+2=6x^2+4x-2$$

$$\Rightarrow 6x^2+3x-4=0$$

$$\Rightarrow S=x_1+x_2=-\frac{3}{6}=-0/5$$

توجه: وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (در صورت وجود) به صورت $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ می‌باشد که با شرط $a+d=0$ داریم $f=f^{-1}$ و لذا در این تست که رابطهٔ $a+d=0$ برقرار است داریم $f^{-1}=f$.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

از فرض سوال نتیجه می‌گیریم که f و f^{-1} همدیگر را حتماً روی خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قطع کرده‌اند، زیرا اگر $A(\alpha,\beta)$ با شرط $\alpha \neq \beta$ یکی از نقاط تقاطع f و f^{-1} باشد (که روی $y=x$ قرار ندارد) آنگاه نقطهٔ $A'(\beta,\alpha)$ نیز نقطهٔ تقاطع دیگر آن‌ها خواهد بود که غیرقابل قبول است. پس نقطهٔ A، نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f با $y=x$ است:

$$\begin{cases} f(x)=ax^3+x-1+a \\ y=x \end{cases}$$

$$ax^3+x-1+a=x \Rightarrow ax^3-1+a=0$$

$$\Rightarrow x^3=\frac{1-a}{a} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1-a}{a}}$$

با فرض $m=\sqrt[3]{\frac{1-a}{a}}$، مختصات نقطهٔ A به صورت (m,m) خواهد بود که طبق فرض داریم:

$$OA=\sqrt{m^2+m^2}=\sqrt{2} \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$$

(۱) $m=\sqrt[3]{\frac{1-a}{a}}=1 \Rightarrow \frac{1-a}{a}=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=0/5$

(۲) $m=\sqrt[3]{\frac{1-a}{a}}=-1 \Rightarrow \frac{1-a}{a}=-1 \Rightarrow 1-a=-a$ (غیرممکن)

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۱)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(سیرسپهر متولیان)*

$$\begin{cases} D_f: 1-x^2 \ge 0 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \\ D_g: \{-3,-1,0,1,2\} \end{cases} \Rightarrow D_f \cap D_g=\{-1,0,1\}$$

$$\begin{cases} f(-1)=-2\ ,\ f(0)=-1\ ,\ f(1)=2 \\ g(-1)=4\ \ ,\ g(0)=2\ \ ,\ g(1)=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g-f=\{(-1,6),(0,3),(1,-3)\}$$

کوچک‌ترین عضو برد تابع $g-f$ برابر ۳- است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

فرض کنید $f(x)=ax+b$ که در آن $a<0$ است.

$$(fog)(x)=ag(x)+b=3-2x \Rightarrow g(x)=\frac{-2x+3-b}{a}$$

حال داریم:

$$(f+g)(x)=ax+b+\frac{(-2x+3-b)}{a}=(a-\frac{2}{a})x+b+\frac{3-b}{a}=1-x$$

پس:

$$\Rightarrow a-\frac{2}{a}=-1 \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 & \text{غ ق ق} \\ a=-2 & \checkmark \end{cases}$$

$$b+\frac{(3-b)}{a}=b+\frac{3-b}{-2}=1 \Rightarrow -3b+3=-2 \Rightarrow b=\frac{5}{3}$$

$$f(x)=-2x+\frac{5}{3} \Rightarrow f(\frac{1}{3})=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=1$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

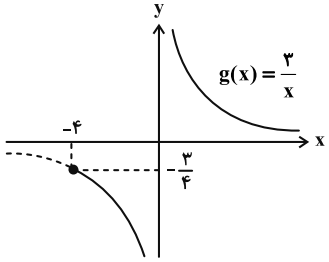
۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین تقی‌زاده)*

$$f(x)=x-4\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=x-4\sqrt{x}+4-4$$

$$\Rightarrow f(x)=(\sqrt{x}-2)^2-4 \Rightarrow \begin{cases} D_f=[0,+\infty) \\ R_f=[-4,+\infty) \end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

کافی است تابع g را در محدودهٔ $[-4,+\infty)$ رسم کنیم:



بنابراین برد تابع $(gof)(x)$ به صورت $R-(-\frac{3}{4},0]$ خواهد بود و داریم:

$$a=-\frac{3}{4}\ ,\ \ b=0 \Rightarrow b-4a=0+3=3$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهسان کوردرزی)*

$$\log_{\sqrt{۳}}^{a}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=(\sqrt{۳})^{\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow ۸a^{۳}-۸=۸\times(۳^{\frac{۱}{۳}})^{۳}-۸=۲۴-۸=۱۶$$

$$\Rightarrow \log_{۸}^{۱۶}=\log_{۲^{۳}}^{۲^{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

با توجه به فرض مسئله: $۷^{x+۱}=۱۴\Rightarrow x+۱=\log_{۷}۱۴$

$$۲^{y+۳}=۱۴\Rightarrow y+۳=\log_{۲}۱۴$$

خواستهٔ مسئله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{۴y+۱۳}{y+۳}-\frac{x}{x+۱}=\frac{۴(y+۳)+۱}{y+۳}-\frac{x+۱-۱}{x+۱}$$

$$=۴+\frac{۱}{y+۳}-(۱-\frac{۱}{x+۱})=۳+(\frac{۱}{y+۳}+\frac{۱}{x+۱})$$

$$=۳+(\log_{۱۴}^{۲}+\log_{۱۴}^{۷})=۳+\log_{۱۴}^{۱۴}=۴$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۷)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(هامد معنوی)*

$$\log_{۴۰}^{۸}+\log_{۴۰}^{۵}=۱\Rightarrow m+\log_{۴۰}^{۵}=۱\Rightarrow \log_{۴۰}^{۵}=۱-m$$

همچنین:

$$\begin{cases}\log_{۴۰}^{۸}=m\Rightarrow \log_{۴۰}^{۲}=\frac{m}{۳}\\ \log_{۴۰}^{۲۰}+\log_{۴۰}^{۲}=۱\Rightarrow \log_{۴۰}^{۲۰}=۱-\log_{۴۰}^{۲}\end{cases}\Rightarrow \log_{۴۰}^{۲۰}=۱-\frac{m}{۳}$$

بنابراین: $\log_{۵}^{۸}+\log_{۲}^{۲۰}=\frac{\log_{۴۰}^{۸}}{\log_{۴۰}^{۵}}+\frac{\log_{۴۰}^{۲۰}}{\log_{۴۰}^{۲}}=\frac{m}{۱-m}+\frac{۱-\frac{m}{۳}}{\frac{m}{۳}}$

$$=\frac{m}{۱-m}+\frac{۳-m}{m}=\frac{m^{۲}+(۱-m)(۳-m)}{m(۱-m)}$$

$$=\frac{m^{۲}+۳-۴m+m^{۲}}{m-m^{۲}}=\frac{۲m^{۲}-۴m+۳}{m-m^{۲}}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

می‌دانیم: $x^{\log_{۹}^{۲}}=۲^{\log_{۹}^{x}}$ است. پس با تغییر متغیر $۲^{\log_{۹}^{x}}=t$ داریم:

$$t^{۲}-۶t+۸=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۲\Rightarrow \log_{۹}^{x}=۱\Rightarrow x_{۱}=۹\\ t=۴\Rightarrow \log_{۹}^{x}=۲\Rightarrow x_{۲}=۸۱\end{cases}\Rightarrow x_{۲}+x_{۲}=۹۰$$

در نتیجه $۳^{a}=۹۰$ و چون $\underbrace{۲۴۳}_{۳^{۵}}<۹۰<\underbrace{۸۱}_{۳^{۴}}$ است، $[a]=۴$ خواهد بود.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(کیان کریمی‌فراسانی)*

ابتدا وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=\log(\frac{x+۵a}{۲a^{۲}+۲})\Rightarrow ۱۰^{y}=\frac{x+۵a}{۲a^{۲}+۲}$$

$$\Rightarrow x=(۲a^{۲}+۲)۱۰^{y}-۵a$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(۲a^{۲}+۲)۱۰^{x}-۵a$$

با توجه به مثبت بودن ضریب ۱۰^{x} برای این‌که نمودار $f^{-۱}$ فقط از نواحی اول و سوم بگذرد باید $f^{-۱}(۰)=۰$ باشد. $f^{-۱}(۰)=۲a^{۲}+۲-۵a=۰$

$$\Rightarrow (۲a-۱)(a-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\Rightarrow \frac{a}{a-۱}=۲\\ a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{a}{a-۱}=-۱\end{cases}$$

مجموع مقادیر مورد نظر برابر است با: $۲+(-۱)=۱$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی ناری‌ابیانه)*

دو تابع هنگامی برابرند که دامنه‌های یکسان و ضوابط یکسان داشته باشند.

تابع f در ریشهٔ مخرج یعنی $x=\log_{۲}^{۳}$ تعریف نشده است. پس برای این‌که دامنهٔ f با دامنهٔ g که همان اعداد حقیقی است، برابر شود باید $a=\log_{۲}^{۳}$ باشد. بنابراین برای b داریم:

$$g(a)=b\Rightarrow b=۲^{\log_{۲}^{۳}}+۱=۴$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

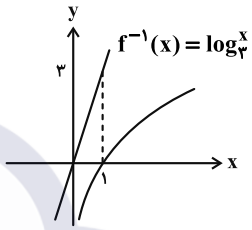
$$۹^{\frac{۱}{a}}-[\log_{b}^{۲}]=۹^{\frac{۱}{\log_{۲}^{۳}}}-[\log_{۴}^{۲}]$$

$$=۹^{\log_{۳}^{۲}}-[\log_{۲^{۲}}^{۲}]=۲^{\log_{۳}^{۹}}-[\frac{۱}{۲}]=۲^{۲}-۰=۴$$

(حسابان ۱- تابع: صفحهٔ ۴۱ و توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۵ و ۸۶)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(سامان سلامیان)*

برای دامنهٔ $y=\sqrt{۳x-f^{-۱}(x)}$ باید $۳x-f^{-۱}(x)\geq ۰$ پس $۳x\geq f^{-۱}(x)$. پس بازه‌هایی برای x مناسب است که خط $y=۳x$ بالاتر یا مساوی وارون تابع $f(x)=۳^x$ یعنی $f^{-۱}(x)=\log_۳^x$ باشد. مطابق شکل می‌بینیم که همواره خط $y=۳x$ بالاتر از نمودار $y=\log_۳^x$ قرار می‌گیرند و جواب $x\in(۰,+\infty)$ است. دقت کنید $f^{-۱}(x)=\log_۳^x$ دامنه‌اش $x>۰$ است.



(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*

$$۰/۲=\frac{۱}{۵}=۵^{-۱}$$

$$(۰/۲)^{|x-۱|}=۵^{-x^۲+۱}\Rightarrow ۵^{-|x-۱|}=۵^{-x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow -|x-۱|=-x^۲+۱\Rightarrow x^۲-۱-|x-۱|=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۱\Rightarrow x^۲-۱-(x-۱)=۰\Rightarrow x^۲-x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=۱ & \text{ق‌ق}\end{cases}\\ x<۱\Rightarrow x^۲-۱-(-x+۱)=۰\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱ & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=-۲ & \text{ق‌ق}\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو ریشه به صورت $x=۱$ و $x=-۲$ است که اختلاف آن‌ها برابر ۳ است.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$f(x)=\log_۲^{(x-۲)}+\log_۲^{(۶-x)}=\log_۲^{(x-۲)(۶-x)}$$

ابتدا برد تابع $y=(-x+۶)(x-۲)$ را می‌یابیم. نمودار این تابع، سهمی است و طول و عرض رأس سهمی برابر $x=۴$ و $y=۴$ می‌باشد. پس برد برابر است با: $(-\infty,۴]$.

حال برد تابع f را می‌یابیم: $f(t)=\log_۲^t \quad ۰<t\leq ۴$

$$R_f=(-\infty,\log_۲^۴]=(-\infty,۲]$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

با توجه به نمودار و ضابطهٔ تابع لگاریتمی g داریم:

$$-۶(\frac{۴a}{۳})+c=۰\Rightarrow c=۸a$$

همچنین برای تابع f و ضابطهٔ $f^{-۱}$ در صورت سوال داریم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{a^{۲x}-b}{۴}\Rightarrow a^{۲x}=۴f^{-۱}(x)+b$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\log_a^{(۴x+b)}\xrightarrow{\text{طبق نمودار } f}۴(-۲)+b=۰$$

$$\Rightarrow b=۸$$

حالا از آنجا که نقطهٔ (a,a) روی نمودارهای توابع f و g قرار دارد، داریم:

$$f(a)=g(a)\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_a^{(۴a+۸)}=\log_a^{\overbrace{(-۶a+c)}^{-۶a+۸a=۲a}}$$

$$\Rightarrow\log_a^{(۴a+۸)}=\log_a^{(۲a)^۲}\Rightarrow ۴a^۲=۴a+۸$$

$$\xrightarrow{+۴}\underbrace{a^۲-a-۲}_{(a-۲)(a+۱)}=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱ & \text{غ‌ق‌ق}\\ a=۲ & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

پس $f(x)=\frac{۱}{۲}\log_۲^{(۴x+۸)}$ و $g(x)=\log_۲^{(-۶x+۱۶)}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases}g(x_D)=۰\Rightarrow -۶x_D+۱۶=۱\Rightarrow x_D=۲/۵\\ f(x_E)=۰\Rightarrow ۴x_E+۸=۱\Rightarrow x_E=-۱/۷۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ADE}=\frac{۲\times ۴/۲۵}{۲}=۴/۲۵$$

$$\begin{cases}y_B=f(۰)\Rightarrow y_B=\frac{۱}{۲}\log_۲^۸=\frac{۳}{۲}=۱/۵\\ y_C=g(۰)\Rightarrow y_C=\log_۲^{۱۶}=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۲\times ۲/۵}{۲}=۲/۵$$

در نتیجه نسبت خواسته شده برابر $\frac{۴/۲۵}{۲/۵}=۱/۷$ خواهد بود.

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱- اگر دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{(3-m)x^2+2mx-(m+2)}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\in[-6,-3]$ ۲) $m\in(-\infty,3)$ ۳) $m\in(-\infty,-6]$ ۴) $m\in(6,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۵۲ تا ۵۳)

برای آن‌که $D_f=\mathbb{R}$ باید برای هر عدد حقیقی x شرط $(3-m)x^2+2mx-(m+2)\geq 0$ برقرار باشد یعنی:

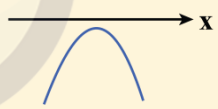
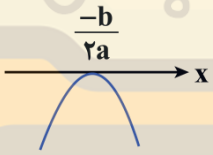
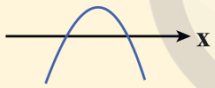
$$\Delta\leq 0\Rightarrow m^2+(3-m)(m+2)\leq 0\Rightarrow m^2-m^2+m+6\leq 0\Rightarrow m\leq -6$$

$$a>0\Rightarrow 3-m>0\Rightarrow m<3$$

اشتراک دو شرط است. یعنی $m\leq -6$

ریشه‌های سهمی

$a<0$

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
		
تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند. تابع درجه دوم همواره پایین محور xها است. تابع درجه دوم همواره منفی است.	تابع درجه دوم پایین محور xها و بر آن مماس است. معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف دارد. $x=-\frac{b}{2a}$	تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.

توجه!

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط این‌که عبارت درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره منفی باشد این است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

۲- در مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۴<\frac{۳x+۱}{x-۲}<۲$ چند عدد صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۶ تا ۹۱)

برای این تست ۳ روش داریم:

روش اول

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}<۲ \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۲}-۲<۰ \Rightarrow \frac{x+۵}{x-۲}<۰ \Rightarrow -۵<x<۲$$

$$-۴<\frac{۳x+۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۲}+۴>۰ \Rightarrow \frac{۷x-۷}{x-۲}>۰ \Rightarrow x>۲ \text{ یا } x<۱$$

پس جواب نهایی $-۵<x<۱$ قابل قبول است.

اعداد صحیح در مجموعه جواب $x=-۴,-۳,-۲,-۱,۰$ هستند، یعنی ۵ عدد صحیح در مجموعه جواب واقع شده است.

روش دوم

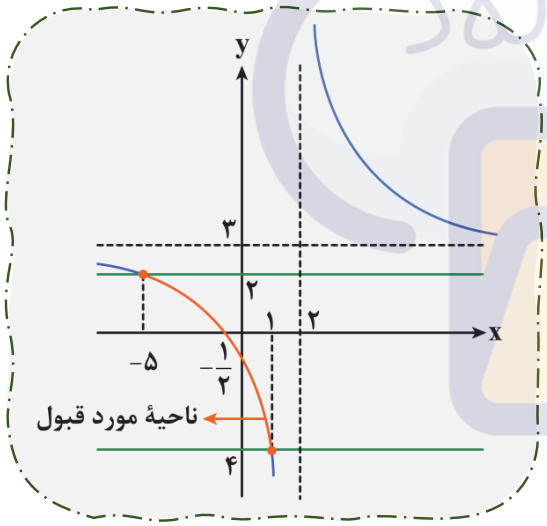
$$-۳<\frac{۳x+۱}{x-۲}+۱<۳ \Rightarrow \left|\frac{۴x-۱}{x-۲}\right|<۳ \Rightarrow |۴x-۱|<۳|x-۲| \Rightarrow |۴x-۱|<|۳x-۶|$$

$$(۴x-۱)^۲<(۳x-۶)^۲ \Rightarrow (۴x-۱)^۲-(۳x-۶)^۲<۰$$

$$(۴x-۱+۳x-۶)(۴x-۱-۳x+۶)<۰ \Rightarrow (۷x-۷)(x+۵)<۰ \Rightarrow -۵<x<۱$$

روش سوم

با رسم تابع هموگرافیک داریم:



حال با رسم $y=-۴$ و $y=۲$ داریم:

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}=۲ \Rightarrow ۳x+۱=۲x-۴ \Rightarrow x=-۵$$

$$\frac{۳x+۱}{x-۲}=-۴ \Rightarrow ۳x+۱=-۴x+۸ \Rightarrow x=۱$$

در نتیجه بازهٔ جواب $(-۵,۱)$ می‌شود.

ماز

۳- جدول تعیین علامت $P(x)=(۲a-۶)x^۲+(۳a-۱۲)x+b$ به صورت مقابل است. مقدار $۲b-۳a$ چه عددی است؟

x	-۳
P(x)	+ ۰ −

۱) ۹

۲) -۱۸

۳) -۹

۴) -۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط به خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۶)

با توجه به جدول که نمایانگر فقط یک ریشه ساده برای $P(x)=0$ است متوجه می‌شویم که $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه اول است به طوری‌که ریشه آن $x=-3$ است، یعنی:

$$2a-6=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow P(x)=+(3a-12)x+b$$

$$P(x)=+(9-12)x+b=-3x+b$$

$$P(x)=0 \Rightarrow x=+\frac{b}{3} \Rightarrow +\frac{b}{3}=-3 \Rightarrow b=-9$$

$$P(x)=-3x-9$$

x	-3
P(x)	$+ \quad 0 \quad -$

$$2b-3a=-18-9=-27$$

پس $b=-9$ و $a=3$ قابل قبول است.

مثال

۴- اگر معادله $\frac{x-8}{x^2+2x}-\frac{k}{x+2}=\frac{2x-1}{x}$ فقط یک ریشه داشته باشد، چند مقدار مختلف برای k به دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۱)

ابتدا معادله را به صورت یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x-8-kx}{(x^2+2x)}=\frac{2x-1}{x} \xrightarrow{x\neq 0} \frac{x-8-kx}{x+2}=2x-1$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x-x-2=x-8-kx \Rightarrow 2x^2+(2+k)x+6=0$$

اگر معادله به دست آمده دارای ریشه مضاعف باشد حالت قابل قبولی از جواب است: (دقت کنید در این حالت ریشهٔ مضاعف با هیچکدام از ریشه‌های مخرج برابر نیست)

$\Delta=0 \Rightarrow (2+k)^2-48=0 \Rightarrow$ ۲ مقدار برای k به دست می‌آید.

حالتی دیگر می‌ماند که معادله $2x^2+(k+2)x+6=0$ دارای ریشه $x=0$ یا $x=-2$ باشد، اگر $x=0$ که امکان‌پذیر نیست اما اگر $x=-2$ ریشه آن باشد.

$$8-2(k+2)+6=0 \Rightarrow k+2=7 \Rightarrow k=5 \Rightarrow 2x^2+7x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ غ ق ق} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

این مقدار k به دست آمده با مقادیر به دست آمده قبلی متمایز است، پس کلاً ۳ مقدار مختلف برای k به دست می‌آید که معادله فقط یک ریشه داشته باشد.

معادلات گویا

به معادله‌های شامل عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشد، **معادله‌های گویا** می‌گوییم.

معادله‌های زیر نمونه‌ای از معادلات گویا هستند.

- $\frac{x^2+5}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+2}=3$
- $\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x}=\frac{4x-4}{x^2-4}$

- آقا! + بله؟ - یه معادله گویا رو چطوری باید حلش کنیم؟

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. (چندجمله‌ای)

طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

عبارت جبری به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می‌کنیم.

در نهایت جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

توجه!

جواب‌های به دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند. (- قسمت دوم رو متوجه نشدم! +یعنی این‌که مثلاً اگر قرار باشه با حل یه معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی در نیاریم)

۵- در یک مستطیل به عرض $\sqrt{۵}$، طول ۳ برابر عرض است. مقدار k را به عرض مستطیل اضافه کرده و k واحد از طول آن کم می‌کنیم. مستطیل به مستطیل طلایی تبدیل می‌شود. حداقل مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۵}+۱)}{\sqrt{۵}+۳}$ ۲) $\frac{۵(\sqrt{۵}-۱)}{۳+\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۳(\sqrt{۵}-۱)}{\sqrt{۵}+۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳}-۱)}{۵+\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۱)

یک مستطیل به شرطی طلایی است که نسبت طول به عرض آن $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

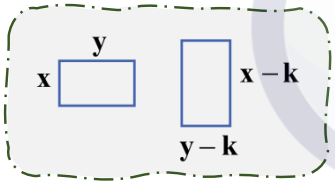
مسأله ۲ حالت دارد.

حالت اول

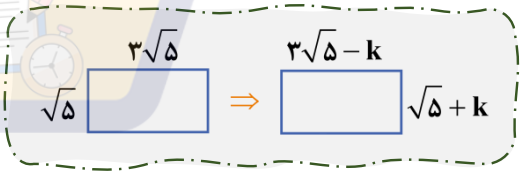
وقتی k به عرض اضافه کرده و k واحد از طول کم می‌کنیم همچنان اضلاع جدید همان طول و عرض بمانند که در این حالت مقدار حداقلی برای k به دست می‌آید.

حالت دوم

آن است که پس از تغییر آنقدر k را افزایش دهیم تا عرض مستطیل اولیه به طول مستطیل دوم تبدیل شود یعنی شکل زیر حاصل شود:



به همین جهت حداقل مقدار k را خواسته است. پس طبق حالت اول پیش می‌رویم:

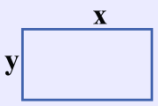


$$\frac{۳\sqrt{۵}-k}{\sqrt{۵}+k}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۶\sqrt{۵}-۲k=\sqrt{۵}+۵+k+k\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow ۵\sqrt{۵}-۵=k(۳+\sqrt{۵})\Rightarrow k=\frac{۵(\sqrt{۵}-۱)}{۳+\sqrt{۵}}$$

نسبت طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y، رابطه زیر برقرار باشد در این صورت به آن مستطیل، مستطیل طلایی و به نسبت $\frac{x}{y}$ نسبت طلایی می‌گوییم. که مقدار آن برابر $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ (عدد طلایی) است.



$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

۶- دو فرد A و B با هم کاری را در طی ۱۵ روز تمام می‌کنند. پس از ۶ روز کار مشترک، A را حذف می‌کنیم و B به تنهایی در ۱۵ روز تمام کار را به پایان می‌رساند. اگر بعد از ۶ روز کار مشترک، B را حذف می‌کردیم، A به تنهایی مابقی کار را چند روزه تمام می‌کرد؟

۱) ۳۲/۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۲)

فرض کنیم A به تنهایی در طی a روز و B به تنهایی در طی b روز کل کار را تمام کنند، در این صورت: $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{۱۵}$

زیرا A در هر روز $\frac{۱}{a}$ از کل کار و B به تنهایی در هر روز $\frac{۱}{b}$ کل کار را تمام می‌کند.

حال ادامه سوال:

$$\underbrace{\frac{۶}{a}+\frac{۶}{b}}_{\text{۶ روز کار مشترک}}+\frac{۱۵}{b}=۱$$

↘ B، ۱۵ روز به تنهایی کار کند

$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۵}+\frac{۱۵}{b}=۱ \Rightarrow \frac{۱۵}{b}=\frac{۹}{۱۵} \Rightarrow b=\frac{۱۵\times ۱۵}{۹}=۲۵$$

یعنی b به تنهایی ۲۵ روزه کار را تمام می‌کرد.

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۵}$$

$$\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۵-۳}{۷۵} \Rightarrow a=\frac{۷۵}{۲}=۳۷/۵$$

یعنی a به تنهایی ۳۷/۵ روزه کار را تمام می‌کند.

$$\frac{۶}{a}+\frac{۶}{b}+\frac{n}{a}=۱ \Rightarrow \frac{۶}{۱۵}+\frac{n}{\frac{۷۵}{۲}}=۱ \Rightarrow \frac{۲n}{۷۵}=\frac{۹}{۷۵}$$

$$n=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵$$

پس A مابقی کار را در طی ۲۲/۵ روز تمام می‌کند.

مسائل مربوط به موازی‌کاری

اگر شخص A کاری را به تنهایی در x روز (ساعت) و شخص B همان کار را به تنهایی در y روز (ساعت) انجام دهند، در این صورت:

- شخص A به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- شخص B به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- اگر شخص A و شخص B هر دو با هم کار کنند در هر روز (ساعت)، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهند.

تاز

۷- ۴۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۲۵ درصد را با ۸۰ کیلوگرم نمک خالص در یک ظرف می‌ریزیم. چقدر به آب آن اضافه کنیم تا غلظت محلول نهایی ۱۰ درصد شود؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۱۳۲۰ ۴) ۱۵۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۹ تا ۲۲)

در ابتدا کل نمک موجود در محلول را یافته تا بتوانیم غلظت نهایی را به دست آوریم.

$$\text{نمک موجود} = ۴۰۰\times\frac{۲۵}{۱۰۰}+۸۰=۱۸۰ \text{ نمک خالص}$$

$$\text{غلظت نهایی}=\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{\text{نمک خالص}}{\text{کل محلول}}=\frac{۱۸۰}{۴۰۰+۸۰+x}$$

↓ میزان آب اضافه شده

$$\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۸۰}{۴۸۰+x} \Rightarrow ۴۸۰+x=۱۸۰۰ \Rightarrow x=۱۸۰۰-۴۸۰ \Rightarrow x=۱۳۲۰kg$$

مسائل مربوط به غلظت

برای حل این مسائل بهتر است نکته‌های زیر را از درس شیمی به خاطر داشته باشیم:

غلظت یک محلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت یک محلول} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}$$

اگر x گرم از یک ماده با غلظت m و y گرم از ماده دیگر با غلظت n را با هم مخلوط کنیم، غلظت مخلوط برابر است با:

$$\text{غلظت مخلوط} = \frac{xm + yn}{x + y}$$

۸- معادله $\sqrt{1+x} + 1 = x^2$ دارای چند جواب است؟

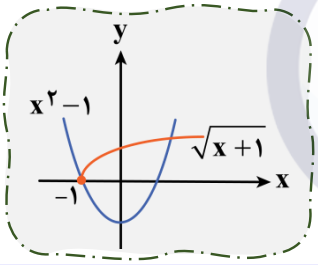
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۳)

یکی از روش‌هایی که می‌توان تعداد ریشه‌های یک معادله را پیدا کرد، آن است که نمودار تابع را رسم کنیم و تعداد نقاط تلاقی آن را با محور xها مشخص کنیم و یا آن‌که نمودار f و نمودار g را رسم کنیم. تعداد نقاط تلاقی نمودار f و نمودار g، برابر تعداد ریشه‌های $f(x) - g(x) = 0$ است.

پس برای یافتن تعداد ریشه داریم: $1 + \sqrt{1+x} = x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x} = x^2 - 1$

نمودار توابع $y = \sqrt{1+x}$ و $y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم. تعداد تلاقی آن‌ها تعداد ریشه‌های معادله موردنظر است. دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.



معادله‌های رادیکالی (گنگ)

به معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله‌های رادیکالی (گنگ) می‌گوییم.

یه نمونه باحال

معادله‌های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

- $\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$
- $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$
- $\sqrt{x+2} = x - 4$

حال سوال اینجاست که یه معادله رادیکالی رو چطوری باید حلش کنیم؟ برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

توجه!

اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.

۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی a چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۲ تا ۲۴)

اولاً باید توجه داشته باشیم معادله کلاً یک جواب دارد.

ثانیاً با تغییر a جواب معادله عوض می‌شود. پس برای حل آن داریم:

$$\sqrt{x-a}=a-\sqrt{x} \Rightarrow x-a=a^2+x-2a\sqrt{x}$$

$$a+a^2=2a\sqrt{x}$$

$$\text{چون } a \text{ طبیعی است} \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow 1+a=2\sqrt{x} \Rightarrow x=(\frac{1+a}{2})^2$$

با توجه به رابطه به دست آمده چون x عدد طبیعی و a هم عدد طبیعی است، پس x مربع کامل است و a عدد طبیعی فرد است.

مثلاً $a=5$، آن‌گاه $x=9$ یا $a=7$، آن‌گاه $x=16$.

با توجه به آن‌که x یک عدد ۲ رقمی است، پس حداقل مقدار a باید $a=7$ باشد.

۱۰- اگر معادلهٔ $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{ax+\sqrt{2-x}}$ دارای جواب باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۴/۵

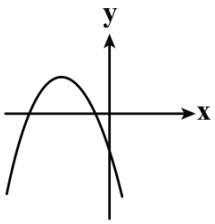
پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۲۲ تا ۲۴)

اولاً وجود $x-2$ و $2-x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ به این معناست که فقط $x=2$ قابل قبول است.

ثانیاً اگر $x=2$ را در معادله قرار دهیم باید تساوی برقرار باشد، پس:

$$\sqrt{9}+0=\sqrt{2a+0} \Rightarrow 2a=9 \Rightarrow a=4/5$$

۱- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. کدام گزینه همواره مثبت است؟



۱) $ab+c$
۲) $ac-b$
۳) $a(bc-1)$
۴) $abc+1$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۷ و ۱۸ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که سهمی دارای max است، پس $a<0$ و چون $f(0)>0$، پس $c>0$ می‌باشد. از طرفی $b>0$ است، زیرا شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه تلاقی با محور عرض‌ها منفی است. با توجه به این‌که $a,b,c>0$ است، $ac-b$ حتماً مثبت است.

۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، حاصل $A=\frac{\alpha}{\beta(2-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(2-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به معادلهٔ داده شده:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=2\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2-\beta\\ \beta=2-\alpha\end{cases}\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-4$$

در نتیجه:

$$A=\frac{\alpha}{\beta(2-\alpha)}+\frac{\beta}{\alpha(2-\beta)}=\frac{\alpha}{\beta\times\beta}+\frac{\beta}{\alpha\times\alpha}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^2}=\frac{S^3-3PS}{P^2}=\frac{2^3-3(-4)(2)}{(-4)^2}=\frac{8+24}{16}=\frac{32}{16}=2$$

ایستگاه ریشه‌ها و روابط بین آن‌ها

رابطه	حاصل برحسب S و P
$\alpha^2+\beta^2$	$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$
$\alpha^3+\beta^3$	$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$
$\alpha^4+\beta^4$	$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(S^2-2P)^2-2P^2$
$\alpha^6+\beta^6$	$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2+\beta^2)^3-3(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)=(S^2-2P)^3-3P^2(S^2-2P)$
$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$
$\lvert\alpha-\beta\rvert$	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$
$\lvert\alpha^2-\beta^2\rvert$	$\lvert\alpha^2-\beta^2\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}\times S\rvert$
$\lvert\alpha^3-\beta^3\rvert$	$\lvert\alpha^3-\beta^3\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S^2-P)\rvert$
$\lvert\alpha^4-\beta^4\rvert$	$\lvert\alpha^4-\beta^4\rvert=\lvert(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S)(S^2-2P)\rvert$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}\ \ (\alpha,\beta>0)$
$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert$	$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-2\sqrt{P}}\ \ (\alpha,\beta>0)$
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

۳- α و 3β جواب‌های معادلهٔ $x^2-ax-b=0$، ۳ و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax-18=0$ می‌باشند. مقدار $\frac{b}{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که ۳ و β ریشه‌های $3x^2+ax-18=0$ هستند، پس $x=3$ در معادله صدق می‌کند:

$$27+3a-18=0\Rightarrow 3a=-9\Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow 3x^2-3x-18=0\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow (x-3)(x+2)=0\Rightarrow \beta=-2\Rightarrow 3\beta=-6$$

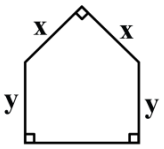
از طرفی α و -6 ریشه‌های $x^2+3x-b=0$ هستند، یعنی $x=-6$ در معادله صدق می‌کند:

$$36-18-b=0\Rightarrow b=18$$

$$x^2+3x-18=0\Rightarrow (x+6)(x-3)=0\Rightarrow \alpha=3$$

$$\begin{cases}\alpha=3\\ b=18\end{cases}\Rightarrow \frac{b}{\alpha}=\frac{18}{3}=6$$

۴- پنجره‌ای مطابق شکل با بیشترین نوردهی می‌خواهیم بسازیم. اگر محیط پنجره ۱۶ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

۲) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۱}$

۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به این‌که کف پنجره، وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس اندازهٔ آن $x\sqrt{۲}$ است.در نتیجه:

$$x\sqrt{۲}+۲x+۲y=۱۶ \Rightarrow y=\frac{۱۶-۲x-x\sqrt{۲}}{۲}$$

وقتی صحبت از بیشترین نوردهی است یعنی مساحت باید بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$S=\sqrt{۲}xy+\frac{۱}{۲}x^۲=\sqrt{۲}x(\frac{۱۶-۲x-x\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱۶x-۲x^۲-\sqrt{۲}x^۲)+\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\Rightarrow S(x)=(-\sqrt{۲}-۱+\frac{۱}{۲})x^۲+۸\sqrt{۲}x$$

با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ منفی است، پس S دارای max است در نتیجه طول رأس را می‌یابیم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸\sqrt{۲}}{-۲\sqrt{۲}-۲+۱}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۱+۲\sqrt{۲}}$$

ماز

۵- اگر α و β صفرهای سهمی $f(x)=-۲x^۲+۳x+۲$ باشند، مقدار $\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{۲۱\alpha}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ و ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

چون α و β صفرهای سهمی $f(x)$ هستند، پس ریشه‌های $-۲x^۲+۳x+۲=۰$ هستند، یعنی:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-۱\Rightarrow\beta=\frac{-۱}{\alpha}\end{cases}$$

$$\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{۲۱\alpha}=\frac{۱}{۲۱}(\frac{\alpha^۴-\beta^۲}{\alpha})=\frac{۱}{۲۱}(\alpha^۳-\frac{\beta^۲}{\alpha})=\frac{۱}{۲۱}(\alpha^۳+\beta^۳)$$

$$=\frac{۱}{۲۱}(S^۳-۳PS)=\frac{۱}{۲۱}(\frac{۲۷}{۸}-۳(-۱)(\frac{۳}{۲}))=\frac{۱}{۲۱}\times\frac{۲۷+۳۶}{۸}=\frac{۱}{۲۱}\times\frac{۶۳}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

ماز

۶- هرگاه a و α ریشه‌های $x^۲+۲x+۶m=۰$ و b و α ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x+۳m=۰$ باشند و $m\neq ۰$ باشد، مقدار $a^۲+b^۲$ چه عددی است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۸ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

α ریشهٔ مشترک دو معادله است پس در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\alpha^۲+۲\alpha+۶m=۰\\ \alpha^۲-\alpha+۳m=۰\end{cases}\Rightarrow ۲\alpha+۶m=-\alpha+۳m\Rightarrow ۳\alpha=-۳m\Rightarrow \alpha=-m$$

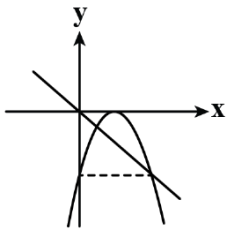
$$\Rightarrow m^۲-۲m+۶m=۰\Rightarrow m^۲+۴m=۰\Rightarrow \begin{cases}m=۰ \text{ غ‌ق‌ق}\\ m=-۴\Rightarrow \alpha=۴\end{cases}$$

ریشهٔ مشترک $\alpha=۴$ است:

$$\begin{cases}x^۲+۲x-۲۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۶)=۰\Rightarrow a=-۶\\ x^۲-x-۱۲=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۳)=۰\Rightarrow b=-۳\end{cases}$$

$$a^۲+b^۲=۳۶+۹=۴۵$$

۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ و خط $y=-۶x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{b}{ac}$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶ و ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

فرض کنیم f در نقطه‌ای به طول α بر محور xها مماس شده باشد، پس $f(x)=a(x-\alpha)^۲$ و $a<۰$ است.

با توجه به این‌که طول رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطهٔ هم عرض روی سهمی است، پس:

$$f(۰)=f(۲\alpha)=c\Rightarrow A\begin{vmatrix}۲\alpha\\ c\end{vmatrix}\in f$$

نقطهٔ A روی خط $y=-۶x$ قرار دارد، پس:

$$c=-۱۲\alpha\ ,\ f(x)=a(x^۲-۲\alpha x+\alpha^۲)=ax^۲-۲a\alpha x+a\alpha^۲\xrightarrow{x=۰}a\alpha^۲=-۱۲\alpha\Rightarrow a\alpha=-۱۲\Rightarrow a=\frac{-۱۲}{\alpha}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۱۲}{\alpha}x^۲+۲۴x-۱۲\alpha\Rightarrow\begin{cases}ac=۱۴۴\\ b=۲۴\end{cases}$$

$$\frac{b}{ac}=\frac{۲۴}{۱۴۴}=\frac{۱}{۶}$$

۸- اگر α و β جواب‌های $x^۲-۱۶x+۴=۰$ باشند، مقدار عبارت $\sqrt{\frac{\alpha^۲+۴}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^۲+۴}{\alpha}}$ چه عددی است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

α و β جواب‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^۲-۱۶\alpha+۴=۰\Rightarrow\alpha^۲+۴=۱۶\alpha$$

$$\beta^۲-۱۶\beta+۴=۰\Rightarrow\beta^۲+۴=۱۶\beta$$

$$\alpha+\beta=۱۶$$

$$\alpha\beta=۴\Rightarrow\begin{cases}\beta=\frac{۴}{\alpha}\\ \alpha=\frac{۴}{\beta}\end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{\alpha^۲+۴}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^۲+۴}{\alpha}}=\sqrt{\frac{۱۶\alpha}{\frac{۴}{\alpha}}}+\sqrt{\frac{۱۶\beta}{\frac{۴}{\beta}}}=\sqrt{۴\alpha^۲}+\sqrt{۴\beta^۲}$$

$$=|۲\alpha|+|۲\beta|=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲(۱۶)=۳۲$$

توجه کنید که چون معادله دارای ۲ جواب مثبت است، پس $\alpha,\beta>۰$ و داریم: $|۲\alpha|+|۲\beta|=۲\alpha+۲\beta$

۱- حاصل عبارت $\sqrt[12]{2}\times\sqrt[3]{3\sqrt{12}}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[6]{108}$ کدام است؟ $A=$

۱) $12\sqrt[3]{4}$ ۲) $12\sqrt[4]{3}$ ۳) $6\sqrt[3]{4}$ ۴) $6\sqrt[4]{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط به خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ ۱۰۰۳)

$$A=\sqrt[6]{108}\times\sqrt[4]{6}\times\sqrt[3]{3\sqrt{12}}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[4]{3\times2}\times\sqrt[3]{\sqrt{3^3\times2^2}}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[4]{3\times2}\times\sqrt[6]{3^3\times2^2}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[12]{3^6\times2^4}\times\sqrt[12]{3^3\times2^3}\times\sqrt[12]{3^6\times2^4}\times\sqrt[12]{2}$$

$$A=\sqrt[12]{3^{15}\times2^{12}}=6\sqrt[12]{3^3}=6\sqrt[4]{3}$$

۲- در تجزیهٔ عبارت $(2x-3)(4x^2-12x+9)-27$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-1$ ۲) $x-2$ ۳) $x-3$ ۴) $x-4$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

روش اول

$$(2x-3)(4x^2-12x+9)-27=(2x-3)(2x-3)^2-27$$

$$=(2x-3)^3-27=(2x-3)^3-3^3 \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} (2x-3-3)\left((2x-3)^2+3(2x-3)+9\right)$$

$$=(2x-6)\left((2x-3)^2+3(2x-3)+9\right)=2(x-3)(4x^2+9-12x+6x-9+9)=2(x-3)(4x^2-6x+9)$$

پس در تجزیه عبارت داده شده عامل $(x-3)$ وجود دارد.

روش دوم

کافی است ریشه‌های عبارت‌های هر یک از گزینه‌ها را در چندجمله‌ای قرار دهیم. اگر حاصل صفر شد بخش‌پذیر است.

$$x=3\Rightarrow P=(2x-3)(4x^2-12x+9)-27=3\times9-27=0$$

اتحاد چاق و لاغر (فیل و فنجان)

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

۳- حاصل عبارت $A=\frac{۲۷-۲\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۴ و ۵۵ و ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{۲۷-۲\sqrt{۲}}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}$$

$$A=\frac{۳^۳-(\sqrt{۲})^۳}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\sqrt{(۲+\sqrt{۲})^۲}$$

$$A=\frac{(۳-\sqrt{۲})(۹+۲+۳\sqrt{۲})}{۳-\sqrt{۲}}-۴\sqrt{۲}+\left|۲+\sqrt{۲}\right|$$

$$A=۱۱+۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}=۱۳$$

رادیکال مرکب

در مورد رادیکال مرکب دو قانون زیر را بلد باشید:

فرم رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

برای ساده کردن عبارت‌های رادیکالی به این فرم باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت مربع کامل نوشته و آن را از زیر رادیکال خارج کنیم:

$$\sqrt{A\pm۲\sqrt{B}}=\left|\sqrt{X}\pm\sqrt{Y}\right| \qquad (X+Y=A\ ,XY=B)$$

قانون رادیکال مرکب

در عبارت $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{۲}}\ ,\ c=\sqrt{a^۲-b}$$

۴- اگر $x^۲-۹x+۱=۰$ باشد، حاصل $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۶۸۲ ۲) ۷۱۲ ۳) ۶۹۲ ۴) ۷۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

$$x^۲-۹x+۱=۰\Rightarrow x^۲+۱=۹x\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } x}\frac{x^۲+۱}{x}=۹\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۹$$

حال داریم:

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x\times\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x})$$

$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=۹^۳-۳(۱)(۹)=۷۲۹-۲۷=۷۰۲$$

اینجوری هم بلد باش...

$$a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$$

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$

۵- حاصل عبارت $A=(\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}})(\sqrt{10-2\sqrt{14}})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) $2\sqrt{11}$ ۳) $4\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{11}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ ۱۰۰۳)

فرض کنیم:

$$\sqrt{5+\sqrt{11}}+\sqrt{5-\sqrt{11}}=t$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 5+\sqrt{11}+5-\sqrt{11}+2\sqrt{(5+\sqrt{11})(5-\sqrt{11})}=t^2$$

$$\Rightarrow t^2=10+2\sqrt{5^2-(\sqrt{11})^2}=10+2\sqrt{14} \xrightarrow{t>0} t=\sqrt{10+2\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow A=(\sqrt{10+2\sqrt{14}})(\sqrt{10-2\sqrt{14}})=\sqrt{10^2-(2\sqrt{14})^2}=\sqrt{100-4\times14}=\sqrt{100-56}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$

سنجش کلاد

۲۴ بهمن ماه ریاضی

۱- با فرض $\log_5^3 \simeq ۰/۶۸$ و $\log_2^5 \simeq ۲/۴$، مقدار تقریبی $\log 3$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴۷}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۵)

با توجه به این‌که $\log^{10} = ۱$ می‌باشد، داریم:

$$\log^{10} = \log^{2\times 5} = \log^2 + \log^5 = ۱$$

از طرفی با توجه به فرمول تغییر مبنا یعنی $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ $(a,b,c>۰, b\neq ۱, c\neq ۱)$ داریم:

$$\log_2^5 = \frac{\log^5}{\log^2} \simeq ۲/۴ \xrightarrow{\log^2 = ۱-\log^5} \frac{\log^5}{۱-\log^5} \simeq ۲/۴ \Rightarrow \log^5 \simeq ۲/۴ - ۲/۴\log^5 \Rightarrow ۳/۴\log^5 \simeq ۲/۴$$

$$\Rightarrow \log^5 \simeq \frac{۲/۴}{۳/۴} = \frac{۲۴}{۳۴} \Rightarrow \log^5 \simeq \frac{۱۲}{۱۷}$$

بنابراین:

$$\log_5^3 = \frac{\log^3}{\log^5} \simeq ۰/۶۸ \Rightarrow \log^3 \simeq ۰/۶۸ \times \log^5 \Rightarrow \log^3 \simeq \frac{۶۸}{۱۰۰} \times \frac{۱۲}{۱۷} \Rightarrow \log^3 \simeq \frac{۱۲}{۲۵}$$

تذکر

توجه کنید که در صورت سؤال $\log_2^5 \simeq ۲/۳۲$ می‌باشد اما جهت سهولت محاسبات در طراحی تست آن را $۲/۴$ فرض کرده‌ایم.

ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	مثال
$\log_a^1 = ۰$	$\log_3^1 = ۰$
$\log_a^a = ۱$	$\log_2^2 = ۱$
$\log_a^{b^n} = n\log_a^b$	$\log_5^{125} = \log_5^{5^3} = ۳\log_5^5 = ۳$
$\log_{a^n}^{b^m} = \frac{m}{n}\log_a^b$	$\log^{(۰/۰۱)} = \log^{۱۰^{-۲}} = \frac{-۲}{\frac{۱}{۲}}\log_{۱۰}^{۱۰} = -۴$
$\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$	$\log^4_{\sqrt{2}} + \log^{16}_{\sqrt{2}} = \log^{64}_{\sqrt{2}} = \log^{2^6}_{2^{\frac{1}{2}}} = ۱۲$
$\log_a^{(\frac{b}{c})} = \log_a^b - \log_a^c$	$\log_2^{52} - \log_2^{13} = \log_2^{\frac{52}{13}} = \log_2^4 = ۲$
$\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}$ (تغییر مبنا)	$\log_4^3 = \frac{\log_{۱۰}^3}{\log_{۱۰}^4}$ (تغییر مبنا به ۱۰)
$c^{\log_a^b} = b^{\log_a^c}$	$(۸۱)^{\log_3^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\log_3^{۸۱}} = (\sqrt{2})^4 = ۴$

$\log_a^b \times \log_b^c \times \ldots \times \log_n^m = \log_a^m$	$\log_2^3 \times \log_{\sqrt{3}}^7 \times \log_{49}^{\frac{1}{4}}$ $= \log_2^3 \times 2\log_3^7 \times (-\log_7^2) = -2$
$\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a} \quad a,b \neq 1$	$\log_3^2 = \frac{1}{\log_2^3}$

۲- اگر $(\log_2^{4x}) \times (\log_4^{\frac{x}{4}}) = 5$ باشد، مقدار $\log_2^{4x}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۳ ـ ۱۱۰۵)

بررسی سریع:

$$\log_4^{\frac{x}{4}} \times \log_2^{4x} = 5 \Rightarrow (\log_2^x - \cancel{\log_2^4}^{2}) \times (\log_2^x + \cancel{\log_2^4}^{2}) = 5 \Rightarrow (\log_2^x)^2 - 4 = 5 \Rightarrow (\log_2^x)^2 = 9 \Rightarrow \log_2^x = \pm 3$$

$$\log_2^{4x} = \log_2^x + \log_2^4 = \pm 3 + 2 = -1 \text{ یا } 5$$

طبق نکتهٔ گفته‌شده در انتهای سؤال داریم:

$$(\log_4^{\frac{x}{4}}) \times (\log_2^{4x}) = 5 \Rightarrow (\log_2^x - \log_2^4)(\log_2^x + \log_2^4) = 5 \xrightarrow{\log_2^4 = 2} (\log_2^x)^2 - 2^2 = 5$$

$$\Rightarrow (\log_2^x)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \log_2^x = 3 \\ \log_2^x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2^3 = 8 \\ x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \end{matrix}$$

حال به محاسبهٔ $\log_2^{4x}$ می‌پردازیم:

$$x = 8 \Rightarrow \log_2^{4x} = \log_2^{32} = \log_2^{2^5} = 5$$

$$x = \frac{1}{8} \Rightarrow \log_2^{4x} = \log_2^{\frac{1}{2}} = \log_2^{2^{-1}} = -1$$

که فقط -1 در گزینه‌ها موجود است.

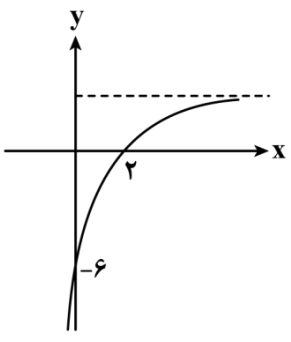
یه نکتهٔ طلایی

اگر a، b و c سه عدد مثبت و $c \neq 1$ باشد، آن‌گاه:

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۳- نمودار تابع $f(x) = 2 - 2^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-22)$ کدام است؟



۱) $-\log_3^2$

۲) $-\log_2^3$

۳) $-2\log_2^3$

۴) $-2\log_3^2$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۸ ـ ۱۱۰۵)

با توجه به نمودار تابع، مختصات نقاط $A(۰,-۶)$ و $B(۲,۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند، بنابراین:

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۲-۲^{۲b+c}=۰\Rightarrow ۲^{۲b+c}=۲\Rightarrow ۲b+c=۱$$

$$f(۰)=-۶\Rightarrow ۲-۲^{c}=-۶\Rightarrow ۲^{c}=۸\Rightarrow c=۳\xrightarrow{۲b+c=۱} ۲b+۳=۱\Rightarrow ۲b=-۲\Rightarrow b=-۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=۲-۲^{-x+۳}$ می‌باشد. برای محاسبهٔ $f^{-۱}(-۲۲)$ داریم:

$$f^{-۱}(-۲۲)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=-۲۲\Rightarrow ۲-۲^{-\alpha+۳}=-۲۲\Rightarrow ۲^{-\alpha+۳}=۲۴\Rightarrow ۲^{-\alpha}\times ۲^{۳}=۲۴\Rightarrow ۲^{-\alpha}=۳$$

از دو طرف رابطهٔ $۲^{-\alpha}=۳$ لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$۲^{-\alpha}=۳\Rightarrow \log_{۲}^{۲^{-\alpha}}=\log_{۲}^{۳}\Rightarrow -\alpha=\log_{۲}^{۳}\Rightarrow \alpha=-\log_{۲}^{۳}$$

تابع نمایی

هر تابع به فرم $f(x)=a^{x}$ $(a>۰,a\neq ۱)$ را **تابع نمایی** می‌گوییم $\Leftarrow$ x در توان و پایه **عددی مثبت** و **مخالف یک** می‌باشد.

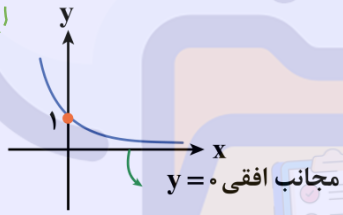
یه نمونهٔ باحال ببین

حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=(۲m-۱)^{x}$ نمایی باشد:

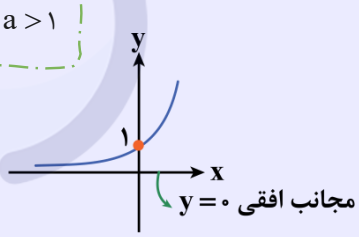
$$\begin{matrix}۲m-۱>۰\\ ۲m-۱\neq ۱\end{matrix}\Rightarrow m>\frac{۱}{۲},m\neq ۱$$

نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ $(a>۰,a\neq ۱)$ در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$y=a^{x}$ $۰<a<۱$ نزولی



$y=a^{x}$ $a>۱$ صعودی



دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(۰,+\infty)$ می‌باشد.

هر خط که به موازات محور x ها رسم شود نمودار را در **حداکثر یک نقطه** قطع می‌کند، بنابراین تابع **یک‌به‌یک** و **معکوس‌پذیر** است.

نکته

اگر $A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ نقطه‌ای روی تابع $y=f^{-۱}(x)$ باشد، داریم:

$$A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}\in f^{-۱}\Leftrightarrow A\begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}\in f$$

یه نمونهٔ باحال ببین

اگر $f(x)=x^{۳}+x$ باشد، در این صورت $f(۲)=۱۰$ و $f^{-۱}(۱۰)=۲$ است یعنی نقطهٔ $(۲,۱۰)$ روی تابع f و نقطهٔ $(۱۰,۲)$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد.

برای حل معادلاتی به فرم $a^{x}=b$ $(a>۰,a\neq ۱)$ که a و b را نمی‌توان برحسب پایه‌های یکسان نوشت، کافی است از دو طرف لگاریتم در مبنای a بگیریم.

$$a^{x}=b\Rightarrow \log_{a}^{a^{x}}=\log_{a}^{b}\Rightarrow x=\log_{a}^{b}$$

یه نمونهٔ باحال ببین

معادلهٔ $۲^{x+۱}=۷$ را حل کنید.

$$۲^{x+۱}=۷ \xrightarrow{\text{از ۲ طرف لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم}} \log_۲^{۲^{x+۱}}=\log_۲^۷ \Rightarrow x+۱=\log_۲^۷ \Rightarrow x=\log_۲^۷-۱$$

ماز

۴- معادلهٔ $\log_۲^{|x+۲|}+\log_۲^{(x^۲-۲x+۴)}=۳$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۱۲ و ۱۱۳ ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید عبارت $x^۲-۲x+۴$ همواره مثبت است. (چرا؟) پس می‌توان برای آن قدرمطلق قرار داد!

$$\log_۲^{|x+۲|}+\log_۲^{|x^۲-۲x+۴|}=۳ \Rightarrow \log_۲^{|x+۲||x^۲-۲x+۴|}=۳ \Rightarrow \log_۲^{|x^۳+۸|}=۳ \Rightarrow |x^۳+۸|=۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۳+۸=۸ \Rightarrow x^۳=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x^۳+۸=-۸ \Rightarrow x^۳=-۱۶ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-۱۶}=-۲\sqrt[۳]{۲} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر ۲ جواب دارد.

معادلات لگاریتمی

به معادله‌ای که در آن x جلوی لگاریتم قرار بگیرد، معادلهٔ لگاریتمی می‌گوییم. معادلات لگاریتمی را به ۲ نوع تقسیم می‌کنیم:

۱) در معادلهٔ نوع اول، لگاریتم با **یک عدد** مساوی می‌شود. $\log_b^a=c \Rightarrow a=b^c$

۲) در معادلهٔ نوع دوم، دو عبارت لگاریتمی با مبنای یکسان، **مساوی** می‌شوند. $\log_b^a=\log_b^c \Rightarrow a=c$

پس از حل معادلهٔ لگاریتمی باید درستی جواب‌ها را چک کنیم تا در دامنهٔ تعریف لگاریتم قرار داشته باشند.

یه نمونهٔ باحال ببین

معادلات زیر را حل کنید:

$\log_۳^{x+۱}-۲=۰$

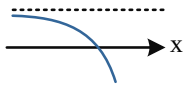
$\log_۳^{x+۱}=۲ \Rightarrow x+۱=۳^۲ \Rightarrow x=۸$ قابل قبول

$\log_۵^{۲x+۱}-\log_۵^{x-۲}=۰$

$\log_۵^{۲x+۱}=\log_۵^{x-۲} \Rightarrow ۲x+۱=x-۲ \Rightarrow x=-۳$ غیرقابل قبول، زیرا جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند.

ماز

۵- نمودار تابع $f(x)=۲^{x+k}-۲^{x+۲}+۲^k$ در شکل مقابل رسم شده است. حدود k کدام است؟



۱) $k<۲$
۲) $k>۲$
۳) $۱<k<۲$
۴) $۰<k<۲$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

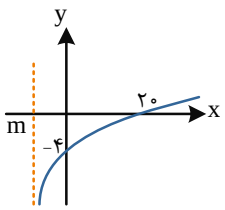
توجه کنید که:

$$f(x)=۲^x(۲^k-۲^۲)+۲^k=(۲^k-۴)۲^x+۲^k$$

چون تابع $y=۲^x$ اکیداً صعودی است، ولی تابع f اکیداً نزولی است، پس $۲^k-۴$ باید عددی منفی باشد، بنابراین:

$$۲^k-۴<۰\Rightarrow ۲^k<۴\Rightarrow k<۲$$

۶- نمودار تابع $f(x)=\log_a^{(۳x+b)}-c$ در شکل مقابل، رسم شده است. مقدار m کدام است؟



۱) $\frac{۲۰}{۱-a^۴}$
۲) $\frac{۳۰}{۱-a}$
۳) $\frac{۶۰}{۱-a^۴}$
۴) $\frac{۲۰}{۱-a}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

نمودار تابع f از نقاط $(۰,-۴)$ و $(۰,۲۰)$ عبور کرده است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(۰)=-۴\Rightarrow \log_a^b-c=-۴\Rightarrow \log_a^b=c-۴\Rightarrow b=a^{c-۴} \\ f(۲۰)=۰\Rightarrow \log_a^{(۶۰+b)}-c=۰\Rightarrow \log_a^{(b+۶۰)}=c\Rightarrow b+۶۰=a^c \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{b+۶۰}{b}=\frac{a^c}{a^{c-۴}}\Rightarrow \frac{b+۶۰}{b}=a^۴\Rightarrow ۱+\frac{۶۰}{b}=a^۴\Rightarrow \frac{۶۰}{b}=a^۴-۱\Rightarrow b=\frac{۶۰}{a^۴-۱}$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(m,+\infty)$ است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۳x+b>۰\Rightarrow x>-\frac{b}{۳}\Rightarrow D_f=(-\frac{b}{۳},+\infty)$$

در نتیجه:

$$m=-\frac{b}{۳}=-\frac{۶۰}{۳(a^۴-۱)}\Rightarrow m=\frac{۲۰}{۱-a^۴}$$

دامنه لگاریتم چطوری به دست می‌آید؟

برای به‌دست آوردن دامنه تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$، باید شروط زیر را بررسی کنیم:

۱) $f(x)>۰$ (عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشه) ۲) $g(x)>۰$ (مبنای لگاریتم مثبت باشه) ۳) $g(x)\neq ۱$ (مبنای لگاریتم یک نباشه)

پس از حل نامساوی‌های بالا، برای به دست آوردن دامنه، بین جواب‌های به‌دست آمده **اشتراک** می‌گیریم، به عبارتی دیگر:

$$y=\log_{g(x)}^{f(x)}\quad D_y:\{x\,|\,f(x)>۰\ ,\ g(x)>۰\ ,\ g(x)\neq ۱\}$$

تکنیک تستی

هرگاه دامنه تابع $\log_c^{(ax+b)}$ به صورت $(-\infty,k)$ یا به صورت $(k,+\infty)$ باشد، $x=k$ ریشه عبارت $(ax+b)$ است.

۷- جرم نوعی مادهٔ رادیواکتیو هر ۲۰ سال دو سوم برابر می‌شود. اگر ۳۰۰ گرم از این ماده موجود باشد، پس از حداقل چند سال جرم آن کمتر از ۱۰ گرم می‌شود؟ $(\log ۳ \simeq ۰/۵ \ , \ \log ۲ \simeq ۰/۳)$

۱) ۱۵۱ ۲) ۷۶ ۳) ۳۰۱ ۴) ۱۷۶

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

فرض کنید در یک دورهٔ زمانی جرم ماده $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود. اگر m گرم از این ماده موجود باشد، آن‌گاه جرم این ماده در دوره‌های زمانی مختلف مطابق جدول زیر خواهد بود:

دورهٔ زمانی	۱	۲	۳	n
جرم پس از دوره	$\frac{۲}{۳}m$	$(\frac{۲}{۳})^۲ m$	$(\frac{۲}{۳})^۳ m$	$(\frac{۲}{۳})^n m$

بنابراین پس از n سال جرم باقی‌مانده برابر $۳۰۰ \times (\frac{۲}{۳})^n$ خواهد بود، در نتیجه:

$$(\frac{۲}{۳})^n \times ۳۰۰ < ۱۰ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^n < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow \log(\frac{۲}{۳})^n < \log(\frac{۱}{۳۰})$$

$$\Rightarrow n \log \frac{۲}{۳} < -\log ۳۰ \Rightarrow n(\log ۲ - \log ۳) < -\log ۳ - ۱$$

$$\Rightarrow n > \frac{۱ + \log ۳}{\log ۳ - \log ۲} \Rightarrow\Rightarrow n > \frac{۱ + ۰/۵}{۰/۵ - ۰/۳} = ۷/۵$$

بنابراین باید بیش از $۱۵۰ = ۲۰ \times ۷/۵$ سال طی شود تا جرم ماده کمتر از ۱۰ گرم شود، یعنی حداقل باید ۱۵۱ سال طی شود.

مقدار یک ماده با گذشت زمان چجوری کم می‌شه؟! باید رادیواکتیو باشه!

اگر مقدار اولیه $A_۰$ بعد از گذشت m واحد زمانی k برابر شود، مقدار آن بعد از t واحد زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$A_۰$ = مقدار در لحظه شروع

$f(t)$ = مقدار پس از گذشته t واحد زمانی

$$f(t) = A_۰ k^{\frac{t}{m}}$$

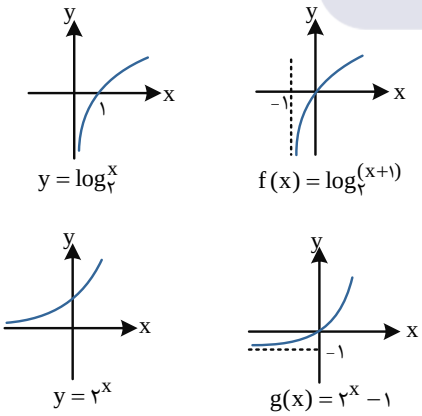
گروه آموزشی ماز

۸- نمودار تابع $f(x) = \log_۲^{(x+۱)}$ در دو نقطه نمودار تابع $g(x) = ۲^x - ۱$ را قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر چقدر است؟

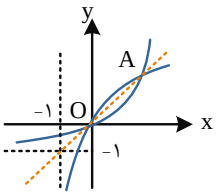
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

به نمودار این توابع توجه کنید:



بنابراین نمودار توابع f و g مطابق شکل زیر یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که یکی مبدأ مختصات و دیگری نقطهٔ A است.



$g(x) = ۲^x - ۱$

توجه کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند و نقاط تقاطع نمودارهای آن‌ها روی خط $y = x$ قرار دارد. می‌توان حدس زد که نقطهٔ A نقطهٔ $(۱,۱)$ است:

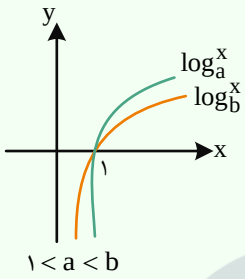
$$f(۱) = \log_{۲}^{(۱+۱)} = ۱ \quad , \quad g(۱) = ۲^{۱} - ۱ = ۱$$

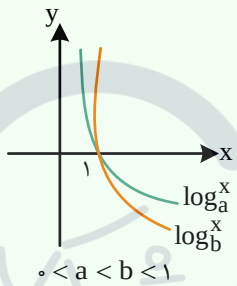
بنابراین:

$$OA = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۲}$$

تغییر مبنا چطوری نمودار log رو عوض می‌کنه؟

مقایسه نمودارهای توابع $f(x) = \log_a^x$ و $g(x) = \log_b^x$:





۱) $x > ۱ \rightarrow f(x) > g(x)$

۲) $x = ۱ \rightarrow f(x) = g(x)$

۳) $۰ < x < ۱ \rightarrow f(x) < g(x)$

به عبارت دیگر در $x > ۱$ هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون **پایین‌تر** قرار می‌گیره و در $۰ < x < ۱$، هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشه، نمودار اون بالاتر قرار می‌گیره.

گروه آموزشی ماز

۹- کدام عدد بزرگ‌تر است؟

۱) $\log_{۲}^{۵}$ ۲) $\log_{۴}^{۲۴}$ ۳) $\log_{۸}^{۶۳}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$\log_{۴}^{۲۴} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲۴} = \log_{۲}^{\sqrt{۲۴}} < \log_{۲}^{\sqrt{۲۵}} \Rightarrow \log_{۴}^{۲۴} < \log_{۲}^{۵}$$

$$\log_{۸}^{۶۳} = \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۶۳} = \log_{۲}^{\sqrt[۳]{۶۳}} < \log_{۲}^{\sqrt[۳]{۱۲۵}} \Rightarrow \log_{۸}^{۶۳} < \log_{۲}^{۵}$$

$$\log_{۲}^{۴} < \log_{۲}^{۵} \Rightarrow ۲ < \log_{۲}^{۵}$$

بنابراین $\log_{۲}^{۵}$ از بقیه اعداد داده شده بزرگ‌تر است.

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر α جواب غیرصفر معادلهٔ $۲^{x^۳} = ۳^{x^۲}$ باشد، مقدار $۳^{۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

از طرفین معادلهٔ داده شده در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم.

$$۲^{x^۳} = ۳^{x^۲} \Rightarrow \log_{۲}^{۲^{x^۳}} = \log_{۲}^{۳^{x^۲}} \Rightarrow x^۳ \log_{۲}^{۲} = x^۲ \log_{۲}^{۳} \Rightarrow x^۳ = x^۲ \log_{۲}^{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \log_{۲}^{۳} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha = \log_{۲}^{۳} \Rightarrow ۳^{۲\alpha} = ۳^{۲\log_{۲}^{۳}} = ۳^۳ = ۲۷$$

لگاریتم گرفتن هم خوب به کار میاد!

در حل برخی از معادلات، باید از دو طرف معادله در یک مبنای مشخص **لگاریتم بگیریم**، به عبارتی:

$$a^{f(x)}=b \xrightarrow[\text{مبنای a لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف تساوی در}} \log_a^{a^{f(x)}}=\log_a^b \Rightarrow f(x)=\log_a^b$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- معادلهٔ $\log_4^x+m\log_x^8=2$ جواب ندارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن m کدام است؟

۱) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ۲) $(\frac{3}{4},+\infty)$ ۳) $(\frac{4}{3},+\infty)$ ۴) $(\frac{2}{3},+\infty)$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_4^x+m\log_x^8=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^x+3m\log_x^2=2 \Rightarrow \log_2^x+\frac{6m}{\log_2^x}=4$$

اگر فرض کنیم $t=\log_2^x$ معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$t+\frac{6m}{t}=4 \Rightarrow t^2-4t+6m=0$$

برای این‌که معادلهٔ بالا جواب نداشته باشد، باید:

$$\Delta<0 \Rightarrow 16-24m<0 \Rightarrow m>\frac{2}{3} \Rightarrow m\in(\frac{2}{3},+\infty)$$

تغییر متغیر همه جا جوابه!

معادلاتی که با تغییر متغیر $\log_a^{f(x)}=t$، به یک معادله جبری (معمولاً درجه ۲) تبدیل می‌شوند.

برای حل این نوع از معادله‌ها، اول با استفاده از **تغییر متغیر** مناسب، معادله را به یک معادله جبری تبدیل می‌کنیم و بعدش با حل معادله جبری، مقدار t رو به‌دست میاریم که با مشخص شدن t، مقدار x هم به‌دست میاد.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $\log_6^4=a$، مقدار $\log_8^{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+2}{3a}$ ۲) $\frac{a+1}{2a}$ ۳) $\frac{a+3}{3a}$ ۴) $\frac{a+2}{2a}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$\log_6^4=a \Rightarrow \log_4^6=\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^6=\frac{1}{a}$$

$$\log_2^3+\log_2^2=\frac{2}{a} \Rightarrow \log_2^3+1=\frac{2}{a} \Rightarrow \log_2^3=\frac{2}{a}-1$$

بنابراین:

$$\log_8^{12}=\frac{1}{3}\log_2^{12}=\frac{1}{3}(\log_2^4+\log_2^3)=\frac{1}{3}(2+\frac{2}{a}-1)=\frac{1}{3}(1+\frac{2}{a})=\frac{a+2}{3a}$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۱

اگر $\log_8^{18}=m$ باشد، حاصل $\log_4^{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}(m+1)$ ۲) $\frac{3m+1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}(m-1)$ ۴) $\frac{3m-1}{4}$

گروه آموزشی ماز

۱۳- حاصل عبارت $A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}\log_{۲}^{۶}}$ کدام است؟

۱) $\log_{۶}^{۱۵}$ ۲) $\log_{۲}^{۱۵}$ ۳) $\log_{۳}^{۵}$ ۴) $\log_{۵}^{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

توجه کنید که:

$$A=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}(\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۲})}=\frac{\log_{۲}^{۳}+۱}{\log_{۳}^{۵}(\log_{۲}^{۳}+۱)}=\frac{۱}{\log_{۳}^{۵}}=\log_{۵}^{۳}$$

سنجش کلاد

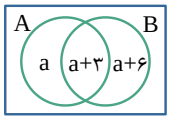
گروه آموزشی ماز

۱- اگر $n(A\cup B)=۳۳$ باشد و $n(A-B)$ و $n(A\cap B)$ و $n(B-A)$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ باشند، مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

اگر تعداد اعضای $A-B$ را a بنامیم، خواهیم داشت:



$$۳a+۹=۳۳\Rightarrow ۳a=۲۴\Rightarrow a=۸$$

بنابراین:

$$n(A)=۲a+۳=۱۹$$

اجتماع و اشتراک چه ربطی به هم دارن؟!

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

دنباله‌ای که d تا d تا زیاد میشه...

دنبالهٔ حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول) با **اضافه شدن عددی ثابت** به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود و به آن **عدد ثابت**، **قدرنسبت دنباله** می‌گویند.

دنبالهٔ حسابی همان **الگوی خطی** است.

$$t_۱=a$$
$$t_۲=t_۱+d=a+d$$
$$t_۳=t_۲+d=a+۲d$$
$$\vdots$$
$$t_n=t_{n-۱}+d=a+(n-۱)d$$

گروه آموزشی ماز

۲- ۴۰ نفر وارد یک باشگاه ورزشی شده‌اند که دارای ۲ دستگاه A و B است. اگر تعداد افرادی که از هیچ دستگاهی استفاده نکرده‌اند، ۱۰ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه A استفاده نکرده‌اند و ۱۸ واحد کمتر از کسانی که از دستگاه B استفاده نکرده‌اند، باشد، حداکثر چند نفر از هر دو دستگاه استفاده کرده‌اند؟

مشابه تمرین کتاب درسی

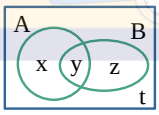
۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

$z+t=$ تعداد افرادی که از دستگاه A استفاده نکرده‌اند

$x+t=$ تعداد افرادی که از دستگاه B استفاده نکرده‌اند

$t=$ تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده نکرده‌اند



خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}(z+t)-t=۱۰\Rightarrow z=۱۰\\(x+t)-t=۱۸\Rightarrow x=۱۸\end{array}\right\}\Rightarrow x+z=۲۸$$

می‌دانیم $x+y+z+t=۴۰$ است.

بنابراین:

$$y+t=۱۲\Rightarrow t=۱۲-y$$

چون $t\geq ۰$ است، خواهیم داشت:

$$۱۲-y\geq ۰\Rightarrow y\leq ۱۲$$

حداکثر تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده کرده‌اند ۱۲ نفر است.

۳- ۵۳۱ سکه را بین ۹ نفر طوری تقسیم کرده‌ایم که تعداد سهم‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر افراد به ترتیب تعداد سهم در یک صف قرار گیرند، نفر نهم ۱۱۱ سکه دارد. نفر هفتم چند سکه دارد؟

۱) ۸۵ ۲) ۸۶ ۳) ۸۷ ۴) ۸۸

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$

می‌دانیم: $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 9a_5 = 531 \Rightarrow a_5 = 59$

از طرفی: $a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2} = \frac{59 + 111}{2} = \frac{170}{2} = 85$

گروه آموزشی ماز

۴- a_n یک الگوی خطی و b_n یک دنبالهٔ حسابی است. اگر b_1 یک واحد بیشتر از a_1 و b_4 دو واحد کمتر از a_4 باشد، $b_2 - a_2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

الگوی خطی همان دنبالهٔ حسابی است.

$$\left.\begin{matrix} a_4 = a_1 + 3d \\ b_4 = b_1 + 3d' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{a_4 - b_4}_{2} = \underbrace{a_1 - b_1}_{-1} + 3(d - d') \Rightarrow d - d' = 1$$

خواهیم داشت: $b_2 - a_2 = b_1 + d' - (a_1 + d) = (b_1 - a_1) + (d' - d) = 1 + (-1) = 0$

گروه آموزشی ماز

۵- دنبالهٔ $a_n : a, b, c$ یک دنبالهٔ حسابی و دنبالهٔ $b_n : b-a, b, a+b$ یک دنبالهٔ هندسی است. مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر ۶ است. حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

جملات دنبالهٔ حسابی: $a_n : a, a+d, a+2d$

جملات دنبالهٔ هندسی: $b_n : d, d+a, d+2a$

دنبالهٔ b_n نیز یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت a است و چون یک دنبالهٔ هندسی نیز می‌باشد، پس دنبالهٔ ثابت است. در نتیجه: $a = 0$

خواهیم داشت: $a_n : 0, d, 2d$ مجموع جملات $= 0 + d + 2d = 6 \Rightarrow d = 2$

$b_n : d, d, d \Rightarrow b_n : 2, 2, 2 \Rightarrow$ حاصل‌ضرب جملات $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

دنباله هندسی و حسابی یکی شدن!

دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، یک دنبالهٔ **ثابت** است.

گروه آموزشی ماز

۶- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم مربع جملهٔ دوم بوده و جملهٔ هفتم ۶ واحد بیشتر از جملهٔ سوم است. جملهٔ نهم چند واحد بیشتر از جملهٔ پنجم است؟

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt[4]{3}$ ۴) $6\sqrt[4]{27}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

a_n دنبالهٔ موردنظر است. می‌دانیم:

$a_5 = a_2^2 \Rightarrow aq^4 = (aq)^2 \Rightarrow aq^4 = a^2q^2 \Rightarrow a = q^2$

همچنین: $a_7 - a_3 = 6 \Rightarrow aq^6 - aq^2 = 6 \Rightarrow a(a^3) - a(a) = 6 \Rightarrow a^4 - a^2 - 6 = 0$

$\Rightarrow (a^2 + 2)(a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

چون $a = q^۲$ می‌باشد. بنابراین $a = \sqrt{۳}$ قابل قبول است.

خواهیم داشت: $a_۹ - a_۵ = aq^۸ - aq^۴ = a^۵ - a^۳ = ۹\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$

حالا دنبالهٔ هندسی چی بود؟

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول) از **ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و ناصفر** به دست می‌آید. این عدد را **قدرنسبت** می‌نامیم. جملهٔ اول هم باید ناصفر باشد.

$$t_۱ = a$$
$$t_۲ = t_۱.r = ar$$
$$t_۳ = t_۲.r = ar^۲$$
$$\vdots$$
$$t_n = t_{n-۱}.r = ar^{n-۱}$$

گروه آموزشی ماز

۷- جملات اول، ششم و چهار برابر جملهٔ نهم در یک دنبالهٔ حسابی با جملات مثبت به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. جملهٔ دوم دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

اگر a_n دنبالهٔ حسابی باشد $a_۱$ و $a_۶$ و $۴a_۹$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. بنابراین:

$$a_۶^۲ = ۴a_۱a_۹ \Rightarrow (a+۵d)^۲ = ۴a(a+۸d) \Rightarrow ۳a^۲ + ۲۲ad - ۲۵d^۲ = ۰$$

دو طرف معادله را بر $d^۲$ تقسیم می‌کنیم. اگر $\frac{a}{d} = k$ باشد، خواهیم داشت:

$$۳(\frac{a}{d})^۲ + ۲۲\frac{a}{d} - ۲۵ = ۰ \Rightarrow ۳k^۲ + ۲۲k - ۲۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۱ \Rightarrow \frac{a}{d} = ۱ \Rightarrow a = d \\ k = -\frac{۲۵}{۳} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

جملات دنبالهٔ حسابی مثبت می‌باشند. در نتیجه نسبت $\frac{a}{d}$ مثبت است. در نتیجه:

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a+d}{a} = \frac{۲a}{a} = ۲$$

قِلقش رو یاد بگیر!

میگی از کجا بفهمیم باید معادله درجه ۲ رو به $d^۲$ تقسیم کنیم؟ باید ببینی سوال چی رو میخواد! $\frac{a_۲}{a_۱} = ۱ + \frac{d}{a}$

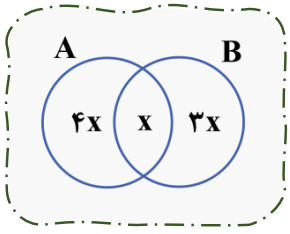
پس فقط کافیه نسبت $\frac{d}{a}$ رو حساب کنیم!

۸- اگر A و B دو مجموعه و $n(A \cap B') = n(B) = ۴n(A \cap B)$ و $n(A \cup B) = ۲۴$ باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ $B - A$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ ـ ۱۰۰۱)

فرض کنیم $n(A \cap B) = x$ باشد، در این صورت نمودار ون به شکل مقابل خواهد بود:



$$n(A \cup B) = ۴x + x + ۳x = ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$
$$\Rightarrow n(B - A) = ۳x = ۹$$

۹- در دنبالهٔ حسابی a_n با فرض $a_1+a_2+a_3=18$ و $a_2a_3=48$، واسطهٔ هندسی جملات اول و هفتم این دنباله کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ⏲ ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۲۲ و ۲۶ ـ ۱۲۰۲)

$$a_1+a_2+a_3=18 \Rightarrow a_1+a_1+d+a_1+2d=18$$

$$\Rightarrow 3a_1+3d=18 \Rightarrow \underbrace{a_1+d}_{a_2}=6 \Rightarrow a_2=6 \xrightarrow{a_2a_3=48} a_3=8$$

$$\begin{cases} a_2=6 \\ a_3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+d=6 \\ a_1+2d=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ a_1=4 \end{cases} \Rightarrow a_7=a_1+6d=16$$

پس واسطهٔ هندسی a_1 و a_7 برابر با $\pm\sqrt{a_1a_7}=\pm\sqrt{4\times16}=\pm8$ است که مقدار ۸ در گزینه‌ها آمده و جواب است.

۱- هرگاه در داده‌های ۴,۳,۶,۲,۵,۴,۶,۷,۴,۹,۸ اعداد بزرگ‌تر از چارک سوم و اعداد کوچک‌تر از چارک اول را حذف کنیم، میانگین اعداد مانده چه عددی است؟

۱) $\frac{۳۴}{۷}$ ۲) ۵/۵ ۳) ۵/۲۵ ۴) $\frac{۳۶}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۱ ـ ۱۱۰۷)

بررسی سریع:

$$۲,۳,۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷,۸,۹ \Rightarrow ۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷ \Rightarrow \bar{x}=\frac{۳\times۴+۵+۲\times۶+۷}{۷}=\frac{۳۶}{۷}$$

(چارک اول: ۴، میانه: ۵، چارک سوم: ۶)

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۲,۳,۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷,۸,۹

چون تعداد داده‌ها ۱۱ تا است پس دادهٔ وسط (ششمین عدد) که برابر ۵ می‌باشد میانه را نشان می‌دهد. ۵ داده قبل و ۵ داده بعد از میانه قرار دارد که میانهٔ نیمهٔ اول همان چارک اول و میانهٔ نیمهٔ دوم همان چارک سوم است، بنابراین:

۲,۳,۴,۴,۴,۵ , ۶,۶,۷,۸,۹

(چارک اول: ۴، میانه: ۵، چارک سوم: ۶)

داده‌های قبل از چارک اول و بعد از چارک سوم را حذف می‌کنیم. ببینید:

$$۴,۴,۴,۵,۶,۶,۷ \Rightarrow \text{میانگین } \bar{x}=\frac{۴+۴+۴+۵+۶+۶+۷}{۷}=\frac{۳۶}{۷}$$

معیار پراکندگی داده‌ها

چارک‌ها: اگر تعدادی داده داشته باشیم برای محاسبهٔ چارک داده‌ها، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. میانه همان چارک دوم ($Q_۲$) می‌باشد. با مشخص کردن میانه، داده‌ها به دو نیمه تقسیم می‌شوند. میانهٔ نیمهٔ اول، همان چارک اول ($Q_۱$) و میانهٔ نیمهٔ دوم، همان چارک سوم ($Q_۳$) می‌باشد.

نکته

اگر تعداد داده‌ها (n) فرد باشد، میانه دادهٔ شمارهٔ $\frac{n+۱}{۲}$ است و در هر نیمه از داده‌ها $\frac{n-۱}{۲}$ تا عدد داریم. مثلاً در ۱۳ داده، دادهٔ شمارهٔ $\frac{۱۳+۱}{۲}=۷$ میانه است و در هر نیمه $\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$ داده داریم. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد میانه همان میانگین (معدل) داده‌های $\frac{n}{۲}$ و $\frac{n}{۲}+۱$ است و در هر طرف آن $\frac{n}{۲}$ داده داریم.

۲- میانگین اعداد $a,a+۲,a+۴,a+۶$ با واریانس آن‌ها برابر می‌باشد. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۵۸ ـ ۱۱۰۷)

روش اول

ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{a+(a+۲)+(a+۴)+(a+۶)}{۴}=\frac{۴a+۱۲}{۴}=a+۳$$

حال به محاسبهٔ واریانس می‌پردازیم:

$$\sigma^۲=\frac{(\overset{۳}{\cancel{(a+۳)}}-(a))^۲+(\overset{۱}{\cancel{(a+۳)}}-(a+۲))^۲+(\overset{-۱}{\cancel{(a+۳)}}-(a+۴))^۲+(\overset{-۳}{\cancel{(a+۳)}}-(a+۶))^۲}{۴}=\frac{۹+۱+۱+۹}{۴}=۵$$

بنابراین:

$$\sigma^۲=\bar{x}\Rightarrow a+۳=۵\Rightarrow a=۲$$

روش دوم

چون داده‌ها تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند، طبق درسنامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}=\frac{a+(a+۶)}{۲}=a+۳\\ \sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۴^۲-۱}{۱۲}\times۲^۲=\frac{۱۵}{۱۲}\times۴=۵\end{array}\right\}\Rightarrow\bar{x}=\sigma^۲\Rightarrow a+۳=۵\Rightarrow a=۲$$

فرمول‌های اصلی آمار

اگر $x_۱,x_۲,x_۳,\ldots,x_n$ داده‌های آماری باشند، آن‌گاه:

۱) میانگین $\Rightarrow\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n}$

۲) دامنهٔ تغییرات $\Rightarrow R=x_{max}-x_{min}=$ بزرگ‌ترین داده $-$ کوچک‌ترین داده

۳) واریانس $\Rightarrow\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\ldots+(x_n-\bar{x})^۲}{n}$ یا $\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲+\ldots+x_n^۲}{n}-\bar{x}^۲$

۴) انحراف معیار $\Rightarrow\sigma=\sqrt{\text{واریانس}}$

۵) ضریب تغییرات $\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$

اگر داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند:

میانگین داده‌ها برابر میانگین ۲ جملهٔ متساوی‌الفاصله از دو طرف است.

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_n}{۲}=\frac{x_۲+x_{n-۱}}{۲}=\ldots$$

اگر تعداد داده‌ها برابر n و قدرنسبت داده‌ها d باشد، واریانس برابر است با: $\sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}\times d^۲$

یه نمونهٔ باحال ببین

واریانس داده‌های $۱,۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹$ را محاسبه کنید.

$$\bar{x}=\frac{۱+۱۹}{۲}=۱۰\Rightarrow\sigma^۲=\frac{۷^۲-۱}{۱۲}\times۳^۲=\frac{۴۸}{۱۲}\times۹=۳۶$$

۳- **کدام دسته از متغیرها به ترتیب، کمی گسسته، کیفی اسمی و کیفی ترتیبی است؟**

۱) شاخص تودهٔ بدن، گروه خونی، جنسیت

۲) تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، گروه خونی، قد افراد

۳) تعداد شهرهای یک استان، نژاد افراد، سطح تحصیلات

۴) وزن افراد، مراحل رشد یک انسان، میزان بارندگی

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط به خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۶۷ ـ ۱۰۰۷)

کمی پیوسته: شاخص تودهٔ بدن، وزن افراد، قد افراد

کمی گسسته: تعداد تماشاگرهای یک مسابقه، تعداد شهرهای یک استان

کیفی اسمی: گروه خونی، جنسیت، نژاد افراد

کیفی ترتیبی: سطح تحصیلات، مراحل رشد یک انسان

با توجه به دسته‌بندی‌های گفته شده گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح می‌باشد.

انواع متغیرهای کمی

متغیر کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین a و b را نیز بتواند به خود بگیرد، مثلاً قد یک فرد می‌تواند ۱/۶ متر، ۱/۷ متر و یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

یه نمونه بگم؟

سرعت خودرو، وزن افراد، شاخص تودهٔ بدنی، دمای هوا در قلهٔ کوه و ...

متغیر کمی گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد (نه بابا! عجب نکته خفنی)

اینم یه نمونهٔ دیگه

تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه، تعداد سوالات کنکور ....

انوع متغیرهای کیفی

متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که نوعی ترتیب طبیعی دارد.

چنتا نمونه ببینیم

ـ سطح تحصیلات یک فرد (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

ـ مراحل رشد انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میانسال، کهن‌سال)

ـ میزان هوش یک فرد (زیاد، متوسط، کم)

ـ مقام یک ورزشکار در مسابقه (اول، دوم، سوم و ...)

متغیر کیفی اسمی: به متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم.

یه نمونهٔ باحال

جنسیت افراد (زن و مرد)، انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی و برفی)

نکته

بعضی وقتا شناسایی نوع متغیر کمی پیچیده می‌شه و برای تشخیص اون باید به نوع بیان اون متغیر دقت کنیم. مثلاً در مورد بارندگی می‌توانیم متغیرهای پایین رو تعریف کنیم:

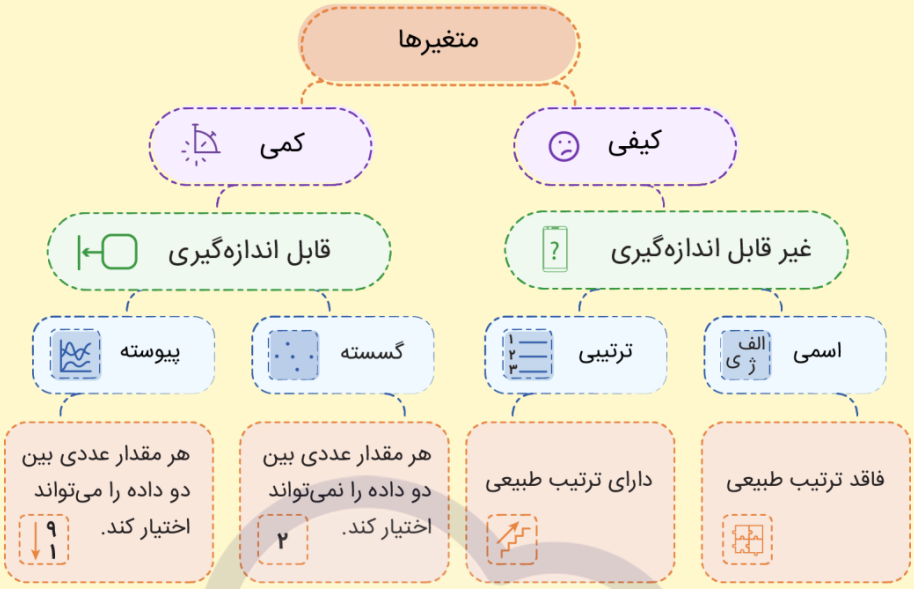
میزان بارندگی: یک متغیر کمی پیوسته است، چرا که میزان بارندگی همواره به صورت عددی بیان شده و می‌تواند هر مقداری را داشته باشد.

شدت بارندگی: یک متغیر کیفی ترتیبی است، چرا که شدت بارندگی می‌تواند به صورت کم، متوسط و زیاد بیان شود.

نوع بارندگی: یک متغیر کیفی اسمی است، چرا که نوع بارندگی می‌تواند به صورت باران، برف و ... باشد.

حالا به کمک چیزایی که گفتیم، به نظرت میزان آلودگی، شدت آلودگی و نوع آلودگی چه متغیرهایی هستن؟!

اگر پایه باشین یه جمع بندی از این قسمت بکنیم تا مطالب تو مغزمون بهتر دسته بندی بشن!



مثال

۴- واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی فرد چند برابر واریانس اعداد طبیعی و یک رقمی زوج است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۰/۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۵۹ ـ ۱۱۰۷)

بررسی سریع:

اعداد طبیعی و یک رقمی فرد $\Rightarrow 1,3,5,7,9 \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{5^2-1}{12} \times 2^2 = 8$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج $\Rightarrow 2,4,6,8 \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{4^2-1}{12} \times 2^2 = 5$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{8}{5} = 1/6$$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج و فرد را جداگانه می‌نویسیم. ببینید:

اعداد طبیعی و یک رقمی فرد $\Rightarrow 1,3,5,7,9$

اعداد طبیعی و یک رقمی زوج $\Rightarrow 2,4,6,8$

$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \times d^2$

$$\sigma_1^2 = \frac{5^2-1}{12} \times 2^2 = 8$$

$$\sigma_2^2 = \frac{4^2-1}{12} \times 2^2 = 5$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{8}{5} = 1/6$$

تذکر

به عنوان تمرین با روش اصلی، واریانس هر دو دسته از اعداد را محاسبه کنید.

۵- اگر از مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶,۸,...,۹۶,۹۸\}$ سه عدد زوج متوالی انتخاب کنیم، کم‌ترین مقدار ضریب تغییرات چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۷۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲۸۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

می‌دانیم هر ۳ عدد زوج متوالی که انتخاب کنیم، میانگین همان عدد وسطی است. به عنوان مثال ۳عدد زوج متوالی را a، b و c در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$a,b,c \Rightarrow \bar{x}=b \Rightarrow \text{واریانس}\ \sigma^۲=\frac{(\overset{-۲}{\cancel{a-b}})^۲+(\overset{۰}{\cancel{b-b}})^۲+(\overset{۲}{\cancel{c-b}})^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۸}{۳}}$$

بنابراین انحراف معیار هر ۳عدد زوج متوالی برابر $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ است، پس هر چقدر میانگین بیشتر باشد، ضریب تغییرات کم‌تر است. ببینید:

$$۹۴,۹۶,۹۸ \Rightarrow \bar{x}_{max}=۹۶ \Rightarrow CV_{min}=\frac{\sigma}{\bar{x}_{max}}=\frac{\sqrt{\frac{۸}{۳}}}{۹۶}=\frac{\sqrt{۸}}{۹۶\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۹۶\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۴۸\times ۳}=\frac{\sqrt{۶}}{۱۴۴}$$

۶- در چهار داده آماری، میانگین برابر ۳ و واریانس برابر ۲/۵است. اگر ۶ داده برابر میانگین به آن‌ها اضافه کنیم، واریانس ۱۰ دادهٔ به دست آمده، چه عددی است؟

۱) $\frac{۶}{۱۰}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

۴دادهٔ اولیه را $x_۱,x_۲,x_۳,x_۴$ می‌نامیم. بنابراین:

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲}{۴}=۲/۵$$

$$\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲=۱۰$$

حال اگر ۶ دادهٔ مساوی با میانگین اضافه کنیم، در این صورت داده‌ها به صورت زیر هستند:

$$x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,\underbrace{\bar{x},\bar{x},...,\bar{x}}_{۶\text{ تا}}$$

بنابراین واریانس این ۱۰ داده برابر است با:

$$\sigma'^۲=\frac{\overbrace{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+(x_۳-\bar{x})^۲+(x_۴-\bar{x})^۲}^{۱۰}+\overbrace{۶(\bar{x}-\bar{x})^۲}^{۰}}{۱۰}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱$$

تذکر

توجه کنید که اگر n داده برابر با میانگین به داده‌ها اضافه یا کم کنیم، میانگین تغییری نمی‌کند.

۷- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۶ وجود دارد به طوری‌که میانگین مربع آن‌ها ۵۲ می‌باشد. ضریب تغییرات این هشت عدد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۲ صفحهٔ ۱۶۰ ـ ۱۱۰۷)

می‌توانیم برای محاسبهٔ واریانس از رابطهٔ $\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_n^۲}{n} - \bar{x}^۲$ استفاده کنیم. ببینید:

$$x_۱, x_۲, x_۳, ..., x_۸ \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = ۶ \\ \text{میانگین مربع ۸ عدد}: \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_۸^۲}{۸} = ۵۲ \end{cases} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + ... + x_۸^۲}{۸} - \bar{x}^۲$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = ۵۲ - ۶^۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۱۶ \Rightarrow \sigma = ۴$$

بنابراین ضریب تغییرات این ۸ داده برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۱. در یک دنباله‌ی حسابی اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله باشد و $S_۶ - S_۵ = ۱۲$ و $S_۹ - S_۷ = ۶۰$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۶/۸ ۲) ۷/۲ ۳) ۷/۴ ۴) ۷/۸

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $S_n - S_{n-۱} = a_n$ است، پس:

$$S_۶ - S_۵ = ۱۲ \Rightarrow a_۶ = ۱۲ \Rightarrow a_۱ + ۵d = ۱۲ \quad (۱)$$

در ضمن $S_۹ - S_۷ = ۶۰$ است، پس:

$$(a_۱ + ... + a_۸ + a_۹) - (a_۱ + a_۲ + ... + a_۷) = ۶۰ \Rightarrow a_۸ + a_۹ = ۶۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۱۵d = ۶۰ \quad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲)، $d = ۷/۲$ به دست می‌آید.

۲. در یک دنباله‌ی حسابی با ۱۳ جمله‌ی عمومی a_n، مجموع جملات شماره‌های زوج یعنی $a_۲, a_۴, ..., a_{۱۲}$ از مجموع جملات شماره‌های فرد یعنی $a_۱, a_۳, ..., a_{۱۳}$ به اندازه ۷ واحد کمتر است. اگر $a_{۱۱} = ۳a_q$ باشد، جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷ ۲) صفر ۳) ۷- ۴) ۱۴-

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به صورت سوال داریم:

$$(a_۱ + a_۳ + ... + a_{۱۳}) - (a_۲ + a_۴ + ... + a_{۱۲}) = ۷ \Rightarrow a_۱ + \underbrace{(a_۳ - a_۲)}_{d} + \underbrace{(a_۵ - a_۴)}_{d} + ... + \underbrace{(a_{۱۳} - a_{۱۲})}_{d} = ۷ \Rightarrow a_۱ + ۶d = ۷ \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم $a_{۱۱} = ۳a_۹$ است، پس:

$$a_۱ + ۱۰d = ۳(a_۱ + ۸d) \Rightarrow a_۱ = -۷d \quad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲)، $a_۱ = ۴۹$ و $d = -۷$ به دست می‌آید. پس جمله‌ی دهم دنباله برابر است با:

$$a_{۱۰} = a_۱ + ۹d = ۴۹ + ۹(-۷) = -۱۴$$

۳ . اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله‌ی $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ باشند و $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$، آن‌گاه مقادیر m شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

شرط این‌که معادله‌ی $(2m-3)x^2-2mx+m-2=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز باشد:

$$\begin{cases} 2m-3\neq 0 \to m\neq \frac{3}{2} & (1) \\ \Delta>0 \to (-2m)^2-4(2m-3)(m-2)>0 \xrightarrow{\div 4} \end{cases}$$

$$\to m^2-(2m-3)(m-2)>0 \to -m^2+7m-6>0 \to 1<m<6 \quad (2)$$

از طرفی باید $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<1$ باشد:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<1 \to \frac{S}{P}-1<0 \to \frac{S-P}{P}<0$$

$$\to \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2m}{2m-3} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2m-3} \end{cases} \to \frac{\frac{2m}{2m-3}-\frac{m-2}{2m-3}}{\frac{m-2}{2m-3}}<0 \xrightarrow{m\neq\frac{3}{2}} \frac{m+2}{m-2}<0 \to -2<m<2 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} (1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2) \to \text{فاقد عدد طبیعی}$$

۴ . اگر نقطه‌ی رأس سهمی $f(x)=x^2-4x+m^2+3$ در ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $|m|>1$ ۲) $|m|<1$ ۳) $m<2$ ۴) $-3<m<2$

پاسخ: گزینه ۲

برای آن‌که نقطه‌ی رأس سهمی $y=x^2-4x+m^2+3$ در ناحیه‌ی چهارم قرار بگیرد، باید طول رأس سهمی مثبت و عرض رأس سهمی منفی باشد:

۱) $x_S=-\frac{-4}{2(1)}=2>0$

۲) $y_S=(2)^2-4(2)+m^2+3<0 \Rightarrow m^2-1<0 \Rightarrow m^2<1 \Rightarrow |m|<1$

از اشتراک بازه‌ها $|m|<1$ است.

۵ . نمودار تابع $f(x)=x^2-9$ و خط‌های $y=7$ و $y=-5$ در چهار نقطه‌ی A, B, C و D متقاطع‌اند. مساحت ذوزنقه‌ی ABCD کدام است؟

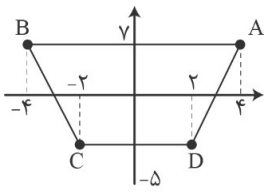
۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲

تابع $f(x)$ را با خط‌های $y=7$ و $y=-5$ تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-9 \\ y=7 \end{cases} \to x^2-9=7 \to x^2=16 \to x=\pm 4 \to A(4,7) \quad , \quad B(-4,7)$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2-9 \\ y=-5 \end{cases} \to x^2-9=-5 \to x^2=4 \to x=\pm 2 \to C(-2,-5) \quad , \quad D(2,-5)$$



$|AB|=۸$

$|CD|=۴$

ارتفاع$=۱۲$

$S_{ABCD}=\frac{\text{مجموع دو قاعده}}{۲}\times\text{ارتفاع}=\frac{۸+۴}{۲}\times۱۲=۷۲$

۶. مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^۲+x+۱}=۱-x-x^۲$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^۲+x+\sqrt{x^۲+x+۱}=۱\xrightarrow{+۱}x^۲+x+۱+\sqrt{x^۲+x+۱}=۲$$

حالا با تغییر متغیر $\sqrt{x^۲+x+۱}=t$ داریم:

$$t^۲+t-۲=۰\Rightarrow(t-۱)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱\\t=-۲\end{cases}$$

$t=-۲\Rightarrow\sqrt{x^۲+x+۱}=-۲\Rightarrow$ فاقد ریشه حقیقی

$t=۱\Rightarrow\sqrt{x^۲+x+۱}=۱\Rightarrow x^۲+x=۰\Rightarrow x=۰,x=-۱$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با: $-۱+۰=-۱$

معادلات گنگ (رادیکالی)

اگر در یک معادله، مجهول زیر رادیکال باشد، به آن معادله گنگ (رادیکالی) می‌گوییم.

معادله $\sqrt{۱-۲x}=x+۱$ یک معادله رادیکالی (گنگ) است.

روش حل معادله

برای حل معادلات گنگ، رادیکال را در یک سمت تساوی صورت تنها می‌کنیم و با توان‌رسانی طرفین معادله، رادیکال را از بین می‌بریم؛ سپس با ساده سازی معادله به جواب می‌رسیم.

در آخر باید توجه داشته باشیم که جواب‌های به دست آمده، باید در معادله صدق کنند. (اگر می‌خواهی روش کلی یادت بمونه، میشه تتا؛ یعنی تنها، توان، آزمایش)

$$\sqrt{x}+x=۶\Rightarrow\sqrt{x}=۶-x\Rightarrow(\sqrt{x})^۲=(۶-x)^۲\Rightarrow x=x^۲-۱۲x+۳۶\Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\ \text{ق ق}\\x=۹\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

نکات

از تساوی $\sqrt[۲n]{A}=B$ نتیجه می‌گیریم $A\geq۰$ و $B\geq۰$ است.

معادله $\sqrt{x-۳}=۱-x$ جواب ندارد، چرا که مجموعه جواب نامعادلات $x-۳\geq۰$ و $۱-x\geq۰$ با هم اشتراک ندارند.

در معادله خاص $(\sqrt[۲n]{A}+\sqrt[۲m]{B}+\cdots=۰)$ که جمع چند رادیکال فرجه زوج برابر صفر است، ریشه معادله، همان ریشه مشترک عبارات زیر رادیکال یعنی $A=B=\cdots=C=۰$ است؛ در واقع جواب، عددی است که تمام رادیکال ها را صفر کند.

$$\sqrt{x^۲-۲x+۱}+\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt[۴]{x-۱}=۰\Rightarrow x=۱$$

در معادلات گنگ با ظاهر پیچیده، حواستان به حوزه تعریف رادیکال‌ها باشد. معمولا بازه جواب محدود به صفر یا یک عدد می‌شود که با جایگذاری آن اعداد تکلیف حل معادله مشخص می‌شود.

در معادله $\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}$ اشتراک حوزه تعریف رادیکال ها، تنها $x=۲$ است؛ چون این عدد در معادله صادق نیست، پس معادله فاقد ریشه حقیقی است.

کاربرد معادله گنگ

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه $(AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲})$ از حل معادله گنگ در مسائلی که بحث فاصله دو نقطه باشد، استفاده می‌کنیم.

۷ . دو فرد A و B در یک شرکت همکار هستند و در هر ۶ ساعت یک دستگاه کامل تولید می‌کنند. اگر سرعت کار فرد B، ۳برابر فرد A باشد، فرد B بعد از چند ساعت به تنهایی یک دستگاه را تولید می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۱

دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$ دستگاه را تولید می‌کنند. سرعت فرد B، ۳ برابر فرد A است پس مدت زمان تولید دستگاه توسط فرد B، $\frac{۱}{۳}$ برابر فرد A است.

$$\text{سرعت B} = ۳ \times \text{سرعت A} \rightarrow t_B = \frac{t_A}{۳} \rightarrow t_A = ۳t_B$$

بنابراین اگر فرد A و B به‌ترتیب در t_A و t_B ساعت یک دستگاه تولید کنند، پس در هر ساعت به ترتیب $\frac{۱}{t_A}$ و $\frac{۱}{t_B}$ از دستگاه را تولید می‌کنند.

از طرفی دو فرد A و B هر ۶ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کنند پس در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$دستگاه را تولید می‌کنند. لذا داریم:

$$\frac{۱}{t_A} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳t_B} + \frac{۱}{t_B} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳t_B} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۲۴ = ۳t_B \Rightarrow t_B = ۸ \Rightarrow t_A = ۲۴$$

پس فرد B به تنهایی در ۸ ساعت یک دستگاه را تولید می‌کند.

۸ . مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{|x-۲|+۳|۲-x|}{|x-۲|+۱۲} < ۱$ شامل چند صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $|x-۲| = |۲-x|$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{|x-۲|+۳|x-۲|}{|x-۲|+۱۲} < ۱ \Rightarrow ۴|x-۲| < |x-۲|+۱۲ \Rightarrow ۳|x-۲| < ۱۲ \Rightarrow |x-۲| < ۴ \Rightarrow -۴ < x-۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۶$$

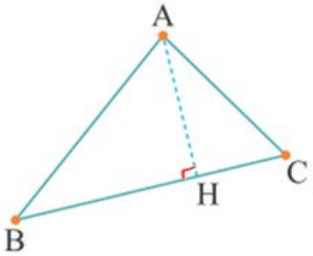
بنابراین مجموعه جواب نامعادله شامل ۷ عدد صحیح $x = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ است.

۹ . اگر رئوس مثلث ABC به صورت A(۱,۹)، B(۳,۳) و C(۷,۱۱) باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به شکل زیر، طول AH، همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از ضلع BC است. برای محاسبه‌ی AH، نیاز به معادله خط BC داریم، پس ابتدا معادله‌ی این خط را به دست می‌آوریم:



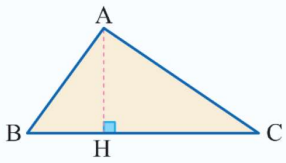
$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{۳-۱۱}{۳-۷} = \frac{-۸}{-۴} = ۲$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x-۳) \Rightarrow ۲x - y - ۳ = ۰$$

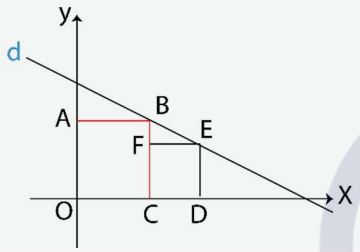
اکنون مقدار AH را به کمک رابطه فاصله‌ی نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|۲(۱) - (۹) - ۳|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵}$$

ارتفاع	تعریف :خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود میشود.
	طول ارتفاع AH : فاصله نقطه A از خط BC است.
	معادله ارتفاع AH : با داشتن مختصات A و عکس و قرینه شیب خط BC می‌توان معادله خط را نوشت: $y-y_A=\frac{-۱}{m_{BC}}(x-x_A)$



۰ . مطابق شکل، دو مربع در ناحیهٔ اول مختصات قرار گرفته‌اند و رأس B و E روی خط d به معادلهٔ $x+۲y-۱۸=۰$ قرار دارد. فاصلهٔ رأس E از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲۹}$

۲) $۶\sqrt{۳}$

۳) ۱۰

۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۱

چون OABC مربع است، پس باتوجه به شکل، طول و عرض نقطهٔ B برابر است، پس آن را به صورت $B(a,a)$ فرض می‌کنیم. حالا چون نقطهٔ B روی خط $x+۲y-۱۸=۰$ قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$a+۲a-۱۸=۰\Rightarrow a=۶$$

حالا اگر ضلع مربع CDEF، را برابر b در نظر بگیریم، آن‌گاه $E(b+۶,b)$ است. این نقطه نیز روی خط d قرار دارد، پس در آن صدق می‌کند:

$$(b+۶)+۲b-۱۸=۰\Rightarrow ۳b=۱۲\Rightarrow b=۴$$

پس $E(۱۰,۴)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OE=\sqrt{(۱۰-۰)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۱۱۶}=۲\sqrt{۲۹}$$

۱. اگر $f(x)=(\frac{m^۲-m-۶}{۳m^۲+۵m-۲})^x$ تابعی نمایی باشد، حدود m شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

در تابع نمایی $y=a^x$ باید $a>۰$ و $a\neq ۱$ باشد:

$$\frac{m^۲-m-۶}{۳m^۲+۵m-۲}>۰ \rightarrow \frac{(m-۳)(m+۲)}{(۳m-۱)(m+۲)}>۰$$

	-۲		$\frac{۱}{۳}$		۳	
$m^۲-m-۶$	+	۰	−	−	۰	+
$۳m^۲+۵m-۲$	+	۰	−	۰	+	+
کل	+	ت	+	ت	−	۰	+

جواب: $(-\infty,\frac{۱}{۳})\cup(۳,+\infty)-\{-۲\}$

از طرفی باید $\frac{m^۲-m-۶}{۳m^۲+۵m-۲}\neq ۱$ باشد:

$$m^۲-m-۶\neq ۳m^۲+۵m-۲ \rightarrow ۲m^۲+۶m+۴\neq ۰$$

$$\rightarrow m\neq -۱,-۲$$

بنابراین حدود m به صورت $(-\infty,\frac{۱}{۳})\cup(۳,+\infty)-\{-۲,-۱\}$ است که شامل سه عدد طبیعی $\{۱,۲,۳\}$ نیست.

۲ اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(۵\sqrt{۲}+۷)^{۳-۳x}<(\sqrt{۲}-۱)^{۲x^۲}$، بازه‌ی (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که:

$$(\sqrt{۲}+۱)^۳=۵\sqrt{۲}+۷$$

$$\sqrt{۲}-۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}$$

بنابراین داریم:

$$(\sqrt{۲}-۱)^{۲x^۲}>(۵\sqrt{۲}+۷)^{۳-۳x} \Rightarrow (\sqrt{۲}+۱)^{-۲x^۲}>(\sqrt{۲}+۱)^{۹-۹x}$$

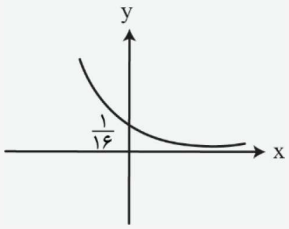
$$\xrightarrow{\sqrt{۲}+۱>۱} -۲x^۲>۹-۹x \Rightarrow ۲x^۲-۹x+۹<۰ \Rightarrow (x-۳)(۲x-۳)<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<۳$$

در نتیجه:

$$b-a=۳-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۳ توابع $f(x)=(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b$ و $g(x)=(a+۱)^x$ مفروض است. اگر نمودار تابع نمایی $gof(x)$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(ab)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه‌ی تابع $gof(x)$ را به دست می‌آوریم: $gof(x)=(a+۱)^{(۴a^۲-۱)x^۲+(۱-۲a)x+b}$

طبق نمودار تابع نمایی داده شده، ضریب $x^۲$ در توان باید صفر باشد: $۴a^۲-۱=۰ \Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$

اگر $a=\frac{۱}{۲}$ باشد، ضریب x نیز صفر شده و تابع ثابت خواهد بود. در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$ قابل‌قبول است. بنابراین:

$$(gof)(x)=(-\frac{۱}{۲}+۱)^{۲x+b} \xrightarrow{\text{نقطه}(۰,\frac{۱}{۱۶})} \frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{۲})^b \Rightarrow b=۴$$

حال $f(ab)$ را به دست می‌آوریم: $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{۲x+۴}$

$$f(ab)=f(-۲)=(\frac{۱}{۲})^{-۴+۴}=(\frac{۱}{۲})^۰=۱$$

۴ اگر $\log_{۱۸}۵۴=\frac{k+۲}{k+۱}$ باشد، حاصل $\log_۳ ۱۲$ کدام است؟

۱) $k+۱$ ۲) $۲k-۱$ ۳) k ۴) $۲k-۲$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا $\log_{۱۸}۵۴$ را ساده می‌کنیم:

$$\log_{۱۸}۱۸\times۳=\log_{۱۸}۱۸+\log_{۱۸}۳=\frac{k+۲}{k+۱} \rightarrow \log_{۱۸}۳=\frac{k+۲}{k+۱}-۱=\frac{۱}{k+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \log_۳ ۱۸=k+۱ \rightarrow \log_۳ ۹\times۲=\log_۳ ۹+\log_۳ ۲=k+۱$$

$$\rightarrow ۲+\log_۳ ۲=k+۱ \rightarrow \log_۳ ۲=k-۱$$

حال $\log_۳ ۱۲$ را ساده کرده و بر حسب $\log_۳ ۲$ می‌نویسیم:

$$\log_۳ ۱۲=\log_۳ ۳\times۲^۲=\log_۳ ۳+\log_۳ ۲^۲=۱+۲\log_۳ ۲$$

$$=۱+۲(k-۱)=۲k-۱$$

۵ اگر $\frac{\log_۲ ۳+\log_۵ ۳}{\log_۲ ۳\times\log_۵ ۳}=a$ باشد، حاصل $\frac{۱}{۱+\log_۲ ۱۵}+\frac{۱}{۱+\log_۵ ۶}$ بر حسب a کدام است؟

۱) $\frac{a+۱}{a}$ ۲) $\frac{a}{a+۱}$ ۳) $\frac{۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{a}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت داده شده در صورت سوال را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\log_2 3+\log_5 3}{\log_2 3\times\log_5 3}=a \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{\log_2 3}{\log_2 3\times\log_5 3}+\frac{\log_5 3}{\log_2 3\times\log_5 3}=\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_2 3}$$

با توجه به نکته‌ی $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_2 3}=\log_3 5+\log_3 2=\log_3 10=a \rightarrow \log_{10} 3=\frac{1}{a}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\frac{1}{1+\log_2 15}+\frac{1}{1+\log_5 6}=\frac{1}{\log_2 2+\log_2 15}+\frac{1}{\log_5 5+\log_5 6}$$

$$=\frac{1}{\log_2 30}+\frac{1}{\log_5 30}=\log_{30} 2+\log_{30} 5=\log_{30} 10$$

$$=\frac{1}{\log_{10} 30}=\frac{1}{\log_{10} 3+\log_{10} 10}=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}=\frac{a}{a+1}$$

۶ اگر $\log_8 5=a$ و $\log_4 3=b$ باشد، مقدار $\log_{15} 9$ کدام است؟

۱) $\frac{2b}{2b+3a}$ ۲) $\frac{4a}{2a+3b}$ ۳) $\frac{4b}{2b+3a}$ ۴) $\frac{2a}{2a+3b}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عبارت‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\log_4 3=b \rightarrow \log_{2^2} 3=b \rightarrow \frac{1}{2}\log_2 3=b \rightarrow \log_2 3=2b\\ \log_8 5=a \rightarrow \log_{2^3} 5=a \rightarrow \frac{1}{3}\log_2 5=a \rightarrow \log_2 5=3a\end{cases}$$

حال با استفاده از تغییر مبنای لگاریتم داریم:

$$\log_{15} 9 \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۲}} \frac{\log_2 9}{\log_2 15}=\frac{\log_2 3^2}{\log_2 3\times 5}=\frac{2\log_2 3}{\log_2 3+\log_2 5}$$

$$=\frac{2(2b)}{2b+3a}=\frac{4b}{2b+3a}$$

۷ اگر $\log_x(3x)\times\log_3 x^3=9$ باشد، حاصل $\log_{(x-3)} 4x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا عبارت‌ها را ساده کرده و x را می‌یابیم:

$$\log_x(3x)\times\log_3 x^3=9 \rightarrow (\log_x 3+1)(3\log_3 x)=9 \Rightarrow (\log_x 3+1)(\log_3 x)=3$$

$$\rightarrow (\log_x 3\times\log_3 x)+\log_3 x=3$$

$$\rightarrow 1+\log_3 x=3 \rightarrow \log_3 x=2$$

$$\rightarrow x=3^2=9$$

با جای‌گذاری $x=9$ داریم:

$$\log_{x-3} 4x=\log_{(9-3)}(4\times 9)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$$

۸ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_2(x-1)\times\log_2(6-x)>0$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه‌ی لگاریتم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}6-x>0\to x<6\\ x-1>0\to x>1\end{cases}\xrightarrow{\cap}1<x<6\qquad(1)$$

حاصل‌ضرب دو عبارت زمانی مثبت است که هر دو عبارت مثبت یا هر دو عبارت منفی باشند:

حالت اول:

$$\log_2(6-x)\times\log_2(x-1)>0$$

$$\to\begin{cases}\log_2(6-x)>0\to 6-x>2^0\to 6-x>1\to x<5\\ \log_2(x-1)>0\to x-1>2^0\to x-1>1\to x>2\end{cases}\xrightarrow{\cap}2<x<5$$

حالت دوم:

$$\begin{cases}\log_2(6-x)<0\to 6-x<2^0\to 6-x<1\to x>5\\ \log_2(x-1)<0\to x-1<2^0\to x-1<1\to x<2\end{cases}\xrightarrow{\cap}\text{جواب ندارد.}$$

$$2<x<5\qquad(2)$$

حال از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$(1,6)\cap(2,5)=(2,5)\to\text{شامل ۲ عدد صحیح است}$$

۹ اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_x|1-x^2|$ به صورت $(a,b)\cup(c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع لگاریتم داریم:

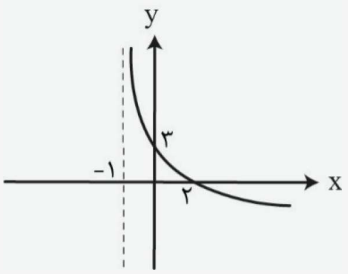
$$y=\log_{g(x)}f(x)\to\text{دامنه:}\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\to\text{اشتراک}\\ g(x)\neq 1\end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)=\log_x|1-x^2|\xrightarrow{\text{دامنه}}\begin{cases}|1-x^2|>0\to x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}\\ x>0\\ x\neq1\end{cases}\xrightarrow{\cap}(0,+\infty)-\{1\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\to\begin{cases}a=0\\ b=1\to a+b+c=2\\ c=1\end{cases}$$

۱۰. نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ به صورت مقابل است. مقدار $\frac{a^۳}{bc}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۹

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

تابع از نقطه‌ی $(۲,۰)$ عبور می‌کند، پس:

$$۱)\ f(۲)=۰ \Rightarrow \log_a(۲b+c)=۰ \Rightarrow ۲b+c=۱$$

در ضمن دامنه‌ی تابع $x>-۱$ است، پس $x=-۱$ ریشه‌ی عبارت جلوی لگاریتم است:

$$۲)\ -b+c=۰ \Rightarrow b=c$$

از (۱) و (۲) مقادیر $b=c=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید. از طرفی نمودار از نقطه‌ی $(۰,۳)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰)=۳ \Rightarrow \log_a \frac{۱}{۳}=۳ \Rightarrow a^۳=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{a^۳}{bc}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}}=۳$$

۱. کدام‌یک از نقاط زیر، می‌تواند روی یک دایره‌ی مثلثاتی باشد؟

۱) $(\tan ۴۸^\circ, \sin x)$ ۲) $(-\frac{۳}{۴}, \frac{\sqrt{۶}}{۴})$ ۳) $(\cos x, \cot ۲۰^\circ)$ ۴) $(۱-\sin\frac{\pi}{۲}, \sin x)$

پاسخ: گزینه ۴ آسان | مفهومی ، محاسباتی- دایره مثلثاتی

می‌دانیم مختصات نقطه‌ی P روی دایره‌ی مثلثاتی به صورت زیر است:

$$P(\cos x, \sin x) \rightarrow \cos^۲ x + \sin^۲ x = ۱$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\tan ۴۸^\circ > ۱ \rightarrow \tan^۲ ۴۸^\circ + \sin^۲ x > ۱$ ✗

۲) $(-\frac{۳}{۴})^۲ + (\frac{\sqrt{۶}}{۴})^۲ = \frac{۹}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶} < ۱$ ✗

۳) $\cot ۲۰^\circ > ۱ \rightarrow \cos^۲ x + \cot^۲ ۲۰^\circ > ۱$ ✗

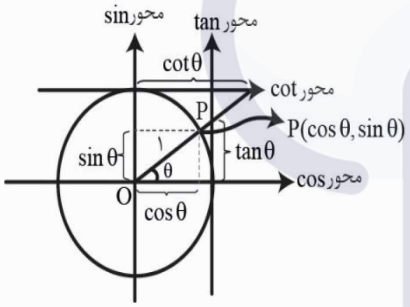
۴) $(۱-\sin\frac{\pi}{۲})^۲ + \sin^۲ x = ۱ \rightarrow ۰ + \sin^۲ x = ۱ \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{۲}$ ✓

پس اگر $x = \pm\frac{\pi}{۲}$ باشد این نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد.

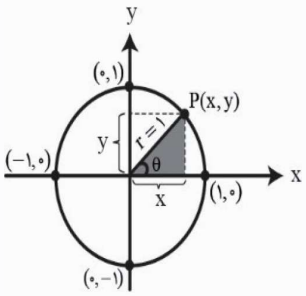
درسنامه

دایره مثلثاتی:

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد است.



ویژگی نقطه‌های روی دایره‌ی مثلثاتی



۱- با توجه به شکل زیر طول هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی، برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر $\sin\theta$ است:

$$P(\cos\theta, \sin\theta)$$

۲- با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگ شده برای هر نقطه $P(x,y)$ خواهیم داشت:

$$y^۲ + x^۲ = ۱ \Leftrightarrow \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$

۲ اگر $\cos x\tan x<0$ و $\sin x\cot x>0$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin(x-\frac{\pi}{3}).\cos(x+\frac{\pi}{2})<0$

۲) $\tan(\frac{x}{2})\sin(2x)>0$

۳) $\cot(x).\cot(\frac{x}{3})<0$

۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی- ناحیه کمان در دایره مثلثاتی

$\cos x\tan x<0\to\cos x.\frac{\sin x}{\cos x}<0\to\sin x<0$ ناحیه‌ی ۳ و ۴

$\sin x\cot x>0\to\sin x.\frac{\cos x}{\sin x}>0\to\cos x>0$ ناحیه‌ی ۱ و ۴

$\xrightarrow{\cap}$ ناحیه‌ی ۴

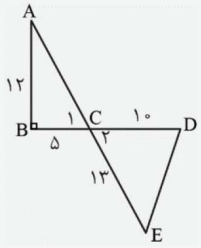
پس $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ است. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\frac{7\pi}{6}<x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}\to\begin{cases}\sin(x-\frac{\pi}{3})<0\\ \cos(x+\frac{\pi}{2})=\overbrace{-\sin x}^{\text{منفی}}>0\end{cases}\to\sin(x-\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{2})<0\quad\checkmark$$

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<\pi\to\tan\frac{x}{2}<0\\ 3\pi<2x<4\pi\to\sin 2x<0\end{cases}\to\tan\frac{x}{2}\sin 2x>0\quad\checkmark$$

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{2}<x<2\pi\to\cot x<0\\ \frac{\pi}{2}<\frac{x}{3}<\frac{2\pi}{3}\to\cot\frac{x}{3}<0\end{cases}\to\cot x\cot\frac{x}{3}>0\quad\times$$

۳ با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث DEC کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۶۰

۳) ۵۰

۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی - فرمول مساحت با سینوس زاویه بین

مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر $AC=13$ است. در این مثلث $\sin\hat{C}_1=\frac{12}{13}$ است. از طرفی دو زاویه‌ی C_1 و C_2 متقابل به رأسند و با هم برابرند.

$$S_{DEC}=\frac{1}{2}CD\times CE\times\sin C_2=\frac{1}{2}CD\times CE\sin C_1$$

$$=\frac{1}{2}\times 10\times 13\times\frac{12}{13}=60$$

۴ اگر $\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۱۲}$ و $m=۱+۴\sin ۲x$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

۱) $[-۳,۳)$ ۲) $(۱-۲\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},۱)$

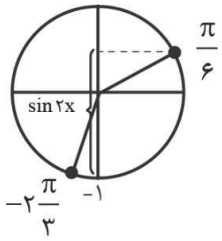
پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی- معادله مثلثاتی

$$۱+۴\sin ۲x=m\rightarrow \sin ۲x=\frac{m-۱}{۴}$$

$$-\frac{\pi}{۳}<x<\frac{\pi}{۱۲}\rightarrow -\frac{۲\pi}{۳}<۲x<\frac{\pi}{۶}$$

$$\rightarrow -۱\le \sin ۲x<\frac{۱}{۲}\rightarrow -۱\le \frac{m-۱}{۴}<\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۴}-۴\le m-۱<۲$$

$$\rightarrow -۳\le m<۳$$



۵ اگر $\frac{\tan x}{\frac{۱}{\cos x}-۱}=k$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{\cos x}+۱)\cot x$ بر حسب k کدام است؟

۱) $k-۱$ ۲) $\frac{۱}{k}$ ۳) k ۴) $k+۱$

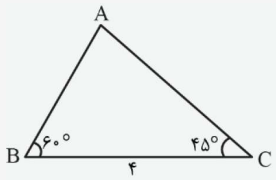
پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- روابط نسبت‌های مثلثاتی

$$\frac{\tan x}{\frac{۱}{\cos x}-۱}=k\rightarrow \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱-\cos x}{\cos x}}=k\rightarrow \frac{\sin x}{۱-\cos x}=k$$

$$(\frac{۱}{\cos x}+۱)\cot x=\frac{۱+\cos x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱+\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{۱-\cos^{۲} x}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{\sin^{۲} x}{\sin x(۱-\cos x)}=\frac{\sin x}{۱-\cos x}=k$$

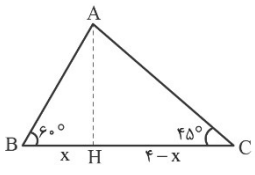
۶ در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $۸(\sqrt{۳}-۱)$
۲) $۸(۳-\sqrt{۳})$
۳) $۴(۳-\sqrt{۳})$
۴) $۴(\sqrt{۳}-۱)$

پاسخ: گزینه ۳ آسان | محاسباتی- مثلثاتی پایه

ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم.



$$\tan ۴۵^{\circ}=\frac{AH}{HC}\rightarrow AH=HC$$

$$\tan ۶۰^{\circ}=\frac{AH}{BH}\rightarrow AH=\sqrt{۳}BH$$

$$\Rightarrow HC=\sqrt{۳}BH\rightarrow ۴-x=\sqrt{۳}x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳}+۱)x=۴\rightarrow x=\frac{۴}{\sqrt{۳}+۱}\xrightarrow{AH=HC} AH=۴-\frac{۴}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}$$

$$S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\times ۴}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۸\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{۲}=۴(۳-\sqrt{۳})$$

۷ اگر $1+\tan^2 x=5\sin^2 x$ باشد، حاصل $\sin^4 x+\cos^4 x$ کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ است، پس:

$$1+\tan^2 x=5\sin^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=5\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{5} \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x \xrightarrow{(*)} 1-2\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0/6$$

۸ حاصل عبارت $\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۲) $2+\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $-(2+\sqrt{2})$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha$ است. بنابراین:

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2=\frac{(\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8})^2}{(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12})^2}$$

$$\rightarrow A^2=\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{2}$$

$$\rightarrow A=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

چون $\sin\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi}{12}$ است، پس در کسر A، صورت کسر عبارتی مثبت و مخرج کسر عبارتی منفی است. بنابراین $A<0$ و $A=-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ می‌باشد.

درسنامه:

نکته برخی روابط مثلثاتی مهم:

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\quad$ $\tan\theta\times\cot\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\quad$ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\quad$ $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ $\quad$ $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

۹ اگر $\log_{\sqrt[3]{2}}(\cos 15^\circ)+\log_{\sqrt[3]{2}}(\sin 15^\circ)=3m-12$ باشد، مقدار $\log_m(3^m-1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -4 ۴) -2

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی، ترکیبی- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $\log_c a+\log_c b+\log_c ab$ است. بنابراین:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}(\cos 15^\circ)+\log_{\sqrt[3]{2}}(\sin 15^\circ)=3m-12$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}}\cos 15^\circ \sin 15^\circ=\log_{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{2}\sin 30^\circ=3m-12$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2^3}}2^{-2}=\frac{-2}{\frac{1}{3}}\log_2 2=-6=3m-12$$

$$\rightarrow 3m=6\rightarrow m=2$$

حال مقدار $\log_m(3^m-1)$ برابر است با:

$$\log_2(3^2-1)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

۱۰. اگر $\frac{1-\cos 2x}{\sin x}+\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=1$ باشد، حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

می‌دانیم $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ و $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ است.

بنابراین:

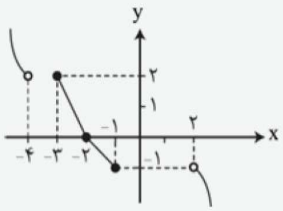
$$\frac{1-\cos 2x}{\sin x}+\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=1\rightarrow \frac{2\sin^2 x}{\sin x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos x}=1$$

$$\rightarrow 2\sin x+2\cos x=1\rightarrow \sin x+\cos x=\frac{1}{2} \quad (1)$$

حال طرفین رابطه (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{4}\rightarrow 1+\sin 2x=\frac{1}{4}\rightarrow \sin 2x=-\frac{3}{4}$$

۱. نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر رسم شده است؛ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[f(2x-1)]+[f(2-x)]}{[f(x^2-1)]}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ دشوار | مفهومی، محاسباتی - حد توابع

پلهٔ اول: ابتدا حد داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[f(2x-1)]+[f(2-x)]}{[f(x^2-1)]}=\frac{\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(x)]+\lim\limits_{x\to 2^+}[f(x)]}{\lim\limits_{x\to(-1)^+}[f(x)]}=\frac{[f((-1)^-)]+[f(2^+)]}{[f((-1)^+)]}$$

پلهٔ دوم:

$$f((-1)^-)=a \Rightarrow f^{-1}(a)=(-1)^- \Rightarrow a=2^+ \Rightarrow [f((-1)^-)]=[2^+]=2$$

$$f(2^+)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=2^+ \Rightarrow b=(-4)^- \Rightarrow [f(2^+)]=[(-4)^-]=-5$$

$$f((-1)^+)=c \Rightarrow f^{-1}(c)=(-1)^+ \Rightarrow c=(-1)^- \Rightarrow [f((-1)^+)]=[(-1)^-]=-2$$

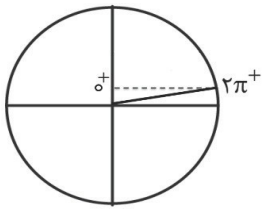
$$=\frac{\lim\limits_{x\to(-1)^-}[f(x)]+\lim\limits_{x\to 2^+}[f(x)]}{\lim\limits_{x\to(-1)^+}[f(x)]}=\frac{2+(-5)}{-2}=\frac{3}{2}$$

۲. حاصل $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{1-2x}{[\sin\frac{\pi}{2}x]+1}$ کدام است؟

۱) -7
۲) ۷
۳) $-\infty$
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی - حد توابع مثلثاتی

چون به ازای $x=4$ داخل براکت عددی صحیح است پس باید حد راست را به صورت مجزا محاسبه کنیم:



$$\lim_{x\to 4^+}\frac{1-2x}{[\sin\frac{\pi x}{2}]+1}=\frac{-7}{[\sin 2\pi^+]+1}=\frac{-7}{[0^+]+1}=-7$$

درسنامه

برای محاسبهٔ حد توابع جزء صحیح [براکتی] در $x=a$ ابتدا باید جزء صحیح را حذف کنیم و سپس از تابع حد بگیریم. در این مسائل با دو حالت کلی مواجه می‌شویم:

۱) اگر $x=a$، عبارت داخل براکت را صحیح نکند، مقدار عبارت داخل براکت را به ازای $x=a$ مشخص کرده و براکت را حذف می‌کنیم، سپس حد تابع را محاسبه می‌کنیم.

۲) اگر $x=a$، عبارت داخل براکت را صحیح کند، به‌طور مجزا حد چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست آوریم.

برای محاسبهٔ حدهای شامل قدرمطلق و جزء صحیح وقتی $x\to a^+$، از نامساوی $x>a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار نزدیک به a و فقط کمی بزرگ‌تر از آن است. به‌طور مشابه وقتی $x\to a^-$، از نامساوی $x<a$ استفاده می‌کنیم و منظور این است که x عددی بسیار بسیار نزدیک به a و فقط کمی کوچک‌تر از آن است.

۳ . اگر f یک تابع خطی باشد و $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f^{-1}(2x)}{x+\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

با توجه به این‌که f تابعی خطی است برای به دست آوردن ضابطهٔ $f^{-1}(2x)$ داریم:

$$f(x)=ax+b\to f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}\to f^{-1}(2x)=\frac{2x-b}{a}$$

با توجه به این‌که مخرج کسر به ازای $x=-1$ برابر صفر است و حاصل حد یک عدد است باید $f^{-1}(2x)$ به ازای $x=-1$ نیز صفر شود پس:

$$f^{-1}(-2)=\frac{-2-b}{a}=0\to b=-2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f^{-1}(2x)}{x+\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{a(x+\sqrt{2x+3})}=\frac{0}{0}$$

حال با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x+\sqrt{2x+3})(x-\sqrt{2x+3})}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x^2-2x-3)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{a(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-\sqrt{2x+3})}{a(x-3)}=\frac{1}{2}\to\frac{2(-2)}{-4a}=\frac{1}{2}\to a=2$$

حال تابع $f(x)$ را با جای‌گذاری a و b تشکیل داده و حاصل $f(1)$ را می‌یابیم.

$$f(x)=ax+b=2x-2\to f(1)=2-2=0$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+2}{a(x+\sqrt{2x+3})}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to -1}\frac{2}{a(1+\frac{2}{2\sqrt{2x+3}})}=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\to a=2$$

$$\to f(x)=2x-2\xrightarrow{x=1}f(1)=0$$

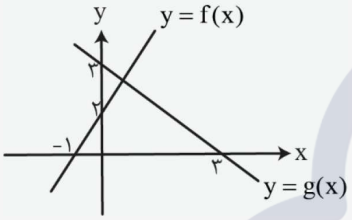
نکته برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر پس از جای‌گذاری $x=a$ به ابهام $\frac{0}{0}$ برسیم، برای رفع ابهام می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

طبق این قاعده به جای $\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از کسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وقتی $x\to a$ حد بگیریم، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

در محاسبهٔ حد کسرهای شامل رادیکال، اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم؛ در این حدها باید ابتدا رادیکال را از بین ببریم و سپس حد را محاسبه کنیم.

۴ . نمودار دو تابع f و g به صورت مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)(x-3)}{(x+2)g(x)}$ کدام است؟



۱) $-۱/۶$

۲) $-۱/۴$

۳) $-۱/۲$

۴) -۱

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی - حد توابع

پلهٔ اول: با توجه به نمودار و این‌که شیب خطوط و عرض از مبدأهای دو خط f و g مشخص است بنابراین ضابطهٔ آن‌ها را می‌نویسیم:

پلهٔ دوم: حاصل حد داده شده را با توجه به ضابطه‌های به دست آمده مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)(x-3)}{(x+2)g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+2)(x-3)}{\underbrace{(-x+3)}_{-(x-3)}(x+2)}=\frac{2x+2}{-(x+2)}=-\frac{8}{5}=-1/6$$

۵ اگر $f(x)=\frac{[3x^2]+\sqrt{2+a|x|}}{5x^2-b|-x^2+1|}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}[\frac{1}{x-2}]f(x)=\frac{-8}{5}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲ دشوار | مفهومی، محاسباتی - حدود توابع

پلهٔ اول:

$$\lim_{x\to 1^+}[\frac{1}{x-2}]f(x)=\frac{-8}{5}\to\lim_{x\to 1^+}-2f(x)=-\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}f(x)=\frac{4}{5}\to\lim_{x\to 1^+}\frac{[3x^2]+\sqrt{2+a|x|}}{5x^2-b|-x^2+1|}=\frac{3+\sqrt{2+a}}{5}=\frac{4}{5}$$

پلهٔ دوم:

$$3+\sqrt{2+a}=4\Rightarrow a=-1$$

۶ حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}\frac{x}{۳}}{۲\log_{۳}\sqrt{x}-\log_{x}۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با قرار دادن $x=۳$ درون کسر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم.

$$=\frac{\log_{\sqrt{۳}}۱}{۲\log_{۳}\sqrt{۳}-\log_{۳}۳}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

پلهٔ دوم: برای رفع ابهام با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\to\lim_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\sqrt{x}}۳}{۲(\frac{۱}{۲})\log_{۳}x-\log_{x}۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\log_{\sqrt{x}}x-\log_{\sqrt{x}}۳}{\frac{۱}{\log_{x}۳}-\log_{x}۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_{x}x-۲\log_{x}۳}{\frac{۱-(\log_{x}۳)^{۲}}{\log_{x}۳}}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲(۱-\log_{x}۳)}{\frac{(۱-\log_{x}۳)(۱+\log_{x}۳)}{\log_{x}۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_{x}۳\cancel{(۱-\log_{x}۳)}}{\cancel{(۱-\log_{x}۳)}(۱+\log_{x}۳)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲\log_{x}۳}{(۱+\log_{x}۳)}=\frac{۲\times ۱}{۱+۱}=۱$$

۷ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+x^{۲}-۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۴}+x^{۳}-۸}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با قرار دادن $x=۲$ درون کسر به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+x^{۲}-۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۴}+x^{۳}-۸}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

پلهٔ دوم: با تجزیهٔ عبارت‌ها و فاکتورگیری، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم.

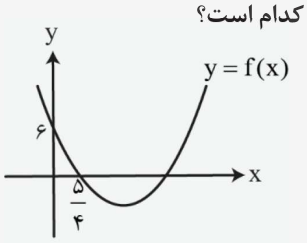
$$\to\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}+(x-۲)(x+۲)}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۴}+(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}$$

$$\to\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}(۱+\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}(x+۲))}{\sqrt[۳]{x-۲}(\sqrt[۳]{x+۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}(x^{۲}+۲x+۴))}$$

$$\to\lim_{x\to ۲}\frac{(۱+\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}(x+۲))}{(\sqrt[۳]{x+۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}(x^{۲}+۲x+۴))}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$$

نکته برای رفع ابهام حد $\frac{0}{0}$ می‌توانیم به کمک فاکتورگیری و تجزیه یا گویا کردن عوامل صفرشونده مشترک در صورت و مخرج کسر را از بین ببریم و سپس حاصل حد را به دست آوریم.

۸. نمودار تابع درجهٔ دوم f به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-f(x)}{x^2-1}=3$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۳) $\frac{۱۵}{۴۱}$

۴) $\frac{۱۹}{۷۰}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی، محاسباتی - صفرصفرم

پلهٔ اول: با توجه به این‌که جواب حد داده شده یک عدد حقیقی است و همچنین مخرج تابع در همسایگی $x=1$ برابر صفر می‌شود پس با یک حد $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم، بنابراین:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-f(x)}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow f(2)-f(1)=0\Rightarrow f(2)=f(1)$$

پلهٔ دوم: چون $f(2)=f(1)$ است پس نقاط $x=1$ و $x=2$ دو نقطهٔ هم‌عرض هستند از طرفی طول رأس سهمی میانگین هر دو نقطهٔ هم‌عرض است؛ بنابراین:

$$x_S=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

پلهٔ سوم: با توجه به این‌که طول رأس سهمی میانگین طول ۲ ریشه تابع است با توجه به ریشه $x=\frac{5}{4}$ ریشه دیگر یعنی x_2 را می‌یابیم.

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{\frac{5}{4}+x_2}{2}\Rightarrow x_2=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

پلهٔ چهارم: با توجه به دو ریشه و نقطه عرض از مبدأ، معادلهٔ سهمی را می‌یابیم:

$$f(x)=a(x-\frac{5}{4})(x-\frac{7}{4})\xrightarrow{c(0,6)}6=a(-\frac{5}{4})(-\frac{7}{4})\Rightarrow a=\frac{96}{35}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{96}{35}(x-\frac{5}{4})(x-\frac{7}{4})\Rightarrow f(2)=\frac{96}{35}(2-\frac{5}{4})(2-\frac{7}{4})$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{96}{35}(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})=\frac{18}{35}$$

۹. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x\geq a\\ 2x-5 & x<a\end{cases}$، تابعی همواره پیوسته است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۱ آسان | محاسباتی - پیوستگی

توابع مربوط به ضابطه‌های داده شده در دامنه‌شان پیوسته هستند، برای این‌که f همواره پیوسته باشد باید پیوستگی f را در $x=a$ بررسی کنیم.

$$f(a)=a^{۲}-۴$$

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=\lim_{x\to a^{+}} (x^{۲}-۴)=a^{۲}-۴$$

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=\lim_{x\to a^{-}} (۲x-۵)=۲a-۵$$

$$\to a^{۲}-۴=۲a-۵\to a^{۲}-۲a+۱=۰\to a=۱$$

تابع f را در نقطهٔ $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هرگاه حد این تابع در $x=a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}-b & |[x]|\le ۲ \\ ۳x+۴ & |[x]|>۲ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۴ ۳) ۱۱ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ دشوار | مفهومی، محاسباتی - پیوستگی

پلهٔ اول: ابتدا حدود دامنه هر ضابطه را مشخص می‌کنیم.

$$|[x]|\le ۲\to -۲\le [x]\le ۲\to -۲\le x<۳$$

$$|[x]|>۲\to \begin{cases} [x]>۲\to x\ge ۳ \\ [x]<-۲\to x<-۲ \end{cases}$$

پلهٔ دوم:

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}-b\to -۲\le x<۳ \\ ۳x+۴\to x<-۲\cup x\ge ۳ \end{cases}$$

توابع $y=ax^{۲}-b$ و $y=۳x+۴$ در دامنهٔ تعریفشان پیوسته هستند پس کافی است پیوستگی نقاط مرزی را بررسی کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} (ax^{۲}-b)=۴a-b \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^{-}} (۳x+۴)=-۲ \end{array}\right\}\to ۴a-b=-۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}} (۳x+۴)=۱۳ \\ \lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}} (ax^{۲}-b)=۹a-b \end{array}\right\}\to ۹a-b=۱۳$$

پلهٔ سوم:

$$\to \begin{cases} ۴a-b=-۲ \\ ۹a-b=۱۳ \end{cases}\to \begin{cases} a=۳ \\ b=۱۴ \end{cases}\to b-a=۱۱$$

۱. اگر مجموعه‌ی $A=[m+1,m^2]\cap[9,15-m]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، مجموع اعداد صحیح مجموعه‌ی $B=(-m^2,3m)$ کدام است؟ $(m\in\mathbb{N})$

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۳ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | محاسباتی

برای آن‌که اشتراک دو بازه تک‌عضو باشد باید ابتدای یکی، انتهای دیگری باشد. بنابراین دو حالت داریم:

۱) $m^2=9\xrightarrow{m\in\mathbb{N}}m=3$

حال به ازای $m=3$ شرط بامعنی بودن بازه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$[4,9]\cap[9,12]=\{9\}$

۲) $15-m=m+1\rightarrow 2m=14\rightarrow m=7$

$[8,49]\cap[9,8]$ ×

پس $m=3$ قابل‌قبول است و $B=(-9,9)$ چون بازه‌ی B نسبت به مبدأ متقارن است مجموع اعداد صحیح موجود در بازه‌ی B صفر است.

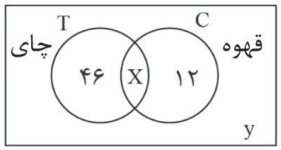
۲. در یک نظرسنجی ۹۰ نفره، در مورد علاقه‌مندی به نوشیدنی چای و قهوه، ۴۶ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط چای و ۱۲ نفر علاقه‌مند به نوشیدن فقط قهوه هستند. اگر تعداد علاقه‌مندان به چای ۳ برابر علاقه‌مندان به قهوه باشند، آن‌گاه چند نفر به هیچ‌کدام علاقه‌مند نیستند؟

۱) ۱۷ ۲) ۳ ۳) ۲۷ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۳ آسان | مفهومی، محاسباتی

مجموعه‌ی افراد علاقه‌مند به چای: T

مجموعه‌ی افراد علاقه‌مند به قهوه: C



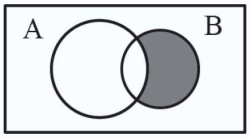
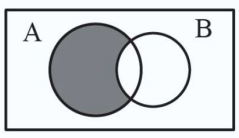
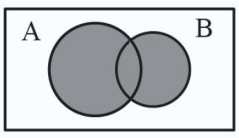
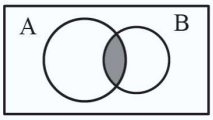
$n(T)=3n(C)\Rightarrow 46+x=3(12+x)\Rightarrow x=5$

تعداد کل افراد شرکت‌کننده در نظرسنجی ۹۰ نفر است بنابراین:

$46+x+12+y=90\xrightarrow{x=5}y=27$

جمع‌بندی اعمال در مجموعه ها

سه عمل روی مجموعه‌ها قابل تعریف است:

$B-A$	$A-B$	$A\cup B$	$A\cap B$
			

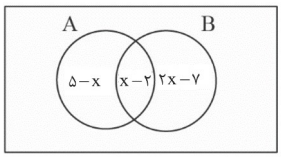
تعداد اعضای تفاضل دو مجموعه	اگر تعداد اعضای فقط مجموعه A را بخواهیم: $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه	اگر تعداد اعضای A یا B (حداقل یکی) را بخواهیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
تعداد اعضایی که در هیچ کدام نباشند	$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$
تعداد اعضایی که فقط در یکی باشند	$n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

۳ اگر $n(A-B)=۵-x$ و $n(B-A)=۲x-۷$ و $n(A\cap B)=x-۲$ و $n(A)=n(B)$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ آسان | مفهومی، محاسباتی

با توجه به اطلاعات مسئله از نمودار وِن استفاده می‌کنیم.



$$n(A)=n(B) \Rightarrow ۳x-۹=۳ \Rightarrow ۳x=۱۲ \rightarrow x=۴$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=x-۲=۴-۲=۲$$

۴ اگر جملات سوم و هفتم و سیزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر با $۲x$ و $۳x+۲$ و $۸x-۲$ باشد، جمله‌ی $a_{۲x}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ آسان | محاسباتی

در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n داریم: $a_n-a_m=(n-m)d$

پس برای $a_۳, a_۷, a_{۱۳}$:

$$\begin{cases} a_۷-a_۳=(۷-۳)d=۴d \\ a_{۱۳}-a_۷=(۱۳-۷)d=۶d \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (۳x+۲)-۲x=۴d \\ (۸x-۲)-(۳x+۲)=۶d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۴d \\ ۵x-۴=۶d \end{cases}$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق برهم خواهیم داشت:

$$\frac{x+۲}{۵x-۴}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x+۶=۱۰x-۸ \rightarrow ۷x=۱۴ , x=۲$$
$$\xrightarrow{x+۲=۴d} ۴=۴d , d=۱$$
$$a_{۲x}=a_۴=a_۳+d=۲x+d=۲(۲)+۱=۵$$

۵ بین دو عدد ۱۵ و ۶۹، هشت واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم به گونه‌ای که ۱۰ جمله تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. مجموع چهار جمله‌ی اول دنباله چند برابر مجموع چهار جمله‌ی دوم دنباله است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

$$۱۵, \underbrace{\square, \square, \square, \ldots, \square}_{\text{۸ جمله (واسطه‌ی حسابی)}}, ۶۹$$

$$t_۱=۱۵$$
$$t_{۱۰}=۶۹ \rightarrow t_۱+۹d=۶۹ \rightarrow ۹d=۵۴ \rightarrow d=۶$$
$$\frac{\text{مجموع ۴ جمله‌ی اول}}{\text{مجموع ۴ جمله‌ی دوم}}=\frac{t_۱+t_۲+t_۳+t_۴}{t_۵+t_۶+t_۷+t_۸}=\frac{۴t_۱+۶d}{۴t_۱+۲۲d}=\frac{۲t_۱+۳d}{۲t_۱+۱۱d}=\frac{۳۰+۱۸}{۳۰+۶۶}=\frac{۴۸}{۹۶}=\frac{۱}{۲}$$

نکته

واسطه حسابی

اگر a, b, c سه جمله دنباله حسابی باشند، رابطه $۲b=a+c$ برقرار است که b را واسطه حسابی a, c می‌نامیم.

درج m واسطه: برای درج m واسطه حسابی بین a, b، قدرنسبت را از رابطه $d=\frac{b-a}{m+۱}$ محاسبه می‌کنیم.

۶ به ازای چند عدد صحیح و بزرگ‌تر از منفی یازده m، اشتراک دو بازه‌ی $A=[\frac{m}{۲},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱})$ هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ سخت | محاسباتی

سوال را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $A\cap B=\varnothing \to \frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱}\le\frac{m}{۲}$

$$\to \frac{۲m^۲+۶m+۴}{m+۱۱}-m\le ۰ \to \frac{m^۲-۵m+۴}{m+۱۱}\le ۰ \to \begin{array}{ccccccc} & -۱۱ & & ۱ & & ۴ & \\ - & \text{ت ن} & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \xrightarrow{m>-۱۱} m\in[۱,۴]$$

حالت دوم: $A\cap B\neq\varnothing \to ۰<\frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱}-\frac{m}{۲}\le ۱$

کافیست قسمت $\frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱}-\frac{m}{۲}\le ۱$ را محاسبه کنیم و سپس بازه جواب حالت اول را از آن کم کنیم:

$$\frac{۲m^۲+۶m+۴}{m+۱۱}-m-۲\le ۰ \to \frac{m^۲-۷m-۱۸}{m+۱۱}\le ۰ \to \begin{array}{ccccccc} & -۱۱ & & -۲ & & ۹ & \\ - & \text{ت ن} & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}$$

پس مجموعه جواب نامعادله‌ی حالت دوم برابر است با: $m\in[-۲,۱)\cup(۴,۹]$.

* و اما قسمت مهم در حل این سوال یعنی بررسی جواب‌ها:

تو حالت اول همشون قبولن! اما تو حالت دوم نه زیرا ما طول بازه اشتراک را بین صفر و یک قرار دادیم که این به تنهایی کافی نیست زیر بازه‌ای مثل $(-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ با این‌که طول کوتاه‌تر از ۱ واحد دارد اما عدد صفر را شامل می‌شود.

$[\frac{m}{۲},\frac{m^۲+۳m+۲}{m+۱۱})$

مشخص است اعداد زوج در حالت دوم همگی غیرقابل‌قبول هستند ولی برای اعداد فرد:

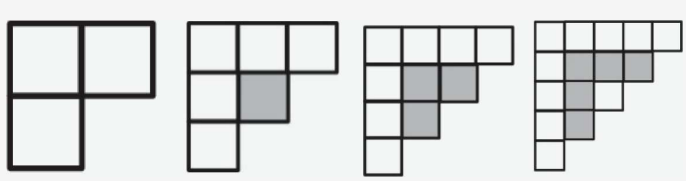
$m=-۱\to[-\frac{۱}{۲},۰)$ ✓

$m=۵\to[\frac{۵}{۲},\frac{۲۱}{۸})$ ✓

$m=۷\to[\frac{۷}{۲},۴)$ ✓ بنابراین: $m=-۱,۱,۲,۳,۴,۵,۷$ (۷ عدد صحیح)

$m=۹\to[\frac{۹}{۲},\frac{۱۱}{۲})$ ✗

۷ با توجه به الگوی داده شده نسبت مربع‌های سفید به رنگی در شکل بیستم کدام است؟



۱) $\frac{۱۹۴}{۳۹}$

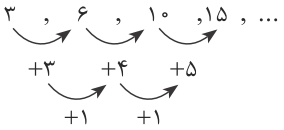
۲) $\frac{۱۹۴}{۳۷}$

۳) $\frac{۱۹۳}{۳۷}$

۴) $\frac{۱۹۳}{۳۹}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

ابتدا جملهٔ عمومی مربوط به دنبالهٔ تعداد کل مربع‌ها را می‌نویسیم:



این دنباله، یک دنباله درجه دوم (دنباله مثلثی) با جمله اول ۳ است.

$$\text{دنباله مثلثی: } t_n=\frac{n(n+1)}{2}\xrightarrow[t_1=3]{n\to n+1} t_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

پس جملهٔ عمومی دنبالهٔ تعداد کل مربع‌ها به صورت $t_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ است. در نتیجه تعداد کل مربع‌ها در شکل بیستم برابر است با:

$$t_{20}=\frac{21\times 22}{2}=231$$

حالا باید جملهٔ عمومی دنبالهٔ مربوط به تعداد مربع‌های رنگی را بنویسیم:

واضح است که از جملهٔ دوم به بعد یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=2n-1$ داریم و برای بدست آوردن تعداد مربع‌های رنگی در شکل بیستم، کافیست $n=19$ را در این دنباله قرار می‌دهیم:

$$a_{19}=2(19)-1=37$$

پس تعداد مربع‌های سفید در شکل بیستم برابر است با:

$$231-37=194$$

$$\Rightarrow \frac{\text{تعداد مربع‌های سفید در شکل بیستم}}{\text{تعداد مربع‌های رنگی در شکل بیستم}}=\frac{194}{37}$$

۸ در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی a_n و قدرنسبت r، اگر $a_1=3+r$ و $a_8=a_6+72a_4$ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

با توجه به تساوی $a_8=a_6+72a_4$ داریم:

$$a_8-a_6-72a_4=0 \Rightarrow a_1r^7-a_1r^5-72a_1r^3=0 \Rightarrow a_1r^3(r^4-r^2-72)=0$$

$$\xrightarrow[r\neq 0]{a_1\neq 0} r^4-r^2-72=0 \Rightarrow (r^2-9)(r^2+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3 \\ r^2=-8 \Rightarrow \text{فاقد ریشه‌ی حقیقی} \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $a_1=3+r$ است، پس:

$r=3 \Rightarrow a_1=3+3=6$ ✓

$r=-3 \Rightarrow a_1=3-3=0$ ×

می‌دانیم همواره در دنبالهٔ هندسی $a_1\neq 0$ است، پس $a_1=0$ غیرقابل‌قبول است.

۹ اعضای مجموعه‌ی $\{2,4,a\}$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت هستند. حاصل‌ضرب مقادیر مختلف برای a کدام است؟

۱) ۸ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

سه حالت داریم:

الف) $a \overset{\times 2}{,} 2 \overset{\times 2}{,} 4 \Rightarrow a=1$

ب) $2 \overset{\times\sqrt{2}}{,} a \overset{\times\sqrt{2}}{,} 4 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$

پ) $۲ \overset{\times ۲}{\rightarrow} ۴ \overset{\times ۲}{\rightarrow} a \Rightarrow a = ۸$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر a برابر با $۱۶\sqrt{۲}$ است.

۰ . جملات اول و سوم و چهارم یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت با جملات مثبت تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی به جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ سخت | محاسباتی

دنباله‌ی هندسی به صورت روبه‌رو خواهد بود:

$a, aq^۲, aq^۳$

$$a + aq^۳ = ۲aq^۲ \rightarrow q^۳ - ۲q^۲ + ۱ = ۰ \rightarrow (q-۱)(q^۲ - q - ۱) = ۰ \rightarrow q = \begin{cases} ۱ \rightarrow \text{غیر ثابت} \times \\ \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \checkmark \\ \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \rightarrow \text{جملات منفی می‌شود.} \times \end{cases}$$

خواسته سوال: $\frac{d}{a} = \frac{aq^۲ - a}{a} = q^۲ - ۱ = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} - ۱ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخنامه ۱۶ بهمن

1. به ازای چند مقدار صحیح x، رابطه‌ی $\sqrt{۶}<\sqrt[۳]{x}<\sqrt[۶]{۳۰۰}$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

طرفین نامعادله را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۶}<\sqrt[۳]{x}<\sqrt[۶]{۳۰۰} \xrightarrow[x>۰]{\text{به توان }۶} (\sqrt{۶})^۶<(\sqrt[۳]{x})^۶<(\sqrt[۶]{۳۰۰})^۶$$

$$\rightarrow ۶^۳<x^۲<۳۰۰ \rightarrow ۲۱۶<x^۲<۳۰۰ \xrightarrow[x>۰]{x\in\mathbb{Z}} x=۱۵,۱۶,۱۷$$

پس سه مقدار صحیح برای x وجود دارد.

2. اگر $x^۳-۳x^۲+۳x+۷=(x+۱)(ax^۲+bx+c)$ باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $-\frac{۷}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{عبارت اول}=x+۱$$

$$\text{عبارت دوم}=ax^۲+bx+c$$

از ضرب جمله‌ی x عبارت اول در جمله‌ی $ax^۲$ عبارت دوم، جمله‌ی $x^۳$ ایجاد می‌شود، پس:

$$x(ax^۲)=ax^۳=x^۳ \rightarrow a=۱$$

و همچنین از ضرب جمله‌ی ۱ عبارت اول و جمله‌ی c عبارت دوم، جمله‌ی ۷ ایجاد می‌شود، بنابراین:

$$۱\times c=۷ \rightarrow c=۷ \rightarrow \frac{a}{c}=\frac{۱}{۷}$$

3. اگر $x>۰$; $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ و $f(a^۲)=۲۳$ باشد، مقدار $f(a^۳)$ کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$, $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$، بنابراین:

$$f(x)=x+\frac{۱}{x} \xrightarrow[f(x)>۰]{x>۰} f(a)=a+\frac{۱}{a}>۰$$

$$f(a^۲)=a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a+\frac{۱}{a})^۲-۲=f^۲(a)-۲=۲۳$$

$$\rightarrow f^۲(a)=۲۵ \xrightarrow{f(a)>۰} f(a)=۵$$

$$f(a^۳)=a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})^۳-۳(a+\frac{۱}{a})=f^۳(a)-۳f(a)=۱۲۵-۱۵=۱۱۰$$

4. اگر $\sqrt{a}=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{b}=\sqrt{۲}-۱$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{a}=\sqrt{۲}+۱ \xrightarrow{\text{توان }۲} a=۳+۲\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{b}=\sqrt{۲}-۱ \xrightarrow{\text{توان }۲} b=۳-۲\sqrt{۲}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a+b=۶ \\ a-b=۴\sqrt{۲} \end{cases} \rightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۶}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

5. اگر $\sqrt[۴]{۲^{۶}\sqrt{x+۱}}=\sqrt{۲^{۳}\sqrt{۴\sqrt{۸}}}$ باشد، حاصل $\sqrt{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۵۶

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{۲^{۳}\sqrt{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۴]{۲^{۶}\sqrt{x+۱}} \quad (*)$$

ابتدا دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۲^{۳}\sqrt{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt{۲^{۳}\sqrt{۲^{۳}\times۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۶]{۲^{۵}\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{\sqrt{۲^{۱۰}\times۸}}=\sqrt[۱۲]{۲^{۱۳}}$$

$$\sqrt[۴]{۲^{۶}\sqrt{x+۱}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۶]{۲^{۶}(x+۱)}}=\sqrt[۲۴]{۶۴(x+۱)}$$

با جای‌گذاری عبارت‌های بالا در $(*)$ داریم:

$$\sqrt{۲^{۳}\sqrt{۴\sqrt{۸}}}=\sqrt[۴]{۲^{۶}\sqrt{x+۱}}\rightarrow\sqrt[۱۲]{۲^{۱۳}}=\sqrt[۲۴]{۶۴(x+۱)}$$

حال طرفین تساوی را به توان ۲۴ می‌رسانیم:

$$۲^{۲۶}=۶۴(x+۱)\rightarrow x+۱=\frac{۲^{۲۶}}{۲^{۶}}=۲^{۲۰}\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x+۱}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

6. حاصل عبارت $(\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}})(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نکته‌ی $\sqrt{(a+b)\pm۲\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}|$ داریم:

$$\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}=\sqrt{۱۴+۲\sqrt{۹\times۵}}=|\sqrt{۹}+\sqrt{۵}|=۳+\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}=\sqrt{۱۴-۲\sqrt{۹\times۵}}=|\sqrt{۹}-\sqrt{۵}|=۳-\sqrt{۵}$$

$$A=\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}}\xrightarrow[A>۰]{\text{توان }۲}A^{۲}=۳+\sqrt{۵}+۳-\sqrt{۵}+۲\sqrt{۳+\sqrt{۵}}\times\sqrt{۳-\sqrt{۵}}$$

$$\rightarrow A^{۲}=۶+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})}=۶+۲\sqrt{۹-۵}=۶+۲(۲)=۱۰\rightarrow A=\sqrt{۱۰}$$

حال با جای‌گذاری عبارت‌های بالا می‌توان نوشت:

$$(\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}})(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\sqrt{۳-\sqrt{۵}})=(۳+\sqrt{۵}-(۳-\sqrt{۵}))(\sqrt{۱۰})=۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۱۰}=۲\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}$$

7. اگر $\sqrt{x+\sqrt{۲}}+\sqrt{x-\sqrt{۲}}=۴$ باشد، حاصل $\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

دو عبارت داده شده مزدوج هم هستند. از ضرب این دو عبارت در هم داریم:

$$A=\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}$$

$$(\sqrt{x+\sqrt{۲}}+\sqrt{x-\sqrt{۲}})(\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}})=۴A$$

$$\rightarrow(x+\sqrt{۲})-(x-\sqrt{۲})=۴A\rightarrow۲\sqrt{۲}=۴A$$

$$\rightarrow A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\sqrt{x+\sqrt{۲}}-\sqrt{x-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

8. حاصل $\frac{\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{3}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا صورت کسر را ساده کرده و سپس کسر را گویا می‌کنیم.

$$\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}=\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{6^2}}=\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

حال با جای‌گذاری صورت کسر داریم:

$$\frac{\sqrt[4]{5-2\sqrt[4]{36}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

9. دو عدد حقیقی a و b را در نظر بگیرید. اگر $0<a<b$ باشد و $x=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}$ و $y=4a+4b+\sqrt{64ab}$ باشد، حاصل $\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$ ۲) ab ۳) $\frac{b}{a}$ ۴) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا عبارت‌های x و y را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$x=\sqrt{a+b-\sqrt{4ab}}=\sqrt{b-2\sqrt{ab}+a}=\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}=|\sqrt{b}-\sqrt{a}|\xrightarrow{0<a<b}x=\sqrt{b}-\sqrt{a}$$

حالا به سراغ ساده‌سازی عبارت y می‌رویم:

$$y=4a+4b+\sqrt{64ab}=4a+8\sqrt{ab}+4b=(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\Rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2}\Rightarrow\sqrt{y}=2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$$

بنابراین حاصل $\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}$ برابر است با:

$$\frac{2x+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2x}=\frac{2(\sqrt{b}-\sqrt{a})+(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+2\sqrt{b})-2(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\frac{4\sqrt{b}}{4\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

10. اگر $x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}}$ و $y=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$ باشد، مقدار x^6+y کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا عبارت x را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}+\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{3^2}}=\frac{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{9}}=\frac{\sqrt[6]{9}(1+\sqrt[6]{3})}{\sqrt[6]{3}(1+\sqrt[6]{3})}=\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{3}$$

همچنین می‌دانیم $19+6\sqrt{10}=(3+\sqrt{10})^2$ است. حالا به سراغ محاسبه y می‌رویم:

$$y=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[6]{(3+\sqrt{10})^2}=\sqrt[3]{3-\sqrt{10}}\times\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}=\sqrt[3]{9-10}=\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\Rightarrow x^6+y=(\sqrt[6]{3})^6+(-1)=3-1=2$$

پاسخنامه ۲۴ بهمن ماه ۱۴۰۳

1. با حروف کلمه‌ی (دانشجو) و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که دو حرف (ج، و) کنار ه باشند و به حرف (ش) ختم نشود؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۲

!۶= کل کلمات ۶ حرفی

جابه جایی (ج و) با هم

بسته (ج و) و سه حرف دیگر

کلمات ۶ حرفی که (ج و) کنار هم باشند و به (ش) ختم می‌شود. $= \underline{\quad}\underline{\quad}\underline{\quad}\underline{\quad}\underline{\quad}\underline{\text{ش}} = ۴! \times ۲!$

جواب مسئله $= ۶! - (۴! \times ۲!) = ۷۲۰ - ۴۸ = ۶۷۲$

2. با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

برای اینکه میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد باید ارقام، تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، بنابراین حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d=۱)$ بدهند:

رقم یکان عدد صفر باشد: $۰,۱,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱} \to ۲ \quad ۲\times۱\times۱=۲$

رقم یکان عدد ۲ باشد:

$۰,۱,۲ \to \underline{۱}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۲}} \to ۱\times۱\times۱=۱$

$۱,۳,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۲}} \to ۲\times۱\times۱=۲$

$۴,۳,۲ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۲}} \to ۲\times۱\times۱=۲$

رقم یکان عدد ۴ باشد:

$۲,۳,۴ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۴}} \quad ۲\times۱\times۱=۲$

$۳,۵,۴ \to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۲}} \quad ۲\times۱\times۱=۲$

حالت دوم: ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d=۲)$ بدهند:

$d=۲ \to ۰,۲,۴ \to$:

یکان صفر باشد $\to \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underline{۱}_{\text{عدد ۰}} \quad ۲\times۱\times۱=۲$

یکان صفر نباشد $\to \underline{۱}\ \underline{۱}\ \underline{۲} \quad ۱\times۱\times۲=۲$

تعداد اعداد $= ۲+۱+۲+۲+۲+۲+۲+۲=۱۵$

3. با حروف کلمه‌ی «قفسه کتاب» و بدون تکرار حروف، نسبت تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف "ق" و "ف" کنار هم باشند به تعداد کلمات ۶ حرفی که به "کتاب" ختم می‌شوند، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $۵\times۷!$ ۲) $۴\times۷!$ ۳) $۷\times۵!$ ۴) $۷\times۴!$

پاسخ: گزینه ۳

$۲!\times۷!\Rightarrow$ ب ا ت ک هـ س ق ف $\Rightarrow$ تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف "ق" و "ف" کنار هم هستند.

$\overset{۴}{\_}\ \overset{۳}{\_}$

$P(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲\Rightarrow$ کتاب $\Rightarrow$ تعداد کلمات ۶ حرفی که به «کتاب» ختم می‌شوند.

$$\text{جواب مسئله}=\frac{۷!\times۲!}{۱۲}=\frac{۷!}{۶}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{\cancel{۶}}=۷\times۵!$$

4. به $(m\times n!)$ طریق می‌توان ۷ کتاب متمایز را به ۴ نفر هدیه داد به طوری که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت می‌کند، اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ کدام است؟ $(m,n\in N)$

۱) ۷۵ ۲) ۴۱۲۷ ۳) ۲۷۹ ۴) ۸۳۲۶

پاسخ: گزینه ۴

برای این که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت کند باید تعداد هدیه‌هایی که به افراد می‌رسد، به صورت زیر باشد:

حالت ۱: به یک نفر ۴ هدیه برسد.

$$\boxed{۴}\boxed{۱}\boxed{۱}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۳!}\times\binom{۷}{۴}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۴\times۳۵\times۳\times۲\times۱=۸۴۰$$

حالت ۲: به یک نفر ۳هدیه و به یک نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۲!}\times\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۱۲\times۳۵\times۶\times۲\times۱=۵۰۴۰$$

حالت ۳: به ۳ نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۱}\rightarrow\frac{۴!}{۳!}\times\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}=۴\times۲۱\times۱۰\times۳\times۱=۲۵۲۰$$

بنابراین تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$۸۴۰+۵۰۴۰+۲۵۲۰=۸۴۰۰=۷۰\times۱۲۰=۷۰\times۵!=m\times n!$$

$$\rightarrow\begin{cases}۸۴۰۰=۷۰\times۵!\rightarrow m=۷۰,n=۵\rightarrow m+n=۷۵ & \min\\ ۸۴۰۰=۳۵۰\times۴!\rightarrow m=۳۵۰,n=۴\rightarrow m+n=۳۵۴\\ ۸۴۰۰=۱۴۰۰\times۳!\rightarrow m=۱۴۰۰,n=۳\rightarrow m+n=۱۴۰۳\\ ۸۴۰۰=۴۲۰۰\times۲!\rightarrow m=۴۲۰۰,n=۲\rightarrow m+n=۴۲۰۲\\ ۸۴۰۰=۸۴۰۰\times۱!\rightarrow m=۸۴۰۰,n=۱\rightarrow m+n=۸۴۰۱ & \max\end{cases}$$

اختلاف بیشترین و کمترین مقدار $m+n$ = ۸۳۲۶

5. با حروف کلمه‌ی «دفترچه آموزش» چندکلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حروف نقطه‌دار و بدون نقطه به صورت یک‌در میان قرار داشته و شروع کلمه با حرف بدون نقطه باشد؟

۱) $۵!\times۶!$ ۲) $\frac{۱}{۴}\times۵!\times۶!$ ۳) $\frac{۱}{۲}\times۵!\times۶!$ ۴) $۵!\times۶!\times۲!$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه در کلمه‌ی «دفترچه آموزش» ۵ حرف نقطه دارد و ۶ حرف بدون نقطه وجود دارد، بنابراین داریم:

۶	۵	۵	۴	۴	۳	۳
بدون‌نقطه	بانقطه	بدون‌نقطه	بانقطه	بدون‌نقطه	بانقطه	بدون‌نقطه

تعداد کلمات ۷ حرفی $= (۶\times۵\times۵\times۴\times۴\times۳\times۳) = (۶\times۵\times۴\times۳)\times(۵\times۴\times۳)$

$= \left(۶\times۵\times۴\times۳\times\frac{۲}{۲}\right)\times\left(۵\times۴\times۳\times\frac{۲}{۲}\right) = \frac{۶!}{۲}\times\frac{۵!}{۲} = \frac{۱}{۴}\times۶!\times۵!$

6. تاسی را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت که یک عدد یک بار، عدد دیگری دو بار و یک عدد دیگر سه بار تکرار شوند؟

۱) ۵۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰۰۰ ۴) ۷۲۰۰

پاسخ: گزینه ۴

اعداد $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ بر روی تاس تصور کنید. اکنون از بین جایگاه‌ها یک جایگاه انتخاب می‌کنیم و یکی ار اعداد را در آن قرار می‌دهیم.

$\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{جایگاه}}\times\underbrace{۶}_{\text{ارقام}} = ۳۶$

اکنون دو جایگاه دیگر انتخاب می کنیم و دو عدد دیگر در آن‌ها قرار می‌دهیم.

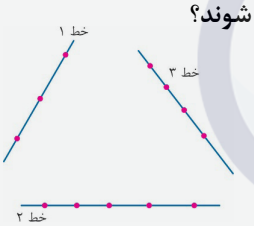
$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{جایگاه}}\times\underbrace{۵}_{\text{ارقام}} = ۵۰$

اکنون در سه جایگاه دیگر، اعداد دیگر را قرار می‌دهیم.

$\binom{۳}{۳}\times۴ = ۴$

پس کل حالات برابر است با $۳۶\times۵۰\times۴ = ۷۲۰۰$.

7. چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد، به طوری که رئوس آنها از نقاط روی خطوط زیر انتخاب شوند؟



۱) ۲۲۰
۲) ۲۰۵
۳) ۱۱۰
۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۲

تعداد کل نقاط $= ۳+۵+۴ = ۱۲$

تعداد کل انتخاب‌های ۳ رأس $= \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!\times۳!} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶} = ۲۲۰$

در حالت‌هایی که ۳ نقطه روی یک خط باشند مثلث ساخته نمی‌شود: $\binom{۳}{۳}+\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳} = ۱+۱۰+۴ = ۱۵$

تعداد کل مثلث‌ها $= ۲۲۰-۱۵ = ۲۰۵$

8. مجموعهٔ $A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ چند زیر مجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد که شامل ۴ و فاقد ۵ باشند؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

حداقل ۳ عضوی فاقد ۵

- ۳عضوی ← شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۲} = ۶$
- ۴عضوی ← شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۳} = ۴$
- ۵عضوی ← شامل ۴: $\{۴,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots\} \rightarrow \binom{۴}{۴} = ۱$

$\rightarrow \quad = ۶+۴+۱ = ۱۱$

9. با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۷ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام که مضرب ۵ نباشند، می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۴

عدد ۵ نمی‌تواند در یکان قرار بگیرد، پس ۲ حالت برای رقم یکان داریم. عدد صفر نمی‌تواند در رقم صدگان قرار بگیرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس ۴ حالت برای رقم صدگان داریم و در نهایت ۴ حالت برای رقم دهگان باقی می‌ماند.

$$\underset{\text{عدد}\,۷,۱}{\underline{۲}}\ \underline{۴}\ \underset{\times ۰}{\underline{۴}} \qquad ۴\times۴\times۲=۳۲$$

10. علی و حسن و جواد و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت‌های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟

۱) حسن قبل از جواد باشد ۲) حسن قبل از جواد و بعد از علی باشد

۳) علی نفر سوم باشد ۴) حسن نفر آخر نباشد.

پاسخ: گزینه ۴

در حالت‌هایی که ترتیب خاصی برای r شیء از n شیء متمایز داریم می‌توانیم از فرمول $\frac{n!}{r!}$ استفاده کنیم:

گزینه ۱: حسن قبل از جواد باشد: جایگشت ۶ نفر برابر !۶ است که در نصف حالت‌ها، حسن قبل از جواد و در نصف دیگر جواد قبل از حسن قرار می‌گیرد.

$$r=۲\rightarrow\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

گزینه ۲:

$$r=۳\rightarrow\frac{۶!}{۳!}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

گزینه ۳:

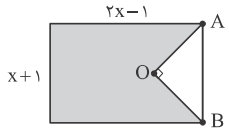
$$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{\text{علی}}{\underline{۱}}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} \qquad ۱\times۵!=۱۲۰$$

گزینه ۴:

$$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱}\ \underset{\text{هر کس جز حسن}}{\underline{۵}} \qquad ۵!\times۵=۶۰۰$$

بنابراین در گزینه ۴ تعداد حالت‌ها بیشتر است.

1 در مستطیل شکل زیر، مثلث AOB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده برابر ۱۶ باشد، محیط مستطیل کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مساحت قسمت رنگی یعنی «مساحت کل مستطیل» منهای «مساحت مثلث سفیده». مساحت هر دو رو برحسب x بنویس، سپس از هم کم کن و مساوی ۱۶ قرار بده تا یه معادلهٔ درجه‌دو به دست بیاد.

درس Box

روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم

تعریف معادلهٔ درجه‌دوم:

هر معادله به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ باشند، یک معادلهٔ درجه‌دوم نامیده می‌شود. منظور از حل معادله، پیداکردن مقادیر حقیقی برای x است که در تساوی صدق کنند.

روش اول: حل معادله‌های ناقص

اگر یکی از ضرایب b یا c (یا هر دو) صفر باشد، معادله ناقص است و به راحتی حل می‌شود.

- اگر $b=۰, c=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲=۰$ درآمده و تنها جواب آن $x=۰$ است.
- اگر $c=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+bx=۰$ است. با فاکتورگیری از x به $x(ax+b)=۰$ می‌رسیم و جواب‌ها $x=۰$ و $x=-\frac{b}{a}$ هستند.
- اگر $b=۰$ باشد، معادله به شکل $ax^۲+c=۰$ است که به $x^۲=-\frac{c}{a}$ تبدیل می‌شود. اگر $-\frac{c}{a}\geq ۰$ باشد، جواب‌ها $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ هستند و در غیر این صورت معادله جواب حقیقی ندارد.

روش دوم: حل معادله‌های کامل:

الف) **روش تجزیه:** در این روش با استفاده از اتحادها (مانند اتحاد جمله‌مشترک)، معادله را به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت تبدیل کرده و جواب‌ها را پیدا می‌کنیم.

ب) **روش مربع کامل کردن:**

۱) معادله را به شکل $x^۲+mx=n$ مرتب می‌کنیم (اگر ضریب $x^۲$ یک نبود، همهٔ جملات را بر آن تقسیم می‌کنیم).

۲) مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{m}{۲})^۲$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۳) سمت چپ را به صورت مربع کامل $(x+\frac{m}{۲})^۲$ می‌نویسیم و سپس با ریشه‌گیری معادله را حل می‌کنیم.

ج) **روش کلی با فرمول دلتا:** این روش برای هر معادلهٔ درجه‌دومی جواب می‌دهد. ابتدا دلتا (Δ) را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

- اگر $\Delta\geq ۰$ باشد، جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

- اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

روش سوم: تکنیک‌های خاص و میان‌برها

- **روش ریشه‌گیری:** برای معادلات به فرم $(ax+b)^۲=c$، اگر $c\geq ۰$ باشد، داریم $ax+b=\pm\sqrt{c}$ و از آن x به دست می‌آید. اگر $c<۰$ باشد، جواب حقیقی وجود ندارد.

- **استفاده از اتحاد مزدوج:** برای معادلات به فرم $A^۲ = B^۲$ می‌توان آن را به $A^۲ - B^۲ = ۰$ تبدیل و با استفاده از اتحاد مزدوج $(A-B)(A+B) = ۰$ آن را حل کرد.
- **حالت‌های خاص مجموع ضرایب:**
- اگر $a+b+c = ۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x = ۱$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.
- اگر $a-b+c = ۰$ باشد، یکی از جواب‌ها $x = -۱$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

حل مسائل کاربردی با معادلهٔ درجه دوم

راهبرد کلی حل مسئله:

بسیاری از مسائل در علوم مختلف، پس از مدل‌سازی به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شوند. راهبرد کلی برای حل این مسائل به صورت زیر است:

۱) درک مسئله و تعریف متغیر: مسئله را به دقت بخوانید و کمیت مجهول اصلی را با یک متغیر (مانند x) نمایش دهید. سایر مقادیر مجهول را برحسب x بنویسید.

۲) تشکیل معادله: با استفاده از روابط شناخته‌شده (مانند روابط هندسی، فیزیکی و غیره) یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب x تشکیل دهید.

۳) حل معادله: معادلهٔ درجه دوم به‌دست‌آمده را با یکی از روش‌های مرسوم (تجزیه، دلتا و ...) حل کنید.

۴) بررسی جواب(ها): جواب‌های به‌دست‌آمده را با شرایط فیزیکی مسئله مقایسه کنید. جواب‌های غیر قابل قبول (مانند طول منفی) باید حذف شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** برای محاسبهٔ مساحت قسمت رنگی ابتدا، مساحت مثلث OAB را مشخص می‌کنیم:

$$AB = x+۱\,,\ OA = OB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

$$\Rightarrow\ OA = OB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)$$

$$\Rightarrow\ S_{OAB} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+۱)}{۲} = \frac{(x+۱)^۲}{۴}$$

گام دوم: حال برای مساحت سایه‌خورده داریم:

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = (x+۱)(۲x-۱) - \frac{(x+۱)^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۶ = \frac{۴(x+۱)(۲x-۱)-(x+۱)^۲}{۴} = \frac{۸x^۲+۴x-۴-(x^۲+۲x+۱)}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۶ = \frac{۷x^۲+۲x-۵}{۴}\ \Rightarrow\ ۷x^۲+۲x-۵ = ۶۴$$

$$\Rightarrow ۷x^۲+۲x-۶۹ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۲^۲-۴(۷)(-۶۹) = ۱۹۳۶} x = \frac{-۲\pm\sqrt{۱۹۳۶}}{۱۴}$$

$$\xrightarrow{۱۹۳۶ = ۴۴^۲} x = \frac{-۲\pm۴۴}{۱۴} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۲۳}{۷} & \text{غ ق ق} \\ x = ۳ & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم: برای محاسبهٔ محیط مستطیل با داشتن مقدار x داریم:

$$\text{محیط} = ۲(x+۱+۲x-۱) = ۲(۳x) = ۶x = ۱۸$$

2 اگر نقطهٔ $A(۲,k)$ رأس سهمی $f(x)=ax^۲-۲bx+a$ باشد، حاصل $\frac{f(۵)}{f(-۱)}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) -۳

۳) -۱

۴) ۱

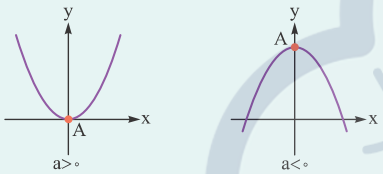
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint مختصات رأس سهمی رو که بلدی! طول رأس رو مساوی ۲ قرار بده تا یه رابطه بین a و b پیدا کنی. بعد این رابطه رو توی ضابطهٔ سهمی جای‌گذاری کن تا همه‌چیز برحسب a ساده بشه.

درس Box

تعریف سهمی و ویژگی‌های اصلی

- نمودار معادلهٔ درجه‌دوم $y=ax^۲+bx+c$ (به شرط $a\neq ۰$) یک سهمی نامیده می‌شود.
- علامت ضریب a جهت دهانهٔ سهمی را مشخص می‌کند: اگر $a>۰$ دهانه رو به بالا و اگر $a<۰$ دهانه رو به پایین است.
- پایین‌ترین یا بالاترین نقطهٔ نمودار، رأس سهمی نام دارد.
- خط عمودی که از رأس می‌گذرد، محور تقارن سهمی است.



- رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ نقطهٔ $A\left(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a}\right)$ است و خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن این سهمی است

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: ابتدا به کمک طول رأس سهمی داریم:

$$x_s=\frac{۲b}{۲a}\Rightarrow ۲=\frac{b}{a}\Rightarrow b=۲a$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار معادل b، ضابطهٔ سهمی را بازنویسی می‌کنیم.

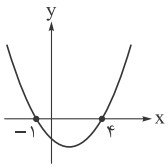
$$f(x)=ax^۲-۴ax+a\Rightarrow f(x)=a(x^۲-۴x+۱)$$

گام سوم: حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{f(۵)}{f(-۱)}=\frac{a(۲۵-۲۰+۱)}{a(۱+۴+۱)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

یه‌جوردیگه چون $x=۲$ محور تقارن سهمی است و از آن‌جا که $۵-۲=۲-(-۱)$، نتیجه می‌گیریم که $f(۵)=f(-۱)$ است.

3 نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{c-3b}{a}$ کدام است؟



۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

وقتی ریشه‌های سهمی روی نمودار مشخصه، بهترین کار نوشتن معادله به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ هست. بعد ضرایب a، b و c رو با این فرمول پیدا کن.

درس Box

معادلهٔ سهمی با استفاده از ریشه‌ها (نقاط برخورد با محور طول‌ها)

بسته به این‌که سهمی محور xها را در چند نقطه قطع کند، معادلهٔ آن را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت (به شرط $a\neq 0$):

حالت اول: سهمی محور xها را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 قطع می‌کند.

- معادله: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$
- محور تقارن: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

حالت دوم: سهمی بر محور xها در یک نقطهٔ x_1 مماس است.

- معادله: $y=a(x-x_1)^2$
- محور تقارن: $x=x_1$ (در این حالت، رأس سهمی روی محور xها قرار دارد).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به محل برخورد نمودار تابع با محور xها می‌توان نوشت:

$$f(x)=a(x+1)(x-4) \Rightarrow f(x)=a(x^2-3x-4)$$

$$\Rightarrow f(x)=ax^2-3ax-4a$$

گام دوم: با مقایسهٔ ضابطهٔ به‌دست‌آمده با ضابطهٔ داده‌شده داریم:

$$b=-3a\,,\,c=-4a$$

$$\Rightarrow \frac{c-3b}{a}=\frac{-4a+9a}{a}=\frac{5a}{a}=5$$

4 اگر $(-۲,۳)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن سهمی $y=x^۲-ax-b$ پایین‌تر از خط $y=۲ax+۴b$ قرار می‌گیرد، حاصل ab کدام است؟

۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

شرط سؤال رو به صورت یک نامعادلهٔ درجه‌دو بنویس. وقتی جواب‌های یک نامعادلهٔ درجه‌دو به صورت بازهٔ بین دو عدد درمیاد، یعنی اون دو عدد، ریشه‌های خود معادله هستن.

درس Box

تعیین علامت عبارت درجه‌دوم $(ax^۲+bx+c)$

علامت عبارت درجه‌دوم به مقدار دلتا $(\Delta=b^۲-۴ac)$ و علامت ضریب a بستگی دارد. سه حالت کلی برای تعیین علامت وجود دارد:

- حالت اول: $\Delta>۰$

معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز $(\{x_۱,x_۲\})$ دارد. علامت عبارت در بازهٔ بین دو ریشه مخالف علامت a و در خارج از دو ریشه موافق علامت a است.

- حالت دوم: $\Delta=۰$

معادله یک ریشهٔ حقیقی مضاعف $(\{x_۰\})$ دارد. علامت عبارت در همه‌جا موافق علامت a است. به‌جز در خود ریشه که مقدار عبارت صفر می‌شود.

- حالت سوم: $\Delta<۰$

معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. علامت عبارت برای تمام مقادیر x ، همواره موافق علامت a است.

نکات:

- اگر $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد، عبارت همواره مثبت است.
- اگر $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد، عبارت همواره منفی است.
- اگر $a>۰$ و $\Delta\le۰$ باشد، عبارت همواره نامنفی (مثبت یا صفر) است.
- اگر $a<۰$ و $\Delta\le۰$ باشد، عبارت همواره نامثبت (منفی یا صفر) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای این‌که نمودار سهمی پایین‌تر از خط قرار گیرد باید $(-۲,۳)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر باشد:

$$x^۲-ax-b<۲ax+۴b \Rightarrow x^۲-۳ax-۵b<۰$$

گام دوم: با توجه به تعیین علامت عبارت درجه ۲، می‌توان نتیجه گرفت که $x=-۲$ و $x=۳$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳ax-۵b=۰$ هستند، در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix}x=۳:۹-۹a-۵b=۰\\ x=-۲:۴+۶a-۵b=۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{کم می‌کنیم.}]{\text{بالایی را از پایینی}} ۵-۱۵a=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}, b=\frac{۶}{۵}$$

$$\Rightarrow ab=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

یه‌جور دیگه

می‌تونستی برای مشخص‌کردن a و b از S و P استفاده کنی.

$$S=۱ \Rightarrow ۳a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$P=-۶ \Rightarrow -۵b=-۶ \Rightarrow b=\frac{۶}{۵}$$

5 جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=(a+4)x^2+(a-b+4)x-b$ به صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

x	$-\infty$	$a+1$		-1	$+\infty$
$P(x)$	$+$	∄	$-$	∄	$+$

۱) ۶
۲) ۳
۳) -3
۴) -6

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ **گام اول:** با توجه به جدول داده‌شده $x=-1$ و $x=a+1$ ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ هستند. به کمک روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم می‌توان نوشت:

$$S=a+1+(-1)=a \Rightarrow a=\frac{-(a-b+4)}{a+4}$$

$$P=(a+1)(-1)=-a-1 \Rightarrow -a-1=\frac{-b}{a+4}$$

$$a^2+4a=-a+b-4 \Rightarrow a^2+5a+4=b \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به جدول تعیین علامت عبارت $P(x)$ متوجه می‌شویم که ضریب x^2 در چندجمله‌ای $P(x)$ مثبت است، پس داریم:

$$a+4>0 \Rightarrow a>-4 \quad (1)$$

از طرفی عبارت دو ریشهٔ متمایز دارد، پس $a+1$ از -1 باید کوچک‌تر باشد:

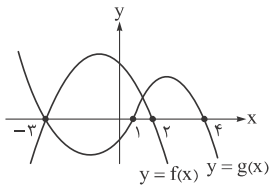
$$\Rightarrow a+1<-1 \Rightarrow a<-2 \quad (2)$$

از شرط‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $-4<a<-2$ است و از آن‌جا که طبق فرض سؤال a و b اعداد صحیح هستند، تنها مقدار صحیح قابل قبول برای a مقدار $a=-3$ است.

گام سوم: حالا $a=-3$ را در عبارت (*) جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$b=9-15+4=-2 \Rightarrow a\times b=6$$

6 اگر نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به صورت زیر باشند، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(x+1)g(x)}{f(x)} \leq 0$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

یه جدول تعیین علامت برای کل عبارت بکش. علامت هر کدوم از تابع‌ها رو با توجه به این‌که نمودارشون بالای محور x هست یا پایین، توی هر بازه مشخص کن.

درس Box

تعیین علامت حاصل‌ضرب و تقسیم عبارت‌ها

برای تعیین علامت یک عبارت که از ضرب یا تقسیم چند عبارت دیگر تشکیل شده است، از جدول تعیین علامت تجمعی استفاده می‌کنیم.

مراحل انجام کار:

۱) یافتن ریشه‌ها: ابتدا ریشه‌های تمام عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و روی محور اعداد مشخص می‌کنیم.

۲) تعیین علامت هر عبارت: جدول تعیین علامت را تشکیل داده و در سطرهای جداگانه، علامت هر یک از عبارت‌ها را در بازه‌های مختلف مشخص می‌کنیم.

۳) تعیین علامت نهایی: در سطر آخر جدول، با در نظر گرفتن قوانین ضرب و تقسیم علامت‌ها (تعداد زوجی از منفی‌ها، مثبت و تعداد فردی از آن، منفی می‌شود)، علامت کل عبارت را در هر بازه به دست می‌آوریم.

نکات مهم:

- در ریشه‌های صورت، کل عبارت برابر با صفر است (به شرطی که هم‌زمان ریشهٔ مخرج نباشد).
- در ریشه‌های مخرج، کل عبارت تعریف‌نشده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جدول تعیین علامت عبارت داده‌شده را رسم کرده و علامت‌های f و g را از روی نمودار مشخص می‌کنیم.

	$-\infty$	-3		-1		1		2		4	$+\infty$
$f(x)$	−	۰	+	‖	+	۰	+	ت ن	−	۰	−
$g(x)$	+	۰	−	‖	−	۰	+	‖	+	۰	−
$x+1$	−	‖	−	۰	+	‖	+	‖	+	‖	+
$\frac{(x+1)g(x)}{f(x)}$	+	ت ن	+	۰	−	۰	+	ت ن	−	۰	+

گام دوم: با توجه به جدول، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت زیر است:

$$x \in [-1,1] \cup (2,4]$$

که شامل ۵ عدد صحیح $\{-1,0,1,3,4\}$ است.

7 اگر m و n جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $A = (3m + \frac{2}{n})(3n + \frac{2}{m})$ کدام است؟

۱) ۳۲

۲) ۴۴

۳) ۲۸

۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اول حاصل عبارت خواسته‌شده رو به دست بیار. می‌بینی که نتیجه برحسب mn (یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها) ساده می‌شه. حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو هم که از خود معادله راحت به دست میاری.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: ابتدا عبارت داده‌شده را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A = (3m + \frac{2}{n})(3n + \frac{2}{m}) = 9mn + 6 + 6 + \frac{4}{mn}$$

گام دوم: حال با توجه به روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$mn = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow A = 9 \times 2 + 6 + 6 + \frac{4}{2} = 18 + 12 + 2 = 32$$

8 اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x^۲+(\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱)x+\sqrt{۳}+۱=۰$ کدام است؟

۱) $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$

۲) $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+۱)$

۳) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$

۴) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

برای پیداکردن اختلاف جواب‌ها، یک فرمول مستقیم و سریع وجود داره که از دلتا و ضریب a استفاده می‌کنه. اول دلتا رو حساب کن.

درس Box

روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم

برای معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که دارای جواب‌های $x_۱$ و $x_۲$ است، می‌توان مجموع، حاصل‌ضرب و تفاضل جواب‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم خود جواب‌ها و تنها با استفاده از ضرایب a, b, c به دست آورد:

- **مجموع جواب‌ها (S):** این رابطه از جمع دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$$

- **حاصل‌ضرب جواب‌ها (P):** این رابطه از ضرب دو ریشه در فرمول کلی به دست می‌آید.

$$P=x_۱.x_۲=\frac{c}{a}$$

- **قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:**

$$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\quad (\text{که در آن } \Delta=b^۲-۴ac)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم برای محاسبهٔ اختلاف جواب‌ها، ابتدا مقدار Δ معادله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=(\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱)^۲-۴(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow \Delta=۲+۱۲+۱-۴\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}-۴(۳-\sqrt{۶}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow \Delta=۳+۲\sqrt{۲}$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار Δ در رابطه داریم:

$$\text{اختلاف جواب‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{(۱+\sqrt{۲})^۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$$

گام سوم: با گویاکردن مقدار به‌دست‌آمده داریم:

$$\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$$

یه‌جور دیگه

مجموع ضرایب معادله صفر است:

$$\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱=۰$$

پس یکی از جواب‌ها $x_۱=۱$ و جواب دیگر $x_۲=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ است. ابتدا مخرج $x_۲$ را گویا می‌کنیم:

$$x_۲=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=۳+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$$

حالا اختلاف جواب‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|x_۲-x_۱|=۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)+\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۲})\Rightarrow |x_۲-x_۱|=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱)$$

9 **حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی از مجموع آن‌ها ۱۷ واحد بیشتر است. اگر اختلاف این دو عدد ۳ واحد باشد، نسبت آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint روابطی که سؤال داده رو برحسب مجموع جواب‌ها (S) و حاصل‌ضربشون (P) بنویس. بعد از رابطهٔ $(\alpha-\beta)^۲=S^۲-۴P$ استفاده کن تا یه معادله برای S پیدا کنی.

نکته **محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب S و P:**

اگر جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشند، می‌توان بسیاری از عبارت‌های شامل جواب‌ها را بدون محاسبهٔ مستقیم آن‌ها و تنها برحسب مجموع $(S=\alpha+\beta)$ و حاصل‌ضرب $(P=\alpha\beta)$ جواب‌ها به دست آورد.

- مجموع معکوس جواب‌ها: با مخرج‌مشترک گرفتن به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

- مجموع مربع‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

- مجموع مکعب‌های جواب‌ها: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به دست می‌آید:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳SP$$

- قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^۲}=\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}=\sqrt{S^۲-۴P}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید دو عدد حقیقی ما α و β باشد، در نتیجه:

$$S=\alpha+\beta, P=\alpha\beta \xrightarrow{\text{طبق فرض}} P=S+۱۷$$

گام دوم: حال اختلاف دو عدد را برحسب S و P می‌نویسیم:

$$d=|\alpha-\beta| \Rightarrow d^۲=(\alpha-\beta)^۲ \Rightarrow d^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta=S^۲-۴P$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{S^۲-۴P}$$

و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{S^۲-۴P}=۳ \Rightarrow \sqrt{S^۲-۴(S+۱۷)}=۳ \Rightarrow S^۲-۴S-۶۸=۹$$

$$\Rightarrow S^۲-۴S-۷۷=۰ \Rightarrow (S+۷)(S-۱۱)=۰ \Rightarrow S=-۷, S=۱۱$$

گام سوم: حال برای دو مقدار S، مقادیر P را نوشته و معادلهٔ درجه‌دومی را که جواب‌های آن α و β باشد، تشکیل می‌دهیم:

$$S=۱۱ \Rightarrow P=۲۸ \Rightarrow x^۲-۱۱x+۲۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۷)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=۴\\ \beta=۷\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{۴}{۷}, \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۷}{۴}$$

$$S=-۷ \Rightarrow P=۱۰ \Rightarrow x^۲+۷x+۱۰=۰ \Rightarrow (x+۵)(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=-۵\\ \beta=-۲\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{۵}{۲}, \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۲}{۵}$$

با توجه به گزینه‌ها نسبت دو عدد $\frac{۵}{۲}$ می‌تواند باشد.

10 نمودار تابع $f(x)=(x-1)(x^2-2mx-m-1)$ محور xها را در ۳ نقطه قطع می‌کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها برابر ۹ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$

۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint یکی از صفرها که معلومه $x=1$ هست. دوتا صفر دیگر (آلفا و بتا) مربوط به بخش درجه‌دو هستن. شرط مجموع مربعات صفرها رو بنویس. $(\alpha^2+\beta^2+1^2=9)$ و بعدش از رابطهٔ $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: فرض کنید α، β و γ طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها باشند:

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-2mx-m-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-2mx-m-1=0 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $\gamma=1$ و α و β جواب‌های معادلهٔ روبه‌رو باشند: $x^2-2mx-m-1=0 \quad (*)$

گام دوم: حال طبق فرض مسئله داریم:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+1=9 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=8$$

گام سوم: حال با توجه به روابط بین جواب‌ها و ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$\xrightarrow{(*)} \alpha+\beta=2m \ , \ \alpha\beta=-m-1$$

$$\alpha^2+\beta^2=8 \xrightarrow{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P} (2m)^2-2(-m-1)=8 \Rightarrow 4m^2+2m+2=8$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2m^2+m+1=4 \Rightarrow 2m^2+m-3=0$$

گام چهارم: مجموع ضرایب معادلهٔ بالا برابر صفر است، پس $m_1=1$ و $m_2=-\frac{3}{2}$ جواب‌های آن هستند. اختلاف این جواب‌ها برابر است با:

$$|m_1-m_2|=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

11 با فرض $a+b\neq 0$ و $ab\neq 0$، معادلهٔ $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ دارای جواب‌های α و β است. حاصل $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ab

۲) 1

۳) a^2b^2

۴) $ab(a+b)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

اول سمت راست تساوی رو مخرج‌مشترک بگیر. معادله خیلی ساده می‌شه و به یه معادلهٔ درجه‌دو می‌رسی که حاصل‌ضرب ریشه‌هاش رو راحت می‌تونی پیدا کنی.

درس Box

روش حل معادله‌های گویا

هدف اصلی در حل معادلات گویا، حذف مخرج‌ها و تبدیل معادله به یک معادلهٔ چندجمله‌ای ساده (معمولاً به فرم $P(x)=0$) است.

مراحل ساده‌سازی معادله: برای ساده‌سازی می‌توان از یکی از روش‌های زیر استفاده کرد:

۱) ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها و ساده‌کردن

۲) استفاده از طرفین‌وسطین (در حالتی‌که دو طرف تساوی یک کسر باشد.) و ساده‌کردن

۳) گرفتن مخرج‌مشترک و ساده‌سازی

مهم: بررسی جواب‌های قابل قبول: جوابی برای معادلهٔ گویا قابل قبول است که هیچ‌کدام از مخرج‌های موجود در معادلهٔ اصلی را صفر نکند. بهترین راه برای این کار، تعیین دامنهٔ عبارت‌های گویا در ابتدای حل مسئله است. جواب‌های نهایی که در این دامنه قرار ندارند، باید حذف شوند.

نکته

استفاده از تغییر متغیر در برخی معادلات گویای پیچیده که ساختار تکرارشونده دارند: می‌توان از روش تغییر متغیر برای ساده‌سازی و حل معادله استفاده کرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با مخرج‌مشترک‌گیری سمت راست تساوی، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+a+b}=\frac{ab+bx+ax}{abx}\Rightarrow\frac{1}{x+a+b}=\frac{ab+(a+b)x}{abx}$$

گام دوم: حال برای حل معادلهٔ اخیر داریم:

$$abx=(x+a+b)(ab+(a+b)x)$$

$$\Rightarrow abx=abx+(a+b)x^2+(a+b)ab+(a+b)^2x$$

$$\Rightarrow (a+b)x^2+(a+b)^2x+(a+b)ab=0$$

گام سوم: چون $a+b\neq 0$ و $ab\neq 0$، پس معادلهٔ درجه‌دوم زیر را داریم:

$$\xrightarrow{\div(a+b)} x^2+(a+b)x+ab=0$$

که در آن حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با:

$$P=\alpha\beta=ab$$

12 اگر $x=a$، جواب معادلهٔ $\frac{x+1}{x+a}=\frac{x-2}{x+3}$ باشد، حاصل $a^2+\frac{9}{a^2}$ کدام است؟

۱) ۲۰

۲) ۱۷

۳) ۸۶

۴) ۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint مقدار $x=a$ رو که خود سؤال به عنوان جواب داده، توی معادله جای‌گذاری کن. یه معادله برحسب a به دست میاد که با حل‌کردنش به یه رابطهٔ ساده بین a و $\frac{1}{a}$ می‌رسی.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ **گام اول:** با توجه به این‌که $x=a$، جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\frac{a+1}{2a}=\frac{a-2}{a+3}$$

گام دوم: برای حل معادلهٔ گویای اخیر داریم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} (a+3)(a+1)=(a-2)2a$$

$$\Rightarrow a^2+4a+3=2a^2-4a \Rightarrow a^2-8a-3=0$$

گام سوم: مقدار خواسته‌شده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$a^2-8a-3=0 \xrightarrow[a\neq -3]{a\neq 0} \frac{a^2}{a}-\frac{8a}{a}-\frac{3}{a}=0$$

$$\Rightarrow a-\frac{3}{a}=8 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2+\frac{9}{a^2}-6=64$$

$$\Rightarrow a^2+\frac{9}{a^2}=70$$

13 جواب معادلهٔ $\sqrt{x-2}+a=\sqrt{8x+\sqrt{4-x^2}}$ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم برابر $\frac{7}{2}$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۴۰
۳) ۴۶
۴) ۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول دامنهٔ معادلهٔ رادیکالی رو مشخص کن. گاهی وقتا دامنه فقط شامل یک یا چند عدد خاص می‌شه که همون جواب‌های معادله هستن!

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x=2$$

در نتیجه تنها $x=2$ در دامنهٔ این تساوی قرار دارد، پس $x=2$ جواب معادله است.

$$\sqrt{16+\sqrt{0}}=\sqrt{0}+a\Rightarrow a=4$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار a و این‌که $x=2$ جواب معادلهٔ درجه‌دوم است، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$4x^2+bx+c=0\xrightarrow{x=2}16+2b+c=0$$

گام سوم: هم‌چنین برای اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$\text{اختلاف ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{b^2-16c}}{4}$$

$$\Rightarrow 14=\sqrt{b^2-16c}\xrightarrow{c=-16-2b}14=\sqrt{b^2-16(-16-2b)}\Rightarrow 14=\sqrt{b^2+32b+256}$$

$$\Rightarrow 14=\sqrt{(b+16)^2}\Rightarrow 14=|b+16|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b+16=14\Rightarrow b=-2\Rightarrow c=-12\\ b+16=-14\Rightarrow b=-30\Rightarrow c=44\end{cases}$$

گام چهارم: دقت کنید در هر دو حالت برای مقادیر b و c، Δ معادلهٔ درجه‌دوم مثبت است و مقادیر b و c قابل قبول‌اند، در نتیجه اختلاف مقادیر ممکن برای c برابر است با:

$$|-12-44|=56$$

1 **از یک قطعهٔ مقوایی مربع‌شکل به طول ضلع ۱۶ می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز بسازیم. برای این منظور، از هر چهار گوشهٔ این مقوا چهار مربع به طول ضلع x می‌بریم و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام‌یک از توابع زیر حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟**

۱) $V(x)=2x(16-x)^2$

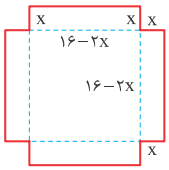
۲) $V(x)=x(16-x)^2$

۳) $V(x)=x(16-x^2)^2$

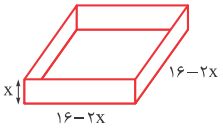
۴) $V(x)=x(16-2x)^2$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** یک منشور با قاعدهٔ مربعی داریم، که این قاعده به صورت زیر است:



یعنی منشور زیر را داریم:



گام دوم: حالا حجم این منشور از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V=S_{\text{قاعده}}\times \underbrace{h}_{x} \Rightarrow V(x)=x(16-2x)^2$$

2 در تابع خطی f، اگر $f(2)=3$ و $f(-2)=-5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x)=\frac{3f(x)-7}{f(x)-3}$ با دامنهٔ $D_g=(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

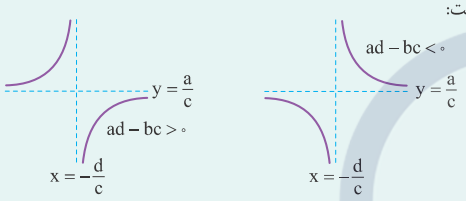
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابع گویا: تابعی کسری با ضابطهٔ $\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ تابع گویا نامیده می‌شود.

- دامنهٔ تابع گویا $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.
- معروف‌ترین تابع گویای دبیرستان تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq 0$ و $ad\neq bc$) با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و برد $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است. نمودار این تابع به یکی از شکل‌های زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✔

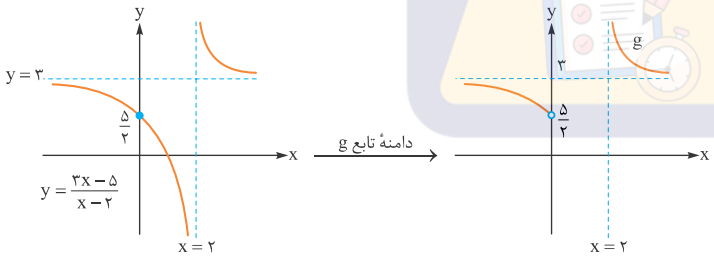
گام اول: ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم. با توجه به فرض سؤال تابع خطی f از نقاط $(-2,-5)$ و $(2,3)$ می‌گذرد. پس داریم:

$$\begin{cases}\text{شیب خط: } m=\frac{3-(-5)}{2-(-2)}=\frac{8}{4}=2\\ \xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)}\ y-3=2(x-2)\ \Rightarrow\ y=2x-1\end{cases}\Rightarrow f(x)=2x-1$$

گام دوم: حالا ضابطهٔ تابع g را می‌سازیم:

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{3f(x)-7}{f(x)-3}}\ g(x)=\frac{3(2x-1)-7}{(2x-1)-3}=\frac{6x-10}{2x-4}\ \Rightarrow\ g(x)=\frac{3x-5}{x-2}$$

گام سوم: با توجه به دستورالعمل درس‌باکس، نمودار تابع g را در دامنهٔ مفروض رسم می‌کنیم:



مطابق نمودار بالا، برد تابع g مجموعهٔ $(\frac{5}{2},+\infty)-\{3\}$ است که شامل ۳ عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ نیست. مجموع این ۳ عدد برابر ۶ است.

3 اگر دامنه و برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=b\sqrt{(a-2)x+a^2-2a-2}+b^2-b$ به ترتیب بازه‌های $(-\infty,-3]$ و $[2,+\infty)$ باشد، زوج مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-1,4)$ ۲) $(2,4)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(2,1)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ویژگی‌های تابع خاص $y=a+b\sqrt{cx+d}$

با توجه به علامت‌ها و مقادیر ۴ پارامتر a، b، c و d نمودار این تابع یکی از ۴ حالت زیر را دارد:

	چپ‌گرا	راست‌گرا
رو به بالا	$c<0, b>0$	$c>0, b>0$
رو به پایین	$c<0, b<0$	$c>0, b<0$

نقطهٔ توپر در همهٔ نمودارهای بالا $(-\frac{d}{c},a)$ است که در آن $-\frac{d}{c}$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به دامنه و برد تابع f، متوجه می‌شویم که نمودار تابع چپ‌گرا رو به بالا است، یعنی $b>0$ و $a-2<0$ است.

پس تا این‌جا داریم:

$$a<2, b>0 \qquad (*)$$

گام دوم: دامنه و برد برای ما مشخص می‌کند که $x=-3$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است و به ازای $x=-3$ مقدار تابع برابر ۲ شده است:

$$(a-2)x+a^2-2a-2=0 \xrightarrow{x=-3} -3a+6+a^2-2a-2=0$$

$$\Rightarrow a^2-5a+4=(a-1)(a-4)=0 \xrightarrow{(*)} a=1$$

گام سوم: پس تا این‌جا ضابطهٔ تابع $f(x)=b\sqrt{-(x+3)}+b^2-b$ است. باید $f(-3)$ برابر ۲ شود.

$$\Rightarrow f(-3)=0+b^2-b=2 \Rightarrow b^2-b-2=(b-2)(b+1)=0 \xrightarrow{(*)} b=2$$

پس زوج مرتب (a,b) به صورت $(1,2)$ است.

4 به ازای xهای مثبت، اگر $f(x-\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ باشد، $f(\sqrt{2})$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تعبیر سوال اینه که اگه $x-\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ باشد، مقدار $x^3+\frac{1}{x^3}$ چقدر می‌شه! از اتحادهای مربع دوجمله‌ای و چاق و لاغر استفاده کن.

درس Box

اتحادهای جبری

اتحاد مربع دوجمله‌ای: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

اتحاد مزدوج: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

اتحاد جمله‌مشترک: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

اتحاد مکعب دوجمله‌ای: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$

اتحاد چاق و لاغر: $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق hint، $x-\frac{1}{x}$ را مساوی $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم و سعی می‌کنیم براساس آن مقدار عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را حساب کنیم.

ابتدا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت $x^3+\frac{1}{x^3}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})$$
$$=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1) \quad (*)$$

گام دوم: حالا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای مقدار عبارت $x^2+\frac{1}{x^2}$ و سپس عبارت $x+\frac{1}{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+\frac{1}{x^2}-2=2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=4$$

حالا برای این‌که مربع عبارت $x+\frac{1}{x}$ را ایجاد کنیم، به طرفین تساوی بالا ۲ واحد اضافه می‌کنیم:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=6 \Rightarrow (x+\frac{1}{x})^2=6 \xrightarrow{x>0} x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$$

گام سوم: حالا طبق رابطهٔ (*) خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{*} x^3+\frac{1}{x^3}=(\sqrt{6})(4-1)=3\sqrt{6}$$

یه‌جور دیگه

از تساوی مفروض سؤال، سعی می‌کنیم ضابطهٔ تابع f را پیدا کنیم:

$$x-\frac{1}{x}=t \Rightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{x^2}-2=t^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2 \\ x^2+\frac{1}{x^2}+2=t^2+4 \xrightarrow{x>0} x+\frac{1}{x}=\sqrt{t^2+4} \end{cases}$$

حالا $x^3+\frac{1}{x^3}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$$
$$\xrightarrow{f(x-\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}} f(t)=\sqrt{t^2+4}(t^2+2-1)$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=(x^2+1)\sqrt{x^2+4}$ است و داریم:

$$f(\sqrt{2})=\pm 3\sqrt{6}$$

5 در مجموعهٔ اعداد حقیقی، تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(۲) = ۳g(۱)$ باشد، مقدار $\frac{(fog)(x-[x])}{(f-g)(۲)}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- تابع ثابت تابعی است که برد آن تک‌عضوی است. ضابطهٔ جبری این تابع $f(x) = c$ و نمودار آن خطی افقی است.
- تابع همانی تابعی است که مقدار خروجی و مقدار ورودی آن برابر است. ضابطهٔ جبری این تابع $f(x) = x$ و نمودار آن نیمساز ناحیه‌های اول و سوم دستگاه مختصات است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ضابطهٔ تابع f را $f(x) = c$ و ضابطهٔ تابع g را $g(x) = x$ می‌گیریم، طبق فرض سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f(۲)=۳g(۱)} c = ۳(۱) \Rightarrow c = ۳$$

گام دوم: حالا خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

ورودی هر چه باشد، خروجی مقدار ۳ است.

$$\frac{(fog)(x-[x])}{(f-g)(۲)} = \frac{\overbrace{f(g(x-[x]))}}{f(۲)-g(۲)} = \frac{۳}{۳-۲} = ۳$$

6 تعداد اعداد صحیح دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{2[x]-1}}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- دامنهٔ تابع رادیکالی $\sqrt{\square}$ مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $\square \geq 0$ است.
- جزء صحیح یک عدد صحیح، برابر خودش و جزء صحیح یک عدد ناصحیح برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح از میان اعداد کوچک‌تر از آن است؛ در واقع:

$$n \leq x < n+1 \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} [x]=n$$

- ویژگی‌های جزء صحیح:

۱) $[\square]=n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n \leq \square < n+1$

۲) $[\square]\geq n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \square \geq n$

۳) $[\square]\leq n \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} \square < n+1$

۴) $[\square]>k \xrightarrow{k\notin\mathbb{Z}} \square \geq [k]+1$

۵) $[\square]<k \xrightarrow{k\notin\mathbb{Z}} \square < [k]+1$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم؛ زیرا دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-2x}{2[x]-1}\geq 0$ است.

x		$\frac{1}{2}$	
$1-2x$	+	۰	−

و براساس روابط درس‌باکس، جدول تعیین علامت عبارت $2[x]-1$ را می‌نویسیم:

x		۱	
$2[x]-1$	−		+

گام دوم: حالا جدول هم‌زمان این دو عبارت را داریم:

x		$\frac{1}{2}$		۱	
$1-2x$	+	۰	−		−
$2[x]-1$	−	‖	−		+
$\frac{1-2x}{2[x]-1}$	−	۰	+		−

با توجه به جدول بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1-2x}{2[x]-1}\geq 0$ که همان دامنهٔ تابع f است، بازهٔ $[\frac{1}{2},1)$ خواهد شد. این بازه هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود.

تیزبازی اگر $x\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]=x$ و ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{-1}$ خواهد شد که غیر قابل قبول است؛ پس دامنهٔ تابع f شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

7 نمودار وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3+3x+a$ خط $2x-y-1=a$ را روی محور x قطع می‌کند. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) -4 ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته اگر نمودار تابع f^{-1} و نمودار تابع g یکدیگر را در نقطهٔ (α,β) قطع کنند، نمودار توابع f و g^{-1} یکدیگر را در نقطهٔ (β,α) قطع می‌کنند. این نکتهٔ مهم راهکار حل چند سؤال مهم کنکور سراسری بوده است، به این ترتیب که به دست آوردن ضابطهٔ تابع f^{-1} و حل معادلهٔ مذکور بسیار دشوار و خارج از عرف دبیرستان است، اما می‌توانیم تابع f را با وارون یک تابع خطی قطع دهیم. فقط در این راه حل، باید حواسمان به جابه‌جایی طول و عرض نقطهٔ تقاطع باشد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به جای این‌که نمودار وارون تابع f را با تابع خطی $g(x)=2x-a-1$ قطع دهیم تا نقطهٔ برخورد $P(\alpha,0)$ را به دست آوریم، بهتر است خود نمودار تابع f را با وارون تابع g یعنی g^{-1} قطع دهیم تا نقطهٔ $P'(0,\alpha)$ به دست آید. پس در این گام باید ضابطهٔ تابع g^{-1} را به دست آوریم:

$$y=2x-a-1 \Rightarrow x=\frac{y+a+1}{2} \xrightarrow{\text{جای x و y عوض شود}} g^{-1}(x)=\frac{x+a+1}{2}$$

گام دوم: حالا طبق فرض سؤال، جواب معادلهٔ $f(x)=g^{-1}(x)$ باید طول نقطهٔ P' یعنی $x=0$ باشد:

$$x^3+3x+a=\frac{x+a+1}{2} \xrightarrow{x=0} a=\frac{a+1}{2} \Rightarrow a=1$$

گام سوم: یعنی ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^3+3x+1$ و در نتیجه $f(a)=f(1)=5$ است.

کنکور به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ خط $10y-x=-10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟ *(سؤال ۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۵

8 اگر $f(x)=\begin{cases}2x+6 & ; \ x\le -1\\ x+2 & ; \ x>-1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x-2 & ; \ f(x)<0\\ 2x-6 & ; \ f(x)\ge 0\end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(-1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -6 ۳) -1 ۴) -10

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

ترکیب دو تابع f و g را با نماد fog نمایش می‌دهیم و به معنای آن است که مقدار تابع g به عنوان ورودی به تابع f داده می‌شود:

به بیان دیگر $(fog)(a)$ مقدار تابع f در $g(a)$ است نه در a.

$$x \xrightarrow{\ g\ } \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \longrightarrow (fog)(x)$$

دامنهٔ تابع مرکب fog از راه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $(fog)(-1)$ یا $f(g(-1))$ مقدار تابع f در $g(-1)$ است، پس ابتدا به $g(-1)$ نیاز داریم.

برای محاسبهٔ $g(-1)$ هم به $f(-1)$ نیاز داریم:

$$f(-1)=2(-1)+6=4$$

و چون این مقدار مثبت است، در تابع g، از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f(-1)\ge 0} g(-1)=2(-1)-6=-8$$

گام دوم: در نهایت داریم:

$$f(g(-1))=f(-8)=2(-8)+6=-10$$

کنکور

اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>2\\ -3x+7 & x\le 2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x+4 & f(x)\ge 0\\ x-4 & f(x)<0\end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-4)$ کدام است؟

(سؤال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) ۱۹ ۲) ۹ ۳) -15 ۴) -5

9 اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، به ازای $x\geq 1$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(gof)(x)=\sqrt{x^2-1}$

۲) $(fog)(x)=x-1$

۳) $(fof)(x)=x^4-2x^2$

۴) $(gog)(x)=\sqrt{x^4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

پیداکردن ضابطه در توابع مرکب:

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطهٔ $f(x)$ ، $g(x)$ و $(fog)(x)$ معلوم است و ضابطهٔ سوم را از ما می‌خواهند. جدول زیر روش‌های به دست آوردن ضابطهٔ سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	$f(x)$	$g(x)$	$(fog)(x)$
روش	معلوم	معلوم	به جای هر xای که در ضابطهٔ $f(x)$ می‌بینیم، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
	ضابطهٔ $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t به دست می‌آوریم (همان ضابطهٔ $g^{-1}(x)$) و سپس در ضابطهٔ $(fog)(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.	معلوم	معلوم
	معلوم	به جای هر x ضابطهٔ $f(x)$، عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطهٔ $(fog)(x)$ برابر باشد. در این شرایط، معادله‌ای را باید حل کنیم که متغیر مجهول آن $g(x)$ است.	معلوم

پاسخ خیلی تشریحی طبق درس‌باکس عمل می‌کنیم و فقط کافی است ضابطه جای‌گذاری کنیم:

گزینهٔ (۱): $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$ ✓

گزینهٔ (۲): $(fog)(x)=f(g(x))=g^2(x)-1=x-1$ ✓

گزینهٔ (۳): $(fof)(x)=f(f(x))=f^2(x)-1=x^4-2x^2+1-1=x^4-2x^2$ ✓

گزینهٔ (۴): $(gog)(x)=g(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ ✗

10 کدام تابع روی بازهٔ $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ وارون‌پذیر نیست؟

۱) $f(x)=x^۲-۲x+۱$

۲) $g(x)=۵x-x^۲$

۳) $h(x)=\frac{x-۲}{|x-۱|}$

۴) $k(x)=x^۳-۳x+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

یک تابع که در دامنه‌اش وارون‌ناپذیر است، می‌تواند در زیرمجموعه‌ای (غالباً بازه) از دامنه‌اش وارون‌پذیر باشد. به عنوان مثال تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید. این تابع مشخصاً روی $\mathbb{R}$ غیر یک‌به‌یک یا وارون‌ناپذیر است، اما روی بازه‌های $(-\infty,x_s]$ یا $[x_s,+\infty)$ که $x_s=-\frac{b}{۲a}$ وارون‌پذیر است.

در حالت کلی یک تابع درجه‌دوم در بازه‌ای که طول رأس سهمی جزء نقاط درونی آن بازه نباشد، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است؛ در غیر این صورت وارون‌ناپذیر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بازهٔ $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ شامل طول رأس نمودار تابع g خواهد بود؛ زیرا:

$$x_s=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۵}{-۲}=\frac{۵}{۲}>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین طبق درس‌باکس، این تابع غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

1 اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$، حاصل $\sin^5 x+\cos^5 x$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{13}{9\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{11}{9\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{5}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

اول از همه با به توان دو رسوندن رابطهٔ داده‌شده، مقدار $\sin x\cos x$ رو پیدا کن. بعدش می‌تونی از اتحاد چاق و لاغر برای توان ۵ استفاده کنی.

نکته

تعمیم اتحاد چاق و لاغر (اتحادهای توان nام):

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات را می‌توان برای توان‌های طبیعی دلخواه n تعمیم داد. این دو اتحاد در تجزیهٔ عبارت‌های جبری بسیار پرکاربرد هستند:

تفاضل توان‌های nام (برای هر n طبیعی):

این اتحاد برای تمام توان‌های طبیعی برقرار است.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$$

در این اتحاد، تمام علامت‌های داخل پرانتز دوم (پرانتز چاق) مثبت هستند.

مجموع توان‌های nام (فقط برای n فرد):

این اتحاد تنها زمانی برقرار است که توان n، یک عدد طبیعی فرد باشد.

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$$

در این اتحاد، علامت‌های داخل پرانتز دوم به صورت یکی‌درمیان مثبت و منفی هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک اتحاد ذکرشده در نکته و سایر اتحادهای جبری و مثلثاتی، خواستهٔ مسئله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)$$
$$=(\sin x+\cos x)(\sin^4 x+\cos^4 x-\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x\cos^2 x)$$
$$\Rightarrow \sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x)$$
$$\Rightarrow \sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)(1-(\sin x\cos x)^2-\sin x\cos x)$$

گام دوم: حال برای پیداکردن مقدار $\sin x\cos x$ داریم:

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{3}\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{-1}{3}$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر داریم:

$$(\sin^5 x+\cos^5 x)=(\frac{1}{\sqrt{3}})(1-(\frac{-1}{3})^2-(\frac{-1}{3}))=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{11}{9})=\frac{11}{9\sqrt{3}}$$

یه‌جور دیگه

فرض کنید $\sin x$ و $\cos x$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم باشند:

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin x\cos x=\frac{-1}{3}\Rightarrow t^2-\frac{1}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{3}=0$$

حال چون ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کنند، داریم:

$$\sin^2 x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x-\frac{1}{3}=0\xrightarrow{\times\sin^{n-2}(x)}\sin^n(x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{n-1}(x)-\frac{1}{3}\sin^{n-2}(x)=0$$
$$\cos^2 x-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos-\frac{1}{3}=0\xrightarrow{\times\cos^{n-2}(x)}\cos^n(x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos^{n-1}(x)-\frac{1}{3}\cos^{n-2}(x)=0$$
$$\Rightarrow \sin^n(x)+\cos^n(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin^{n-1}(x)+\cos^{n-1}(x))+\frac{1}{3}(\sin^{n-2}(x)+\cos^{n-2}(x))$$

2 اگر $\frac{\sin x}{1+\cos x} = -2$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{1+\tan x}{1+\cot x}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از فرض سؤال و اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ استفاده کن تا مقدار sin و cos رو به دست بیاری!

درس Box

روابط و اتحادهای پایه‌ای مثلثاتی:

برای هر زاویهٔ α که مخرج کسرها را صفر نکند، روابط اساسی زیر بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است:

۱) **روابط کسری:** این روابط، تانژانت و کتانژانت را برحسب سینوس و کسینوس تعریف می‌کنند.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

۲) **روابط معکوس:** تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگر هستند.

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha = 1$$

۳) **اتحادهای فیثاغورسی:** این اتحادها از مهم‌ترین روابط در مثلثات هستند.

اتحاد اصلی: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

که از آن نتیجه می‌شود: $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \ , \ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

اتحادهای مشتق‌شده: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ , \ 1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا عبارت خواستهٔ سؤال را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{1+\tan x}{1+\cot x} = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}} = \frac{1+\tan x}{\frac{1+\tan x}{\tan x}} = \tan x$$

گام دوم: حال به کمک فرض مسئله و اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\begin{cases}\sin x = -2-2\cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\end{cases} \Rightarrow (-2-2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x + 8\cos x + 4 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x+1)(5\cos x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x = \frac{-3}{5} \xrightarrow{\pi<x<\frac{3\pi}{2}} \cos x = \frac{-3}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{-4}{5} \\ \cos x = -1\end{cases}$$

گام سوم: حال برای محاسبهٔ مقدار $\tan x$ داریم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

یه‌جور دیگه

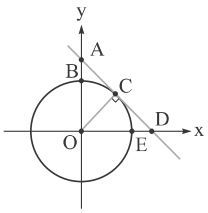
با توجه به روابط 2α داریم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = -2$$

حال می‌توان نوشت:

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

3 در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر طول پاره‌خط AB برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول پاره‌خط DE کدام است؟



۱) $\frac{۳}{\sqrt{۷}}-۱$

۲) $\frac{۴}{\sqrt{۷}}-۱$

۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}-۱$

۴) $\sqrt{۵}-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

با توجه به اطلاعات مسئله و مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که داری، سعی کن سینوس و کسینوس زاویهٔ θ رو برحسب طول پاره‌خط‌ها بنویسی. بعد از اتحاد $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ استفاده کن.

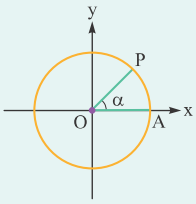
درس Box

تعریف دایرهٔ مثلثاتی و زاویهٔ استاندارد:

دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ واحد است که مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار دارد.

در این دایره، زاویه‌ها در وضعیت استاندارد سنجیده می‌شوند:

- ضلع ابتدایی: همواره روی جهت مثبت محور xها (شعاع OA) قرار دارد.
- ضلع انتهایی: از دوران ضلع ابتدایی حول مبدأ به دست می‌آید.
- جهت دوران: دوران پادساعتگرد مثبت $(+)$ و ساعتگرد منفی $(-)$ در نظر گرفته می‌شود.



نقطهٔ برخورد ضلع انتهایی زاویهٔ α با دایره را نقطهٔ P می‌نامیم.

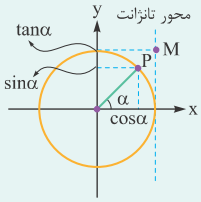
تعریف نسبت‌های مثلثاتی روی دایره:

اگر نقطهٔ انتهایی کمان زاویهٔ α روی دایره، نقطهٔ $P(x,y)$ باشد:

سینوس و کسینوس:

- کسینوس زاویهٔ α برابر با طول نقطهٔ P است $(\cos\alpha=x)$. محور طول‌ها به همین دلیل محور کسینوس‌ها نامیده می‌شود.
- سینوس زاویهٔ α برابر با عرض نقطهٔ P است $(\sin\alpha=y)$. محور عرض‌ها به همین دلیل محور سینوس‌ها نامیده می‌شود.
- از آن‌جا که x و y روی دایرهٔ واحد هستند، همواره داریم: $-۱\le\sin\alpha\le۱$ و $-۱\le\cos\alpha\le۱$

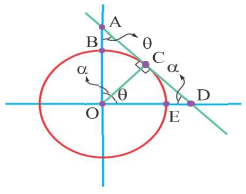
تانژانت:



- خط $x=۱$ (خط مماس بر دایره در نقطهٔ A) را محور تانژانت‌ها می‌نامیم.
- برای یافتن مقدار تانژانت، ضلع انتهایی زاویهٔ α را امتداد می‌دهیم تا این محور را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. عرض نقطهٔ M برابر با $\tan\alpha$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا زاویه‌ها را به صورت زیر در شکل نام‌گذاری می‌کنیم:



گام دوم: حال در مثلث‌های AOC و OCD داریم:

$$\overset{\Delta}{AOC}:\sin\theta=\frac{OC}{AO}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{OCD}:\cos\theta=\frac{OC}{OD}=\frac{۱}{OD}$$

گام سوم: حال به کمک اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \frac{9}{16}+\frac{1}{OD^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{OD^2}=\frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow OD^2=\frac{16}{7} \Rightarrow OD=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

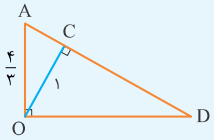
گام چهارم: اندازهٔ خواسته‌شده برابر است با:

$$DE=OD-OE=\frac{4}{\sqrt{7}}-1$$

یه‌جور دیگه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD، OC ارتفاع وارد بر وتر است و با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{(\frac{4}{3})^2-1}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$



$$\xrightarrow{OC^2=AC\times CD} 1^2=\frac{\sqrt{7}}{3}\times CD \Rightarrow CD=\frac{3}{\sqrt{7}}$$

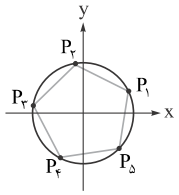
حالا مجدداً از فیثاغورس استفاده می‌کنیم :

$$\overset{\Delta}{OCD}: OD^2=\sqrt{OC^2+CD^2}=\sqrt{1^2+(\frac{3}{\sqrt{7}})^2}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

پس طول DE برابر است با $\frac{4}{\sqrt{7}}-1$.

سنجش کلاد

4 در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اگر عرض نقطهٔ P_1 برابر $\frac{1}{2}$ و چندضلعی $P_1P_2P_3P_4P_5$ منتظم باشد، طول نقطهٔ P_4 کدام است؟



۱) $-\sin 24^\circ$

۲) $-\cos 24^\circ$

۳) $-\sin 26^\circ$

۴) $-\cos 26^\circ$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

توی پنج‌ضلعی منتظم، زاویهٔ بین هر دو رأس متوالی از مرکز دایره، $\frac{360}{5} = 72$ درجه است. با داشتن زاویهٔ نقطهٔ اول، می‌تونی زاویهٔ نقطهٔ چهارم رو پیدا کنی و کسینوسش رو حساب کنی.

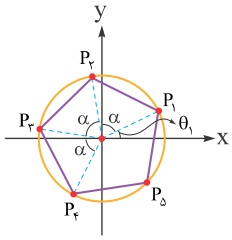
نکته

جدول کامل روابط مثلثاتی زوایای کمکی:

زاویه	sin	cos	tan	cot
$-\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
$\pi+\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$
$2k\pi+\alpha$	$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شکل مقابل و عرض نقطهٔ P_1 داریم:



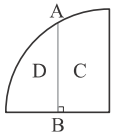
$$\sin\theta_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1=30^\circ$$

گام دوم: در پنج‌ضلعی منتظم، زاویهٔ بین هر دو رأس متوالی برابر $\alpha=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$ است.

حال برای رسیدن از P_1 به P_4 باید ۳ رأس به جلو حرکت کنیم، در نتیجه داریم:

$$x_{P_4}=\cos(\theta_1+3\alpha)=\cos(30^\circ+3\times72^\circ)=\cos(246^\circ)=\cos(270^\circ-24^\circ)=-\sin 24^\circ$$

5 در شکل زیر پاره‌خط AB به طول $\sqrt{۳}$، عمودمنصف شعاع ربع دایره است. محیط ناحیهٔ C چه‌قدر از محیط ناحیهٔ D بیشتر است؟

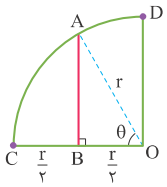


۱) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$
۲) $۲-\frac{\pi}{۳}$
۳) $۲-\frac{\pi}{۶}$
۴) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB، شعاع دایره رو پیدا کن. بعد محیط هر ناحیه رو حساب کن که شامل طول کمان و طول پاره‌خط‌ها می‌شه.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا به کمک شکل زیر و رابطهٔ فیثاغورس شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:



$$(OB)^۲+(AB)^۲=(OA)^۲$$

$$\Rightarrow (\frac{r}{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲=r^۲ \Rightarrow ۳=r^۲-\frac{r^۲}{۴} \Rightarrow r^۲=۴ \Rightarrow r=۲$$

گام دوم: حال برای محاسبهٔ طول کمان‌های ناحیه‌های C و D داریم:

$$\cos\theta=\frac{OB}{OA}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{L=r\theta} |\overset{\frown}{AC}|=۲\times\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow |\overset{\frown}{AD}|=۲\times(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۳}$$

گام سوم: با توجه به اندازه‌های به‌دست‌آمده داریم:

$$P_C: OD+OB+AB+|\overset{\frown}{AD}|=۲+۱+\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}=۳+\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$$

$$P_D: CB+AB+|\overset{\frown}{AC}|=۱+\sqrt{۳}+\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow P_C-P_D=(۳+\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳})-(۱+\sqrt{۳}+\frac{۲\pi}{۳})=۲-\frac{\pi}{۳}$$

6 با فرض $\tan ۵۰^\circ = \frac{۱۷}{۲۰}$، حاصل $\frac{۳\sin ۴۰۰^\circ + ۲\cos ۲۲۰^\circ}{۳\sin ۱۴۰^\circ - \cos ۵۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۲۱}{۲۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

اول با استفاده از روابط زوایای کمکی (مثل $۱۴۰^\circ = ۹۰^\circ + ۵۰^\circ$)، سینوس و کسینوس‌های عبارت رو ساده کن. بعد کل صورت و مخرج رو بر $\cos ۵۰^\circ$ تقسیم کن تا عبارت برحسب $\tan ۵۰^\circ$ ساده بشه.

درس Box

روش محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویا با استفاده از زوایای مرتبط:

برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، می‌توانیم از روش گام به گام زیر پیروی کنیم:

۱) **تبدیل زاویه:** ابتدا زاویهٔ مورد نظر را به شکل $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ بازنویسی می‌کنیم، به طوری که k یک عدد صحیح باشد (زوج یا فرد بودن k مهم است).

۲) **تعیین ربع دایره:** با فرض این‌که α یک زاویهٔ تند (حاده) است، مشخص می‌کنیم که انتهای کمان مربوط به زاویهٔ اصلی $(\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha)$ در کدام ربع (ناحیه) دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد.

۳) **تعیین علامت نسبت:** با توجه به ربعی که در مرحلهٔ قبل مشخص شد، علامت (+ یا −) نسبت مثلثاتی مورد نظر (سینوس، کسینوس، تانژانت یا کتانژانت) را برای آن ربع تعیین می‌کنیم.

۴) **حذف مضرب $\frac{\pi}{۲}$:** بخش $\frac{k\neq}{۲}$ را از عبارت $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ حذف می‌کنیم.

۵) **تبدیل یا حفظ نسبت:**

- اگر k در مرحلهٔ ۱ **زوج** بود، نوع نسبت مثلثاتی **تغییر نمی‌کند** (سینوس به سینوس، کسینوس به کسینوس و ...).
- اگر k در مرحلهٔ ۱ **فرد** بود، نوع نسبت مثلثاتی به **نسبت همنام** خود تبدیل می‌شود (سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا به کمک درس‌باکس عبارت خواسته‌شده را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{۳\sin(۴۵^\circ - ۵۰^\circ) + ۲\cos(۲۷۰^\circ - ۵۰^\circ)}{۳\sin(۹۰^\circ + ۵۰^\circ) - \cos ۵۰^\circ} = \frac{۳\cos ۵۰^\circ - ۲\sin ۵۰^\circ}{۳\cos ۵۰^\circ - \cos ۵۰^\circ} = \frac{۳\cos ۵۰^\circ - ۲\sin ۵۰^\circ}{۲\cos ۵۰^\circ}$$

گام دوم: با تقسیم عبارت‌های صورت و مخرج بر $\cos ۵۰^\circ$ داریم:

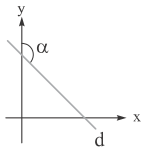
$$\frac{\frac{۳\cos ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ} - \frac{۲\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}}{\frac{۲\cos ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}} = \frac{۳ - ۲\tan ۵۰^\circ}{۲} = \frac{۳ - ۲\times\frac{۱۷}{۲۰}}{۲} = \frac{\frac{۶۰ - ۳۴}{۲۰}}{۲} = \frac{\frac{۲۶}{۴۰}}{} = \frac{۱۳}{۲۰}$$

یه‌جور دیگه

$$\text{عبارت} = \frac{۳\sin(۳۶۰^\circ + ۴۰^\circ) + ۲\cos(۱۸۰^\circ + ۴۰^\circ)}{۳\sin(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۴۰^\circ)} = \frac{۳\sin ۴۰^\circ - ۲\cos ۴۰^\circ}{۳\sin ۴۰^\circ - \sin ۴۰^\circ}$$

$$= \frac{۳}{۲} - \cot ۴۰^\circ = \frac{۳}{۲} - \tan ۵۰^\circ = \frac{۳}{۲} - \frac{۱۷}{۲۰} = \frac{۱۳}{۲۰}$$

7 در شکل مقابل، شیب خط d برابر $-\frac{۳}{۴}$ است. حاصل $\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$

۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$

۴) $-\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای هست که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازه. از این رابطه استفاده کن و بعد با کمک روابط مثلثاتی، مقدار خواسته‌شده رو پیدا کن.

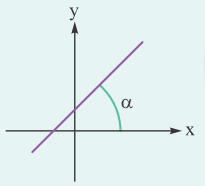
درس Box

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه:

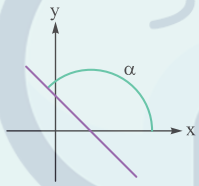
شیب خط (m) برابر است با تانژانت زاویه‌ای (α) که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. $m = \tan\alpha$

این زاویهٔ α همواره در بازهٔ $(۰,۱۸۰^\circ)$ در نظر گرفته می‌شود.

- اگر شیب خط مثبت باشد $(m > ۰)$، زاویهٔ α یک زاویهٔ تند خواهد بود $(۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ)$.
- اگر شیب خط منفی باشد $(m < ۰)$، زاویهٔ α یک زاویهٔ باز خواهد بود $(۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ)$

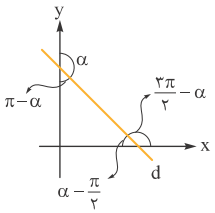


$m = \tan\alpha > ۰$



$m = \tan\alpha < ۰$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا زوایا را روی شکل به صورت مقابل مشخص می‌کنیم:



گام دوم: حال به کمک رابطهٔ شیب خط و تانژانت داریم:

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow \cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\frac{-۴}{۳}$$

1 **از مبدأ مختصات، دو مماس بر سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ + ۱$ رسم می‌کنیم. مساحت مثلثی با رئوس $A(۰,-۱)$ و نقاط تماس کدام است؟**

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

یک نقطهٔ تماس عمومی $P(a,۲a^۲+۱)$ در نظر بگیر. معادلهٔ خط مماس در P را بنویس. چون این خط از مبدأ $(۰,۰)$ می‌گذره. با جای‌گذاری $y=۰$ و $x=۰$ می‌تونی مقادیر a رو پیدا کنی. این‌ها xهای نقاط تماس B و C هستن حالا سه رأس مثلث $A(۰,-۱)$ ، B و C رو داری و می‌تونی مساحت اون رو حساب کنی.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

گام اول: ابتدا معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۱$ را در یک نقطهٔ دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم. مختصات نقاط روی منحنی به صورت $(a,۲a^۲+۱)$ است. برای محاسبهٔ شیب خط مماس داریم:

$$f'(x) = ۴x \Rightarrow m = f'(a) = ۴a$$

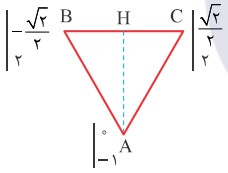
معادلهٔ خط مماس : $y - ۲a^۲ - ۱ = ۴a(x-a) \Rightarrow y = ۴ax - ۲a^۲ + ۱$

گام دوم: خطوط مماس از مبدأ مختصات عبور می‌کنند:

$$۰ = ۴a(۰) - ۲a^۲ + ۱ \Rightarrow ۲a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین دو خط مماس با این ویژگی داریم، یکی در $x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و دیگر در $x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

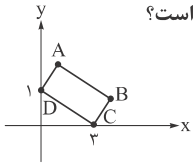
گام سوم: برای پیداکردن مساحت مثلث خواسته‌شده داریم:



$$f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = f(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = ۲$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۲} \times ۳ = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

2 در شکل مقابل، مساحت مستطیل برابر ۵ است. مجموع طول نقطهٔ **A** و عرض نقطهٔ **B** کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

فاصلهٔ دو نقطه:

- **حالت کلی (در صفحه):** فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- حالت خاص (روی محور x): فاصلهٔ بین $A(x_A, 0)$ و $B(x_B, 0)$ برابر است با:

$$d(A,B) = |x_A - x_B|$$

- حالت خاص (روی محور y): فاصلهٔ بین $C(0, y_C)$ و $D(0, y_D)$ برابر است با:

$$d(C,D) = |y_C - y_D|$$

وضعیت دو خط نسبت به هم:

۱) **دو خط موازی:**

- دو خطی که موازی محور yها نیستند (شیب m_1 و m_2 دارند)، زمانی موازی هستند که شیب‌هایشان برابر باشد: $m_1 = m_2$.
- خطوط عمودی $x = a$ و $x = b$ با هم موازی هستند.

۲) **دو خط عمود بر هم:**

- دو خطی که موازی محورها نیستند، زمانی بر هم عمودند که حاصل‌ضرب شیب‌هایشان -1 باشد: $m_1 \times m_2 = -1$ (شیب هر کدام قرینه و معکوس دیگری است.)
- خطوط افقی $(y = b)$ و عمودی $(x = a)$ بر هم عمودند.

۳) **دو خط متقاطع:**

- برای یافتن مختصات نقطهٔ برخورد، کافی است دستگاه معادلات دو خط را حل کنیم:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- اگر دستگاه، جواب نداشته باشد، دو خط موازی هستند.
- اگر دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، دو خط بر هم منطبق هستند.

نکته

فاصلهٔ دو خط موازی:

فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه برای استفاده از فرمول بالا، ضروری است که ضرایب x و y در هر دو معادله دقیقاً یکسان باشند. اگر یکسان نبودند، باید یکی از معادلات را در عددی ضرب کنیم تا ضرایب a و b برابر شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: ابتدا طول ضلع CD و معادلهٔ خطی را که ضلع CD روی آن قرار دارد، مشخص می‌کنیم:

معادلهٔ ضلع CD : $x+3y=3$

$$CD=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

$$S_{ABCD}=5 \Rightarrow 5=\sqrt{10}\times BC \Rightarrow BC=AD=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

گام دوم: حال به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو خط موازی، معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن قرار دارد، به دست می‌آوریم:

معادلهٔ ضلع AB: $x+3y+c=0$

$$\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{|-3-c|}{\sqrt{10}} \Rightarrow 5=|-3-c| \Rightarrow \begin{cases} c=-8 & \checkmark \\ c=+2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

معادلهٔ ضلع AB: $x+3y=8$

دقت کنید که عرض از مبدأ خط گذرا از ضلع AB باید از ۱ بیشتر باشد.

گام سوم: با توجه به این‌که طول و عرض مستطیل بر هم عمودند، معادلهٔ خطوطی را که اضلاع AD و BC روی آن‌ها قرار دارند، به دست می‌آوریم:

$$m_{CD}=\frac{-1}{3} \Rightarrow m_{AD}=m_{BC}=3$$

معادلهٔ ضلع BC با نقطهٔ $(3,0)$: $y-0=3(x-3) \Rightarrow y=3x-9$

معادلهٔ ضلع AD با نقطهٔ $(0,1)$: $y-1=3(x-0) \Rightarrow y=3x+1$

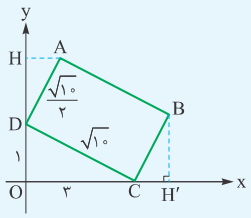
گام چهارم: برای مشخص‌کردن مختصات A و B داریم:

$$A:\begin{cases} y=3x+1 \\ x+3y=8 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) \qquad B:\begin{cases} y=3x-9 \\ x+3y=8 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{طول نقطهٔ A} + \text{عرض نقطهٔ B} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

یه‌جور دیگه

پس از گام اول، شکل مقابل را داریم:

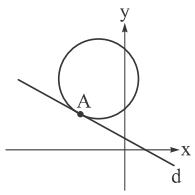


دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD و AHD با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ متشابه هستند و داریم:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{HD}{OC}=\frac{AH}{OD}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} AH=\frac{1}{2} \Rightarrow x_A=\frac{1}{2} \\ HD=\frac{3}{2} \end{cases}$$

و مثلث‌های AHD و $BH'C$ نیز هم‌نهشت هستند؛ بنابراین $BH'=HD=1/5$ است؛ این یعنی $y_B=1/5$ است.

3 در شکل زیر، شعاع دایره برابر $\sqrt{10}$ و مرکز آن روی خط $y = x + 5$ قرار دارد. اگر خط d در نقطهٔ $A(-2,1)$ بر دایره مماس باشد، معادلهٔ خط d کدام است؟



۱) $3y + x = 2$

۲) $3y + x = 1$

۳) $4y + x = 1$

۴) $4y + x = 2$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔ **گام اول**: مختصات مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha+5)$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$AO = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(\alpha+2)^2 + (\alpha+4)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 10$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 12\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

اگر $\alpha = -5$ مختصات مرکز به صورت $O(-5,0)$ می‌شود که با توجه به شکل قابل قبول نیست، پس $\alpha = -1$ و $O(-1,4)$.

گام دوم: شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، در نتیجه برای نوشتن معادلهٔ خط d داریم:

$$m_{OA} = \frac{4-1}{-1-(-2)} = 3 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{3}$$

معادلهٔ خط d با نقطهٔ $(-2,1)$: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow 3y - 3 = -x - 2 \Rightarrow 3y + x = 1$

سنجش کلاه

4 مساحت ذوزنقه‌ای که محدود به خط‌های $x=-1$، $y=2$ و $x^2+y^2=2xy+4$ است، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

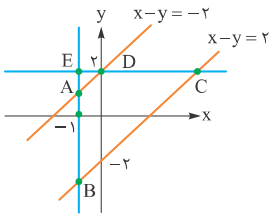
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به تساوی داده‌شده، معادلهٔ خطوط آن را مشخص می‌کنیم:

$$x^2+y^2-2xy=4 \Rightarrow (x-y)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

گام دوم: حال با رسم خطوط در دستگاه مختصات داریم:



گام سوم: حال برای به دست آوردن مساحت ذوزنقهٔ ABCD، ابتدا مختصات رأس‌های A، B، C و D را مشخص می‌کنیم:

$$A:\begin{cases} x=-1 \\ x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(-1,1)$$

$$B:\begin{cases} x=-1 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow B=(-1,-3)$$

$$C:\begin{cases} y=2 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow C(4,2)$$

$$D(0,2) \text{ و } E(-1,2)$$

$$S_{ABCD}=S_{\underset{BEC}{\Delta}}-S_{\underset{AED}{\Delta}}=(\frac{1}{2}\times BE\times EC)-(\frac{1}{2}\times AE\times DE)=(\frac{1}{2}\times 5\times 5)-(\frac{1}{2}\times 1\times 1)=\frac{25}{2}-\frac{1}{2}=\frac{24}{2}=12$$

1 **اگر a,b,c به ترتیب از چپ به راست سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت و $a,2b,3c$ نیز به ترتیب از چپ به راست سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چند برابر a است؟**

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

- اگر x، y و z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، تساوی $y=\frac{x+z}{2}$ برقرار است.
- اگر x، y و z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، تساوی $xz=y^2$ برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از نکتهٔ بالا استفاده می‌کنیم و ویژگی جملات دو دنباله را می‌نویسیم:

$$a,b,c \Rightarrow ac=b^2$$

$$a,2b,3c \Rightarrow \frac{a+3c}{2}=2b \Rightarrow \frac{a+3c}{4}=b$$

گام دوم: دو تساوی به‌دست‌آمده را ادغام می‌کنیم:

$$ac=(\frac{a+3c}{4})^2 \Rightarrow ac=\frac{a^2+6ac+9c^2}{16} \Rightarrow a^2-10ac+9c^2=0$$

$$\Rightarrow (a-c)(a-9c)=0 \Rightarrow a=c \text{ یا } a=9c$$

گام سوم: اگر $a=c$ باشد، طبق فرض غیرثابت‌بودن دنبالهٔ هندسی، می‌توانیم قدرنسبت آن را -1 در نظر بگیریم، پس $b=-a$ است و اگر جملات $a,-2a,3a$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، $a=b=c=0$ به دست می‌آید که خلاف فرض اصلی سؤال است. حال با فرض $a=9c$، جملات دنبالهٔ حسابی را می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{b=\frac{a+3c}{4}} b=\frac{a}{3}$$

دنبالهٔ حسابی: $a,\frac{2a}{3},\frac{a}{3}$

قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$\frac{2a}{3}-a=-\frac{1}{3}a$$

2 مجموع m جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر n و مجموع n جملهٔ اول آن برابر m است اگر $m \neq n$ باشد، مجموع $m+n$ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) $m+n$ ۲) $-(m+n)$

۳) $۲(m+n)$ ۴) $-۲(m+n)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته مجموع n جمله اول یک دنبالهٔ حسابی، $S_n = \frac{d}{۲}n^۲ + (a_۱ - \frac{d}{۲})n$ است که می‌توان آن را به صورت $S_n = \alpha n^۲ + \beta n$ نوشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق نکته داریم:

$$S_k = \alpha k^۲ + \beta k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_m = \alpha m^۲ + \beta m = n \\ S_n = \alpha n^۲ + \beta n = m \end{cases}$$

تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$S_m - S_n = \alpha m^۲ - \alpha n^۲ + \beta m - \beta n = \alpha(m+n)(m-n) + \beta(m-n) = n - m$$

$$\Rightarrow (m-n)(\alpha(m+n)+\beta) = n-m \xrightarrow{m \neq n} \alpha(m+n)+\beta = -۱$$

گام دوم: حالا مجموع $m+n$ جملهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$S_{m+n} = \alpha(m+n)^۲ + \beta(m+n) = (m+n)(\underbrace{\alpha(m+n)+\beta}_{-۱})$$

$$\Rightarrow S_{m+n} = -(m+n)$$

تیزبازی عددگذاری می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم $m = ۱$ و $n = ۲$ باشد:

$$S_۱ = ۲ \Rightarrow a_۱ = ۲$$

$$S_۲ = ۱ \Rightarrow a_۱ + a_۲ = ۱ \xrightarrow{a_۱ = ۲} a_۲ = -۱$$

در این شرایط دنبالهٔ حسابی ... , -۴ , -۱ , ۲ را داریم. حالا مجموع $m+n$ را حساب می‌کنیم:

$$S_{m+n} = S_۳ = ۲ - ۱ - ۴ = -۳$$

که با توجه به گزینهٔ (۴) فقط مقدار عبارت $-(m+n)$ با -۳ برابری می‌کند.

3 دنبالهٔ هندسی a_n با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{3^{n-1}}{2}$ مفروض است. اگر مجموع جملات mاُم تا $(m+3)$اُم برابر ۴۸۶۰ باشد، S_m کدام است؟ (S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله است.)

۴ جمله

۱) ۲۰
۲) ۱۸۲
۳) $\frac{121}{2}$
۴) $\frac{1093}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی a_n با قدرنسبت q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a_1 = \frac{1}{2}$ و قدرنسبت آن برابر ۳ است. طبق درس‌باکس، مجموع چهار جمله را با شروع از a_m، برابر ۴۸۶۰ قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{a_m(3^4 - 1)}{3 - 1} = 4860 \Rightarrow a_m = \frac{2 \times 4860}{80} = 121/5$$

گام دوم: حالا مقدار m را به دست می‌آوریم:

$$a_m = \frac{3^{m-1}}{2} = 121/5 \Rightarrow 3^{m-1} = 243 \Rightarrow m = 6$$

گام سوم: و در نهایت طبق درس‌باکس، S_6 را حساب می‌کنیم:

$$S_6 = \frac{\frac{1}{2}(3^6 - 1)}{2} = \frac{728}{4} = 182$$

گروه آموزشی ماز

دوپینگ

۱- نمودار یک تابع درجه دوم به شکل کلی $y=ax^۲+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های ۳ و -۱ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع می‌کند، کمترین مقدار این تابع کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۸ ۳) -۱۰ ۴) -۱۲

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$f(x)=ax^۲+bx+c$

$x_۱=۳\ ,\ x_۲=-۱ \Rightarrow x_۱+x_۲=۲ \Rightarrow -\frac{b}{a}=۲$

$x_۱x_۲=-۳ \Rightarrow \frac{c}{a}=-۳$

$f(۰)=-۶ \Rightarrow c=-۶ \Rightarrow \frac{-۶}{a}=-۳ \Rightarrow a=۲$

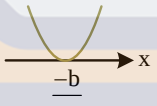
$-\frac{b}{a}=۲ \Rightarrow b=-۴ \Rightarrow f(x)=۲x^۲-۴x-۶$

$\min f(x)=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶+۴۸)}{۸}=-۸$

صفرهای تابع درجه دوم:

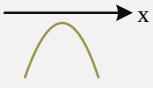
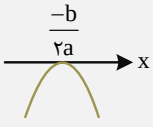
به نقاط برخورد نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ با محور xها، صفرهای تابع درجه دوم می‌گوییم که در واقع همان ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ هستند، به عبارت دیگر در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.

حال برای اینکه وضعیت نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نسبت به محور xها را بررسی کنیم باید به سراغ دلتای معادله سهمی و همچنین جهت دهانه سهمی برویم. (جدول‌ها رو دریاب ...)

$a>۰$		
$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
		
تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند. تابع درجه دوم همواره بالای محور xها است. تابع درجه دوم همواره مثبت است. معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.	تابع درجه دوم بالای محور xها و بر آن مماس است. معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ دارد.	تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.

توجه:

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، این است که $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

$a<۰$		
$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
		
تابع درجه دوم محور xها را قطع نمی‌کند. تابع درجه دوم همواره پایین محور xها است. تابع درجه دوم همواره منفی است. معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.	تابع درجه دوم پایین محور xها و بر آن مماس است. معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ دارد.	تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.

توجه:

با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره منفی باشد، این است که $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

گروه آموزشی ماز

۲- حاصل عبارت $A = \frac{۱+x+x^۲+x^۳+...+x^۹}{۱-x+x^۲-x^۳+...-x^۹}$ به ازای $x = ۲-\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$A = \frac{۱+x+x^۲+x^۳+...+x^۹}{۱-x+x^۲-x^۳+...-x^۹}$$

صورت کسر، مجموع جملات دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت x و مخرج کسر، مجموع جملات دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $(-x)$ است، بنابراین با توجه به فرمول $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ داریم:

$$A = \frac{\frac{۱(۱-x^{۱۰})}{۱-x}}{\frac{۱(۱-(-x)^{۱۰})}{۱+x}} = \frac{۱+x}{۱-x}$$

$$x = ۲-\sqrt{۳} \Rightarrow A = \frac{۱+۲-\sqrt{۳}}{۱-(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳-\sqrt{۳}}{-۱+\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}-۱} = \sqrt{۳}$$

گروه آموزشی ماز

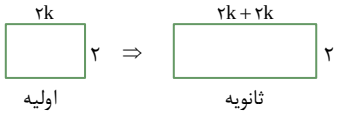
۳- در یک مستطیل طلایی به عرض ۲، به اندازهٔ $۱+\sqrt{۵}$ واحد به طول آن اضافه کنیم و یک مستطیل جدید می‌سازیم. نسبت مساحت مستطیل جدید به مستطیل طلایی اولیه چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ آزمو ن وی ای پی (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر $k = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است.

به اندازهٔ $۲k$ واحد به طول اضافه کرده‌ایم، پس:



$$\begin{cases} S_۱ = ۴k \\ S_۲ = ۸k \end{cases} \Rightarrow \frac{S_۲}{S_۱} = ۲$$

گروه آموزشی ماز

۴- اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + (k-۱)x + ۳ = ۰$ برابر $\frac{k-۵}{۲}$ است. حاصل $\left[\frac{-k+۲}{۳}\right]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$۲x^۲ + (k-۱)x + ۳ = ۰$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(k-۱)^۲ - ۲۴}}{۲}$$

$$\frac{\sqrt{(k-۱)^۲ - ۲۴}}{۲} = \frac{k-۵}{۲} \Rightarrow \sqrt{(k-۱)^۲ - ۲۴} = k-۵$$

$$\Rightarrow (k-۱)^۲ - ۲۴ = k^۲ - ۱۰k + ۲۵ \Rightarrow k^۲ - ۲k - ۲۳ = k^۲ - ۱۰k + ۲۵ \Rightarrow ۸k = ۴۸ \Rightarrow k = ۶$$

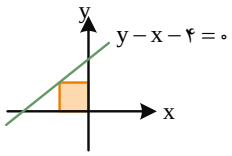
$$\Rightarrow \left[\frac{-k+۲}{۳}\right] = \left[\frac{-۴}{۳}\right] = -۲$$

هر آنچه باید در مورد روابط بین ریشه‌ها بدانید!

حاصل برحسب S و P	رابطه
$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$	$\alpha^۲+\beta^۲$
$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$	$\alpha^۳+\beta^۳$
$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$	$\alpha^۴+\beta^۴$
$\alpha^۶+\beta^۶=(\alpha^۲+\beta^۲)^۳-۳(\alpha\beta)^۲(\alpha^۲+\beta^۲)=(S^۲-۲P)^۳-۳P^۲(S^۲-۲P)$	$\alpha^۶+\beta^۶$
$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$	$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}$
$\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}=\frac{\beta^۳+\alpha^۳}{\alpha^۳\beta^۳}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۳}=\frac{S^۳-۳PS}{P^۳}$	$\frac{۱}{\alpha^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}$
$\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}=\frac{\beta^۴+\alpha^۴}{\alpha^۴\beta^۴}=\frac{(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲(\alpha\beta)^۲}{(\alpha\beta)^۴}=\frac{(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲}{P^۴}$	$\frac{۱}{\alpha^۴}+\frac{۱}{\beta^۴}$
$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$\lvert\alpha-\beta\rvert$
$\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}\times S\rvert$	$\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert$
$\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S^۲-P)\rvert$	$\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert$
$\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert=\lvert(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\beta^۲)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S)(S^۲-۲P)\rvert$	$\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>۰)$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}\quad(\alpha,\beta>۰)$	$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert$
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$

گروه آموزشی ماز

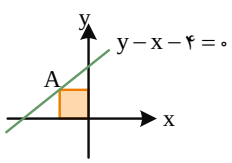
۵- مساحت مربع شکل مقابل کدام است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲ آز مون وی ای پی (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر طول نقطه A را برابر α فرض کنیم، عرض آن که روی خط $y=x+۴$ قرار دارد، برابر $(\alpha+۴)$ خواهد بود و داریم:



$$A(\alpha,\alpha+۴)$$

باید فاصلهٔ A از محورهای x و y یکسان باشد (زیرا A رأس یک مربع است)، پس داریم:

$$\lvert\alpha\rvert=\lvert\alpha+۴\rvert$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha + ۴ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ \alpha = -\alpha - ۴ \Rightarrow ۲\alpha = -۴ \Rightarrow \alpha = -۲ \end{cases}$$

پس مربعی به طول ضلع ۲ در اختیار داریم که مساحت آن برابر $S = ۲^۲ = ۴$ است.

گروه آموزشی ماز

۶- کدام گزینه در مورد معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{x-۲} = ۱$ صحیح است؟

۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است.
۲) فقط یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $(۲,۳)$ دارد.
۳) فقط یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $(۳,۴)$ دارد.
۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-۲} = ۱ \Rightarrow \sqrt{x-۲} = ۱ - \sqrt{x}$$

با شرط $x - ۲ \geq ۰$ و $۱ - \sqrt{x} \geq ۰$، یعنی $x \geq ۲$ و $x \leq ۱$ معادله دارای جواب نخواهد بود چون که اشتراک آن‌ها برابر $\varnothing$ است، معادله جواب حقیقی ندارد.

معادله‌های رادیکالی (گنگ)

به معادله‌هایی که در آن‌ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله‌های رادیکالی (گنگ) می‌گوییم.

به عنوان مثال:

معادله‌های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

$$\sqrt{x+۲} = x - ۴ \qquad \sqrt{x+۳} + \sqrt{۳x+۱} = ۴ \qquad \frac{۵}{\sqrt{x}+۲} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$$

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) یکی از رادیکال‌ها را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و مابقی جمله‌ها را به طرف دیگر معادله منتقل می‌کنیم.
۲) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم. (معمولاً طرفین را به توان ۲ می‌رسونیم)

توجه:

توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می‌کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

۳) معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می‌کنیم و جواب (یا جواب‌های) معادله را به دست می‌آوریم.
۴) جواب(های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم و جواب‌هایی را قبول می‌کنیم که اولاً در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و ثانیاً در معادله اصلی صدق کنند.

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $x=۶$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $(x+a)^۲ - ۴x = b$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر برابر $a+b$ و $a-b$ است؟

۱) $x^۲ + ۲۴x - ۸۰ = ۰$
۲) $x^۲ - ۲۴x - ۸۰ = ۰$
۳) $x^۲ - ۸x - ۳۸۴ = ۰$
۴) $x^۲ + ۸x - ۳۸۴ = ۰$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

ابتدا معادلهٔ داده شده را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$(x+a)^۲ - ۴x = b \Rightarrow x^۲ + (۲a-۴)x + a^۲ - b = ۰$$

چون $x = ۶$ ریشهٔ مضاعف معادله است، پس باید معادله داده شده به صورت $(x-۶)^۲ = x^۲ - ۱۲x + ۳۶ = ۰$ باشد که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} ۲a - ۴ = -۱۲ \Rightarrow a = -۴ \\ a^۲ - b = ۳۶ \end{cases} \Rightarrow b = -۲۰$$

ریشه‌ها رو چطور پیدا کنیم؟ با تجزیه ...

تجزیه به کمک فاکتورگیری	تجزیه به کمک اتحاد مزدوج	تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک
$mx^۲ + nx = x(mx+n)$	$x^۲ - m^۲ = (x-m)(x+m)$	$x^۲ + mx + n = (x+\bigcirc)(x+\square)$
$۲x^۲ - ۴x = x(۲x-۴)$	$x^۲ - ۱۶ = (x-۴)(x+۴)$	$x^۲ - x - ۶ = (x-۳)(x+۲)$

حال اگر بخواهیم معادلهٔ درجه دومی بنویسیم که ریشه‌های آن $x_1=-24$ و $x_2=16$ باشد، معادلهٔ مطلوب به صورت زیر خواهد بود:

$$S=x_1+x_2=-8$$

$$P=x_1.x_2=-384$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2+8x-384=0$$

گروه آموزشی ماز

۸- معادله‌ای که هر یک از ریشه‌های آن از مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-2=0$، یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

۱) $x^2-31x+37=0$
۲) $x^2-31x+34=0$
۳) $x^2-23x+26=0$
۴) $x^2-23x+29=0$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x-2=0$ را x_1 و x_2 بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ مطلوب را y_1 و y_2 بنامیم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} y_1=x_1^2+1 \\ y_2=x_2^2+1 \end{cases} \Rightarrow y_1+y_2=x_1^2+x_2^2+2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2$$

$$=S^2-2P+2=25-2(-2)+2=31$$

$$y_1y_2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)=x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1=(x_1x_2)^2+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1$$

$$=4+25-2(-2)+1=34$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب به شکل زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-31x+34=0$$

گروه آموزشی ماز

۹- حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ $|x-1|+x^2-2x=5$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روش اول:

$$|x-1|=t \Rightarrow x^2-2x+1=t^2$$

$$|x-1|+x^2-2x=5 \Rightarrow t+t^2-1-5=0 \Rightarrow t^2+t-6=0$$

$$\xrightarrow{t\geq 0} t=2 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow x=3 \text{ یا } -1 \Rightarrow x_1+x_2=2$$

روش دوم:

$$x\geq 1 \Rightarrow x-1+x^2-2x=5 \Rightarrow x^2-x-6=0 \xrightarrow{x\geq 1} x=3$$

$$x<1 \Rightarrow -x+1+x^2-2x=5 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{x<1} x=-1$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=2$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-7x+9b=0$ و $a<b$ باشند، مقدار $b-a$ کدام است؟ $(b\neq 0)$

۱) $\frac{10}{3}$
۲) $\frac{11}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ جمع ریشه‌ها برابر $S=\frac{-b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{c}{a}$ است.

$$\begin{cases} a+b=\frac{۷}{a} \\ ab=\frac{۹b}{a} \end{cases} \xrightarrow{b\neq ۰} a^۲=۹ \xrightarrow{a<b} a=-۳$$

آزمون وی ای پی

$$a+b=\frac{۷}{a} \Rightarrow -۳+b=-\frac{۷}{۳} \Rightarrow b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b-a=\frac{۲}{۳}+۳=\frac{۱۱}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

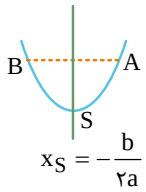
۱۱- نقاط $A(۱۳,-۷)$ و $B(-\frac{۹}{۲},-۷)$ روی تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ قرار دارند. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۲$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۹}{۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون عرض نقاط A و B یکسان است، پس این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی، قرینهٔ یکدیگرند و بنابراین داریم:

$$\frac{x_A+x_B}{۲}=x_S \Rightarrow x_S=\frac{۱۳-\frac{۹}{۲}}{۲}=\frac{۱۷}{۴}$$



$$x_S=-\frac{b}{۲a}$$

حال اگر طول‌های نقاط برخورد سهمی با خط $y=۲$ را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، با توجه به این که $x_۱$ و $x_۲$ نیز نسبت به محور تقارن، قرینهٔ یکدیگرند، خواهیم داشت:

$$x_۱+x_۲=۲x_S=\frac{۱۷}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲-x+۱۰}{x^۲+x+۳}>۴$ با مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۶x+a|<b$ برابر است. حاصل $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

عبارت مخرج همواره مثبت است، پس می‌توان طرفین نامعادله را در عبارت $(x^۲+x+۳)$ ضرب کرد.

$$\frac{x^۲-x+۱۰}{x^۲+x+۳}>۴ \Rightarrow$$

$$x^۲-x+۱۰>۴x^۲+۴x+۱۲ \Rightarrow ۳x^۲+۵x+۲<۰$$

$$۳x^۲+۵x+۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} x=-۱,\ x=-\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<x<-\frac{۲}{۳}$$

حال برای تبدیل مجموعه جواب نامعادله به نامساوی شامل قدرمطلق کافی است میانگین مقادیر -۱ و $-\frac{۲}{۳}$ را از طرفین مساوی کم کنیم:

$$\text{میانگین}=\frac{-۱-\frac{۲}{۳}}{۲}=\frac{-۵}{۶}$$

$$-۱<x<-\frac{۲}{۳} \Rightarrow -۱+\frac{۵}{۶}<x+\frac{۵}{۶}<-\frac{۲}{۳}+\frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۶}<x+\frac{۵}{۶}<\frac{۱}{۶} \Rightarrow \left|x+\frac{۵}{۶}\right|<\frac{۱}{۶} \Rightarrow |۶x+۵|<۱$$

بنابراین مقادیر a و b عبارتند از $a=۵$ و $b=۱$ و در نتیجه داریم:

$$۲a+b=۱۱$$

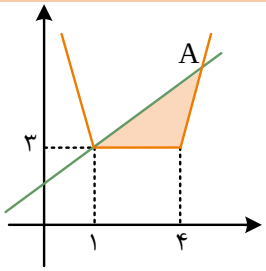
گروه آموزشی ماز

۱۳- مساحت محدود به نمودار تابع $y=|x-1|+|x-4|$ و خط $y=x+2$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۱۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نمودار تابع قدرمطلقی و خط $y=x+2$ به‌صورت مقابل است. نقطه A را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=|x-1|+|x-4|=x-1+x-4=2x-5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x+2=2x-5 \Rightarrow x=7 \Rightarrow y=9$$
$$S=\frac{1}{2}(4-1)(y_A-3)=\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$$

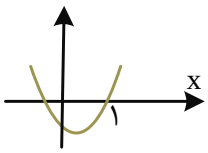
گروه آموزشی ماز

۱۴- به ازای چند مقدار صحیح منفی برای m هر دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $3x^2+mx+m=0$ کوچک‌تر از ۱ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

به ازای $x=1$ مقدار عرض تابع سهمی، مثبت است.



$$x=1 \Rightarrow 3+m+m>0 \Rightarrow m>\frac{-3}{2}$$

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow m^2-12m>0 \xrightarrow{m<0} m<0 \\ x_S<1 \Rightarrow \frac{-m}{6}<1 \Rightarrow m>-6 \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{2}<m<0$$

فقط $m=-1$ قابل قبول است.

معادلات به فرم $ax^4+bx^2+c=0$:

برای حل معادلات به فرم $ax^4+bx^2+c=0$، از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2+bt+c=0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس tهای به دست آمده را برابر x^2 قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $x^2=t\geq 0$ است، بنابراین tهای منفی غیرقابل قبول هستند.

$ax^4+bx^2+c=0$	$at^2+bt+c=0$	شرط
۴ ریشه حقیقی متمایز	دو ریشه متمایز مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۳ ریشه حقیقی متمایز	یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت	$S>0, P=0$
۲ ریشه حقیقی متمایز	دو ریشه مختلف‌العلامت	$P<0$
	یک ریشه مضاعف مثبت	$\Delta=0, S>0$
فقط یک ریشه حقیقی	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی	$S<0, P=0$
	یک ریشه مضاعف صفر	$b=c=0$
فاقد ریشه حقیقی	فاقد ریشه حقیقی	$\Delta<0$
	دو ریشه ساده منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	یک ریشه مضاعف منفی	$\Delta=0, S<0$

گروه آموزشی ماز

۱۵- مساحت مربع ABCD که دو ضلع AB و CD از آن مربع به ترتیب روی خطوط $y=3mx+2m-1$ و $y=(4m-1)x+6$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

چون اضلاع مقابل مربع، با هم موازیند، پس باید شیب دو خط داده شده با هم برابر باشند، یعنی داریم:

$$\begin{cases} y = ۳mx + ۲m - ۱ \\ y = (۴m - ۱)x + ۶ \end{cases} \Rightarrow ۳m = ۴m - ۱ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = ۳x + ۱ \\ y = ۳x + ۶ \end{cases}$$

حال فاصلهٔ دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطهٔ $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به دست می‌آید، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۳x - y + ۱ = ۰ \\ ۳x - y + ۶ = ۰ \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|۱ - ۶|}{\sqrt{۹ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۵\sqrt{۱۰}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = (\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})^۲ = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- یک تاس را سه بار متوالیاً پرتاب می‌کنیم. در چند حالت عدد رو شده روی تاس‌ها در پرتاب‌ها، به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

کافی است سه عدد را از اعداد تاس انتخاب کنیم و بدیهی است سه عدد انتخاب شده به ۲ حالت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی قرار می‌گیرند.

$$\binom{۶}{۳} \times ۲ = ۴۰$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- با جایگشت حروف کلمه «دوپینگ ماز» چند کلمه نه حرفی می‌توان ساخت که بین دو حرف «د» و «ن» و همچنین بین دو حرف «م» و «ز» دقیقاً یک حرف قرار گرفته است؟

۱) $۲۵۶ \times ۶!$ ۲) $۶۴ \times ۸!$ ۳) $۶۴۰ \times ۴!$ ۴) $۲۵۶ \times ۵!$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

اگر حروف کلمه را مجزا بنویسیم، خواهیم داشت: «د و پ ی ن گ م ا ز » و برای به دست آوردن جایگشت‌های آن، خواهیم داشت:

$\boxed{\text{د}، \text{—}، \text{ن}}\ \boxed{\text{م}، \text{—}، \text{ز}}، \times\times\times$

تعداد حالت: $۵! \times ۲! \times ۲! \times ۵ \times ۴ = ۸۰ \times ۵!$

د، —، ن، — × × × × ×

م، —، ز

$۶! \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۴۸ \times ۵!$

تعداد حالات $= ۸۰ \times ۵! + ۴۸ \times ۵! = ۱۲۸ \times ۵! = ۶۴۰ \times ۴!$

گروه آموزشی ماز

۱۸- از ۴ استان کرمان، شیراز، یزد و اصفهان و از هر استان ۵ نفر برای درخواست نمایندگی ماز در شهر خود در جلسه‌ای حضور دارند. دکتر موسوی به چند حالت می‌تواند ۳ نفر از آن‌ها را انتخاب کند، به گونه‌ای که دوبه‌دو غیرهم‌استانی باشند؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

ابتدا سه استان انتخاب کرده و سپس از هر استان یک نفر را بیرون می‌کشیم.

$$\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱} = ۵۰۰$$

به ذهن بسپار!

اگر بخواهیم از میان n شیء متمایز، k تا رو انتخاب کنی، باید از ترکیب استفاده کنیم:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

در حالت خاص، اگر $k=1$:

$$\binom{n}{1}=n$$

و اگر $k=2$:

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- در مثلث ABC، اگر $a=7$ و $b=4$ و $h_c=\frac{2h_a+h_b}{3}$، آن‌گاه اندازهٔ ضلع AB کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۵/۶ ۳) ۴/۴ ۴) ۸/۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها عکس نسبت اضلاع است، پس:

$$\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}\ ,\frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}$$

$$h_c=\frac{2h_a+h_b}{3}\Rightarrow\frac{2h_a}{h_c}+\frac{h_b}{h_c}=3\Rightarrow\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}=3$$

$$\Rightarrow\frac{2c}{7}+\frac{c}{4}=3\Rightarrow\frac{15c}{28}=3\Rightarrow c=\frac{28}{5}=5/6$$

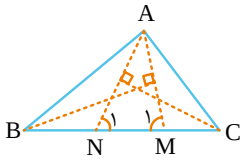
گروه آموزشی ماز

۲۰- در مثلث ABC از رأس A عمودی بر نیمساز B رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در M قطع کند، همچنین عمودی که از A بر نیمساز C رسم می‌شود، ضلع BC را در N قطع می‌کند. اگر $\hat{A}=120^\circ$، آن‌گاه زاویه $M\hat{A}N$ کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۳۰° ۳) ۲۰° ۴) ۴۰°

پاسخ: گزینه ۲ آزمون وی ای پی (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

در مثلث ABM نیمساز و ارتفاع بر هم منطبق است، پس: $AB=BM$ و داریم:



همچنین مثلث ACN متساوی‌الساقین است $(AC=CN)$ و می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_1=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}$$

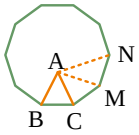
$$\hat{N}_1=\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow\hat{M}_1+\hat{N}_1=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}+\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}=180^\circ-\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N=180^\circ-(\hat{M}_1+\hat{N}_1)=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- در شکل مقابل، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و ده ضلعی منتظم در یک ضلع مشترک‌اند. زاویهٔ $\hat{AMN}$ کدام است؟



۱) ۶۴°
۲) ۱۲۸°
۳) ۹۶°
۴) ۱۰۸°

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

در ده ضلعی منتظم، هر زاویه داخلی برابر $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n} = ۱۴۴^\circ$ است، پس:

$$\hat{ACM} = ۱۴۴^\circ - ۶۰^\circ = ۸۴^\circ$$

مثلث ACM در رأس C متساوی‌الساقین است:

$$AC = CM \Rightarrow \hat{AMC} = \hat{MAC} = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۴^\circ}{۲} = ۴۸^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{AMN} = ۱۴۴^\circ - ۴۸^\circ = ۹۶^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۶ و ۱۰ که عمودمنصف ساق آن از رأس مقابل می‌گذرد، کدام است؟

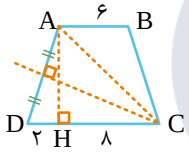
۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

عمودمنصف ساق AD از رأس C می‌گذرد، پس:

$$AC = DC = ۱۰$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

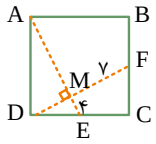


$$DH = ۲, HC = ۸ \Rightarrow AH = ۶$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD)(AH) = ۴۸$$

گروه آموزشی ماز

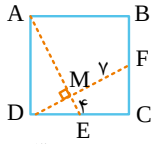
۲۳- مساحت مربع شکل مقابل چقدر است؟



۱) ۱۱۷
۲) ۱۰۸
۳) ۸۱
۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

دو مثلث ADE و CDF هم‌نهشت‌اند، پس:



$$\overset{\triangle}{ADE} \cong \overset{\triangle}{CDF} \Rightarrow AE = DF$$

$$AM = x + ۳$$

با فرض $DM = x$ داریم:

از طرفی DM ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$DM^۲ = AM.ME \Rightarrow x^۲ = (x+۳)(۴) \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۶$$

بنابراین $AM = ۹$ و $DM = ۶$ و با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$AD^۲ = AM^۲ + DM^۲ = ۹^۲ + ۶^۲ = ۱۱۷ \Rightarrow S_{ABCD} = ۱۱۷$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۳۰$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد بزرگ‌تر از ۳، چند جواب دارد؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

چون جواب‌ها فرد هستند: $x_i=۲k_i+۱$

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۳۰\Rightarrow ۲k_۱+۱+۲k_۲+۱+۲k_۳+۱+۲k_۴+۱=۳۰$$

$$\overset{\geq ۲}{k_۱}+\overset{\geq ۲}{k_۲}+\overset{\geq ۲}{k_۳}+\overset{\geq ۲}{k_۴}=\overset{۵}{\cancel{۱۴}}\Rightarrow \binom{۸}{۳}=۵۶$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+\ldots+x_k=n$ برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

اگر هر x_i باید بزرگ‌تر یا مساوی α_i باشد، باید از تغییر متغیر $y_i=x_i-\alpha_i$ استفاده کنیم که در این صورت $y_i\geq ۰$ و مسئله معادل می‌شود با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $y_۱+\ldots+y_k=n-\sum_{i=۱}^{k}\alpha_i$ که برابر است با:

$$\binom{n-\sum_{i=۱}^{k}\alpha_i+k-۱}{k-۱}$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- با جایگشت حروف کلمه «تو بی‌نظیری» چند کلمه می‌توان نوشت که عبارت «تو» در آن دیده شود؟

۱) $۷\times ۸!$ ۲) $۴۲\times ۶!$ ۳) $۱۶\times ۷!$ ۴) $۵۶\times ۵!$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

تو ب ی ن ظ ر
ی
ی

$$\frac{۸!}{۳!}=\frac{۸\times ۷\times \cancel{۶}\times ۵!}{\cancel{۶}}=۵۶\times ۵!$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر

	x	۴	
		y	
	۳	۲	z
۱			

و

	t		
		۲	
			۳
۱			

مربع‌های لاتین متعامد باشند، حاصل $۲x+۳y+z+t$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

	۱	۴	
		۱	
۴	۳	۲	۱
۱		۳	

$x=y=z=۱$، زیرا هر ستون نیاز به ۱ دارد.

و چون مربع لاتین دوم با این مربع لاتین متعامد است $t=۴$ است.

$$۲(۱)+۳(۱)+۱+۴=۱۰$$

مربع لاتین آزمون وی ای پی

دو مربع لاتین A و B متعامد هستند، هرگاه اولاً هم‌مرتبه باشند و ثانیاً با کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر به نظیر و تشکیل مربع لاتین جدید هم‌مرتبه، درایه تکراری نداشته باشیم.

گروه آموزشی ماز

۲۷- ۴ جایزه مختلف d,c,b,a را به چند حالت بین مهرسا، ملیکا، نیکی، هلیا، فرنوش، جانان و آوا می‌توان تقسیم کرد به طوری که کسی بیشتر از یک جایزه نبرد و جایزه a به مهرسا نرسد و جایزه d به فرنوش نرسد؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۵۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

چون کسی بیشتر از یک جایزه نباید ببرد، تابع یک به یک است.

$f(a) \neq$ مهرسا

$f(d) \neq$ فرنوش

کل توابع یک‌به‌یک $-$ $(f(a) =$ مهرسا $\cup f(d) =$ فرنوش$)$

$۷\times۶\times۵\times۴-(۶\times۵\times۴+۶\times۵\times۴-۵\times۴)=۶۲۰$

گروه آموزشی ماز

۲۸- چند عدد طبیعی زوج کوچک‌تر از ۳۰۱ بر ۳ بخش‌پذیر است ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۳ ۳) ۵۰ ۴) ۶۳

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

اگر A اعداد زوج بخش‌پذیر بر ۳ باشد و B اعداد زوج بخش‌پذیر بر ۷ باشد:

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right]=۵۰-۷=۴۳$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- از ظرفی شامل ۶ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، حداقل چند مهره خارج شود تا مطمئن باشیم در بین مهره‌های خارج شده ۲ مهره سیاه یا سه مهره ناهمرنگ داریم؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

بدترین حالت این است که ۶ مهره آبی و ۴ مهره سفید خارج شود، تا اینجا ۲ مهره سیاه و یا ۳مهره ناهمرنگ نداریم، اما مهره بعدی حتماً با این مهره‌ها شرط را برقرار می‌کند، پس حداقل ۱۱ مهره لازم است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- در یک زیرمجموعهٔ دلخواه با n عضو از مجموعهٔ $A=\{۵,۶,۷,۸,...,۲۱\}$ مطمئن هستیم که دو عضو با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک وجود دارد، حداقل n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

در بین اعضای زیر هیچ دو عددی مقسوم‌علیه مشترک ندارند، اگر یک عضو اضافه کنیم حتماً با یکی از اعضا، مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ دارد.

$\{۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۸,۹\}$

۱- اگر $f(x)=(2a-1)x+a-b$ تابعی ثابت و تابع $g(x)=(b-3)x+2c+a$ همانی باشد، تابع خطی $y=(2f-g)(x)$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

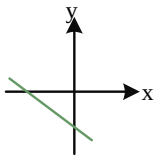
$f(x)=(2a-1)x+a-b$ تابع ثابت $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$g(x)=(b-3)x+2c+a$ همانی $\Rightarrow \begin{cases} b-3=1 \\ 2c+a=0 \end{cases}$

$b=4\ ,\ a=\frac{1}{2}\ ,\ c=-\frac{1}{4}$

$y=f(x)=-\frac{7}{2}\ ,\ y=g(x)=x$

$y=(2f-g)(x)=-7-x$

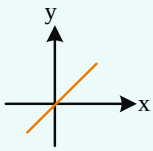


نمودار از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

دو تابع معروف

A: تابع ثابت: به تابع $y=c$ که $c\in\mathbb{R}$ تابع ثابت گویند.

B: تابع همانی: به تابع $y=x$ که همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، تابع همانی گویند.



گروه آموزشی ماز

۲- اگر $D_f=[-4,a]$ و $g(x)=8-3x$ به طوری که $D_{fog}=[-2,b]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$D_{fog}=\{x: x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}\ ,\ 8-3x\in[-4,a]$

$-4\le 8-3x\le a \Rightarrow -a\le 3x-8\le 4$

$\frac{8-a}{3}\le x\le \frac{12}{3}\qquad D_{fog}=\left[\frac{8-a}{3},4\right]$

$\begin{cases} b=4 \\ \frac{8-a}{3}=-2\Rightarrow a=14 \end{cases} \Rightarrow a-b=10$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه تابع $f(x)=(2-a)x^2-4ax+1$ در بازه $(-2,2)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-2<a<0$ ۲) $a\ge 1$ ۳) $0<a<2$ ۴) $0<a<1$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

کافی است رأس تابع سهمی در این بازه نباشد.

$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{4a}{2(2-a)}=\frac{2a}{2-a}\Rightarrow\left|\frac{2a}{2-a}\right|\ge 2$

$|a|\ge|a-2|\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2\ge(a-2)^2\Rightarrow a^2\ge a^2-4a+4\Rightarrow 4a-4\ge 0\Rightarrow a\ge 1$

۴- وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^۲+۴}$ خط $y=۴-۲x$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

در واقع جواب معادله $f^{-۱}(x)=۴-۲x$ را می‌خواهیم، پس جواب $f(x)=(۴-۲x)^{-۱}$ یعنی: $f(x)=\frac{۴-x}{۲}$ را در ابتدا به دست می‌آوریم.

$$x+\sqrt{x^۲+۴}=\frac{۴-x}{۲}\Rightarrow\sqrt{x^۲+۴}=\frac{۴-x}{۲}-x=\frac{۴-۳x}{۲}\quad x<\frac{۴}{۳}$$

$$۴x^۲+۱۶=۱۶+۹x^۲-۲۴x\Rightarrow ۵x^۲-۲۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۲۴}{۵}\text{ غ ق ق}\end{cases}$$

چون طرفین را وارون کردیم x به دست آمده عرض نقطه تلاقی است.

$$۴-۲x=۰\Rightarrow x=۲$$

نکات طلایی تابع وارون!

اگر در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع، جای مولفه اول و دوم را در همه زوج‌مرتب‌ها با هم عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

به عنوان مثال

$$f=\{(-۱,۳),(۲,۱),(-۲,۳),(۰,۴)\}$$

$$f^{-۱}=\{(۳,-۱),(۱,۲),(۳,-۲),(۴,۰)\}$$

همانطور که می‌بینید وارون تابع f، تابع نمی‌باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن‌گاه تابع f را وارون‌پذیر می‌گوییم و $f^{-۱}$ را تابع وارون f می‌نامیم.

توجه!

اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، در این صورت، وارون‌پذیر است و بالعکس، یعنی اگر تابعی وارون‌پذیر باشد می‌توان نتیجه گرفت که آن تابع یک‌به‌یک است.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $f(x)=\frac{x}{kx-۴}$ به طوری که $fof(۱)=۱$، مقدار $fof(-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۳۱}$ ۴) $\frac{۱}{۴۱}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$f(۱)=\frac{۱}{k-۴}\Rightarrow fof(۱)=f(\frac{۱}{k-۴})=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{۱}{k-۴}}{\frac{k}{k-۴}-۴}=۱\Rightarrow\frac{۱}{k-۴}=\frac{k}{k-۴}-۴\Rightarrow\frac{۱-k}{k-۴}=-۴$$

$$\Rightarrow ۱-k=-۴k+۱۶\Rightarrow ۳k=۱۵\Rightarrow k=۵$$

$$f(x)=\frac{x}{۵x-۴}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۱}{-۹}=\frac{۱}{۹}$$

$$fof(-۱)=f(\frac{۱}{۹})=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۵}{۹}-۴}=\frac{-۱}{۳۱}$$

۶- هرگاه $f(2x+3)=3x+4$ و $g^{-1}(4x-6)=5x+9$، مقدار $gof^{-1}(-2)$ چه عددی است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -2 ۴) -14

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$f(2x+3)=3x+4 \xrightarrow{x=-2} f(-1)=-2$$

$$f^{-1}(-2)=-1 \Rightarrow gof^{-1}(-2)=g(-1)$$

$$5x+9=-1 \Rightarrow x=-2$$

$$g^{-1}(4x-6)=5x+9 \xrightarrow{x=-2} g^{-1}(-14)=-1$$

$$g(-1)=-14 \Rightarrow gof^{-1}(-2)=-14$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2})$ و f و g توابعی وارون‌پذیر باشند، حاصل $4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

ابتدا داریم:

$$f(x)o(3-2x)=(2-x)og(x)o(\frac{x}{2})$$

با توجه به آن‌که: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ برای توابع وارون‌پذیر f و g برقرار است، پس:

$$(3-2x)^{-1}of^{-1}(x)=(\frac{x}{2})^{-1}o\big(g(x)\big)^{-1}o(2-x)^{-1}$$

$$\frac{3-x}{2}of^{-1}(x)=(2x)og^{-1}(x)o(2-x) \Rightarrow \frac{3-f^{-1}(x)}{2}=2g^{-1}(2-x) \Rightarrow 3-f^{-1}(x)=4g^{-1}(2-x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} 3-f^{-1}(-2)=4g^{-1}(4) \Rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=3$$

گروه آموزشی ماز

۸- نقطهٔ $A(a,4)$ روی نمودار $y=2+f(\frac{1-x}{3})$ با نقطهٔ $A'(-2,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x)$ متناظر است. شیب خط گذرنده از A و A' کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{2}{9}$ ۳) $-\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

مختصات نقاط را در ضابطه توابع وارد می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=a \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow 4=2+f(\frac{1-a}{3}) \Rightarrow f(\frac{1-a}{3})=2$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=b \end{cases} \Rightarrow b=3f(-4) \Rightarrow f(-4)=\frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{3}=-4 \Rightarrow a=13 \\ \frac{b}{3}=2 \Rightarrow b=6 \end{cases}$$

$$m_{AA'}=\frac{b-4}{-2-a}=\frac{6-4}{-2-13}=-\frac{2}{15}$$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۴x+k}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس طول نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار حاصل را k واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $f(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

قرینه نسبت به محور y : $y=\sqrt{-۴x+k}$

طول نقاط دو برابر : $y=\sqrt{-۴(\frac{x}{۲})+k}=\sqrt{-۲x+k}$

واحد انتقال به راست k : $y=\sqrt{-۲(x-k)+k} \Rightarrow y=\sqrt{-۲x+۳k}$

$\Rightarrow \sqrt{-۲x+۳k}=\sqrt{۴x+k} \Rightarrow -۲x+۳k=۴x+k \Rightarrow -۴+۳k=۸+k \Rightarrow k=۶$

۱) به سرزمین «تبدیلات تابع» خوش آمدید!

برای تابع $f(x)$ داریم:

۱) $f(x+k) \Rightarrow \begin{cases} k>۰ \rightarrow \text{k واحد در جهت افقی به چپ} \\ k<۰ \rightarrow \text{|k| واحد در جهت افقی به راست} \end{cases}$

۲) $f(x)+k \Rightarrow \begin{cases} k>۰ \rightarrow \text{k واحد در جهت عمودی به بالا} \\ k<۰ \rightarrow \text{|k| واحد در جهت عمودی به پایین} \end{cases}$

۳) $kf(x) \Rightarrow \begin{cases} k>۱ \rightarrow \text{انبساط عمودی با ضریب k} \\ ۰<k<۱ \rightarrow \text{انقباض عمودی با ضریب k} \end{cases}$

۴) $-f(x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور xها

۵) $f(kx) \Rightarrow \begin{cases} k>۱ \rightarrow \text{انقباض افقی با ضریب } \frac{۱}{k} \\ ۰<k<۱ \rightarrow \text{انبساط افقی با ضریب } \frac{۱}{k} \end{cases}$

۶) $f(-x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور yها

۲) دامنهٔ تابع مرکب چی میشه؟

دامنهٔ تابع $h(x)=fog(x)$ برابر است با: $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

گروه آموزشی ماز

۱۰- تابع $f(x)=ax^۴+(a-۱)x^۳-x+۱$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً یکنواست. مجموعه جواب نامعادله $fof(x)<f(۲-x^۳)$ کدام است؟

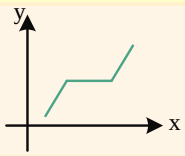
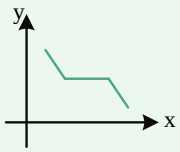
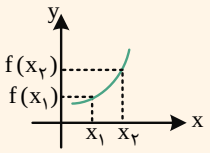
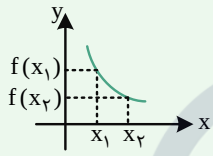
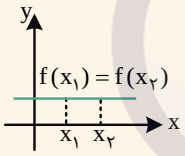
۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

چندجمله‌ای درجه زوج نمی‌تواند اکیداً یکنوا باشد، پس $a=۰$ و $f(x)=-x^۳-x+۱$، بنابراین f اکیداً نزولی است.

$f(f(x))<f(۲-x^۳) \Rightarrow f(x)>۲-x^۳ \Rightarrow -x^۳-x+۱>۲-x^۳ \Rightarrow x<-۱$

هر آنچه باید درباره «توابع یکنوا» بدانید!

تابع	توضیح	تعریف ریاضی	مثال نموداری
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره افزایش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره کاهش می‌یابد.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	
تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره ثابت است.	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$	

توجه!

به تابعی که نه **صعودی** و نه **نزولی** باشد، تابع **غیریکنوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکنوا تابعی است که در دامنهٔ تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۱- نمودار تابع $f(x)=2-\log_2^{(ax+b)}$ نمودار وارون خود را در نقاطی به طول صفر و یک قطع کرده است. مقدار a^2+b^2 کدام است؟ $(a<0)$

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

چون a منفی است، پس f اکیداً صعودی است و نقطه برخورد f با f^{-1} همان نقطه برخورد f با $y=x$ است.

$$f(x)=x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow 2-\log_2^b=0 \\ x=1 \Rightarrow 2-\log_2^{(a+b)}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ \log_2^{(a+4)}=1 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

پس $a^2+b^2=20$ است.

f و f^{-1} کجا همدیگر رو قطع می‌کنن؟!

۱) اگر تابع f **صعودی باشد**، در این صورت نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} روی **نیمساز ناحیه اول و سوم** $(y=x)$ قرار دارند، بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد، معادله $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

۲) اگر تابع f، تابعی **صعودی نباشد**، در این صورت، ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به‌دست می‌آوریم و سپس با حل **معادله** $f^{-1}(x)=f(x)$، طول نقطه (نقاط) برخورد را پیدا می‌کنیم. (توجه کنید که در این حالت، برای حل معادله $f^{-1}(x)=f(x)$، از روش رسم هندسی هم می‌توانیم استفاده کنیم.)

تذکر!

در این تیپ سوالات، اگر به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون تابع سخت باشد، بهتر است از راه‌های دیگری همچون یکنوایی توابع استفاده کنید.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(0/4)^{x^2-6x}=(\frac{25}{4})^{2-x}$ باشد، حاصل $\log_2^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

$$(0/4)^{x^2-6x}=(\frac{2}{5})^{x^2-6x}\Rightarrow(\frac{25}{4})^{2-x}=(\frac{5}{2})^{4-2x}=(\frac{2}{5})^{2x-4}$$

$$\Rightarrow x^2-6x=2x-4\Rightarrow x^2-8x+4=0$$

$$\log_2^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}=\log_2^{(\frac{S}{P})}=\log_2^{(\frac{8}{4})}=1$$

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه داریم:

۱) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۲) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=S$

۳) $\alpha\beta=\frac{c}{a}=P$

۴) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $x=2^a$ یک جواب معادلهٔ $\log_4^x+\log_3^x=1$ باشد، حاصل 12^a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

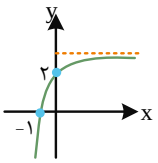
2^a را در معادله به جای x قرار می‌دهیم:

$$\log_4^{2^a}+\log_3^{2^a}=1\Rightarrow\frac{a}{2}+a\log_3^2=1\Rightarrow a(\frac{1}{2}+\log_3^2)=1$$

$$\Rightarrow a\log_3^{2\sqrt{3}}=1\Rightarrow a=\log_{2\sqrt{3}}^3\Rightarrow(2\sqrt{3})^a=3\Rightarrow 12^a=9$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار تابع $f(x)=۳+a\times ۳^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

$$\begin{cases} f(۰)=۲ \Rightarrow ۳+a\times ۳^{c}=۲ \\ f(-۱)=۰ \Rightarrow ۳+a\times ۳^{c-b}=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\times ۳^{c}=-۱ \\ a\times ۳^{c-b}=-۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} ۳^{b}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=-۱$$

$$f(۱)=۳+a\times ۳^{b+c}=۳+\underbrace{a\times ۳^{c}}_{-۱}\times ۳^{b}=۳-۳^{b}=۳-\frac{۱}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- یک نوع عنصر در پایان هر سال، ۴ درصد از جرم خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت چند سال ۲۰ درصد از جرم آن باقی می‌ماند؟

$(\log ۲\simeq ۰/۳۰۱ , \log ۳\simeq ۰/۴۸)$

۱) ۴۲
۲) ۴۶/۶
۳) ۴۶
۴) ۴۸/۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

در پایان سال اول، ۰/۹۶ جرم، در پایان سال دوم، $(۰/۹۶)^{۲}$ جرم و ... و در پایان سال n ام، $(۰/۹۶)^{n}$ جرم باقی می‌ماند.

$$(۰/۹۶)^{n}=۰/۲۰ \Rightarrow n=\frac{\log ۰/۲۰}{\log ۰/۹۶} \Rightarrow n=\frac{\log ۲-\log ۱۰}{\log ۹۶-\log ۱۰۰}=\frac{\log ۲-۱}{۵\log ۲+\log ۳-۲}$$

$$=\frac{۰/۳۰۱-۱}{۵\times ۰/۳۰۱+۰/۴۸-۲}=\frac{۰/۶۹۹}{۰/۰۱۵}=۴۶/۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر خط d بر دو خط متمایز d' و d'' عمود باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) d' و d'' موازی هستند.
۲) اگر d' و d'' متقاطع و با خط D هم‌صفحه باشند، اما با d هم صفحه نباشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.
۳) اگر d' و D متقاطع باشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.
۴) d' و d'' متعامد هستند.

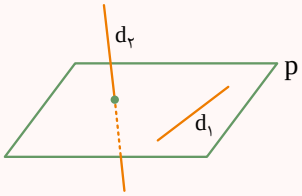
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۴)

توجه داشته باشید عمود بودن در فضا، با عمود بودن در صفحه متفاوت است، دو خط متعامد در صفحه، حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند. اما دو خط متعامد در فضا ممکن است متنافر باشند یعنی یکدیگر را قطع نکنند، مثل دو یال متنافر یک مکعب که بر هم عمودند.

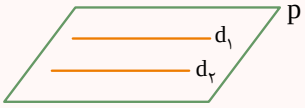
حال که خط d بر دو خط d' و d'' عمود است، اگر d' و d'' هم‌صفحه باشند، آن‌گاه d بر صفحه شامل d'' و d' عمود است، در نتیجه بر هر خطی داخل این صفحه مانند D عمود است.

حالت‌های مختلف دو خط در فضا

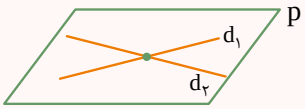
۱) دو خط d_1 و d_2 را **متنافر** گوییم، هرگاه نتوان آن‌ها را در یک صفحه مانند p قرار داد. (هم‌صفحه نباشند.)



۲) دو خط d_1 و d_2 **موازی‌اند**، هرگاه صفحه‌ای مانند p وجود داشته باشد که شامل هر دو آن‌ها باشد (هم‌صفحه باشند.) و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

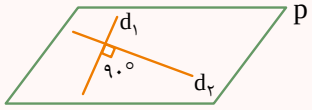


۳) دو خط d_1 و d_2 **متقاطع‌اند**، هرگاه صفحه‌ای مانند p وجود داشته باشد که شامل هر دو آن‌ها باشد (هم‌صفحه باشند.) و در یک نقطه مشترک باشند.

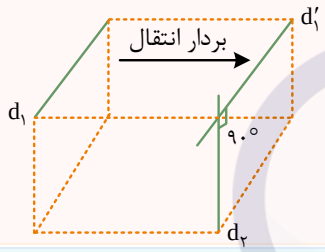


دو خط متعامد در صفحه و فضا

۱) دو خط d_1 و d_2 که در صفحه p قرار دارند، برهم عمودند هرگاه زاویه بین آن‌ها برابر 90° باشد.



۲) دو خط d_1 و d_2 غیرواقع در یک صفحه، برهم عمودند هرگاه انتقال یافته‌ای از d_1 مانند d'_1 وجود داشته باشد که با d_2 در یک صفحه متعامد باشد.



اندک نکته‌ای

عمود بودن ۲ خط در فضا به معنای متقاطع بودن آن‌ها نیست.
۲ خط متعامد، می‌توانند متنافر یا متقاطع باشند.

سنجش لاد

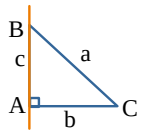
گروه آموزشی ماز

۱۷- یک مثلث قائم‌الزاویه را اگر حول یک ضلع قائمه‌اش دوران دهیم جسمی با حجم V و اگر حول وترش دوران دهیم جسمی با حجم $\frac{۱}{۲}V$ تشکیل می‌شود، در صورت دوران سطح این مثلث حول ضلع دیگر قائمه آن، جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}V$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}V$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}V$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}V$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

با دوران سطح این مثلث حول ضلع قائمه AB یک مخروط به دست می‌آید که حجم آن برابر است با:

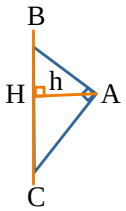


$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\pi b^۲c$$

به همین ترتیب، اگر حول ضلع AC دوران کند، یک مخروط با حجم V' به دست می‌آید که:

$$V'=\frac{۱}{۳}\pi bc^۲$$

حال اگر مثلث حول وتر دوران کند، دو مخروط با قاعده مشترک تشکیل می‌شود که طبق فرض حجم آن $\frac{۱}{۲}V$ است.



بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}V=\frac{۱}{۳}\pi h^۲(BH+HC)=\frac{۱}{۳}\times\pi\frac{b^۲c^۲}{a^۲}\times a=\frac{۱}{۳}\pi\frac{b^۲c^۲}{a}$$

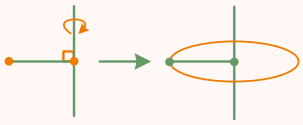
$$\frac{۱}{۳}\pi\frac{b^۲c^۲}{a}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\pi b^۲c\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

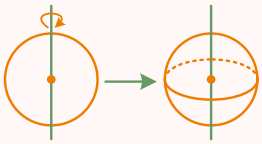
بچرخ تا بچرخیم

از دوران دادن شکل‌های هندسی طول یک محور، می‌توان اجسام و اشکال جدیدی ساخت که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

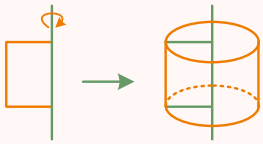
۱) از دوران پاره‌خطی عمود بر محور دوران، حول آن، یک دایره تشکیل می‌شود.



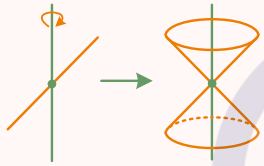
۲) از دوران یک دایره، حول هر قطر آن، یک کره ساخته می‌شود.



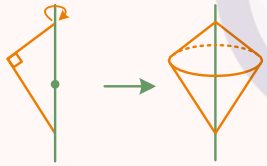
۳) از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن، یک استوانه تشکیل می‌شود.



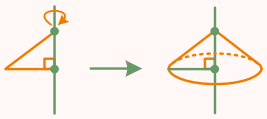
۴) از دوران یک پاره‌خط، حول خطی متقاطع و غیرعمود، یک رویه مخروطی تشکیل می‌شود. (ساعت شنی)



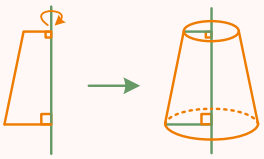
۵) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول وتر آن، دو مخروط با قاعده مشترک تشکیل می‌شود.



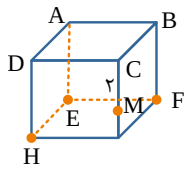
۶) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول ضلع قائمه آن، یک مخروط تشکیل می‌شود.



۷) از دوران یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، حول ساق عمود آن، یک مخروط ناقص تشکیل می‌شود.



۱۸- نقطه **M** روی یال **CG** از مکعب زیر به طول یال ۳ واقع شده است. از نقاط **M** و **F** و **H** صفحه‌ای می‌گذرانیم تا مکعب را برش دهد، مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟ **(MC = ۲)**



۱) $\sqrt{۱۱}$

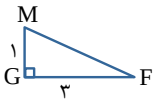
۲) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۱}$

۳) $۲\sqrt{۱۱}$

۴) $\frac{۵}{۲}\sqrt{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

سطح مقطع یک مثلث متساوی‌الساقین است.



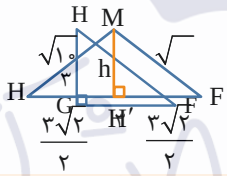
$MF^۲ = MG^۲ + GF^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ = ۱۰ \Rightarrow MF = \sqrt{۱۰}$

$HF^۲ = GH^۲ + GF^۲ = ۳^۲ + ۳^۲ = ۱۸ \Rightarrow HF = ۳\sqrt{۲}$

به همین ترتیب: MH $\sqrt{۱۰}$

از طرفی:

حال مساحت مثلث را پیدا می‌کنیم:



$h = \sqrt{MF^۲ - H'F^۲} = \sqrt{۱۰ - \frac{۹}{۲}} = \sqrt{\frac{۱۱}{۲}}$

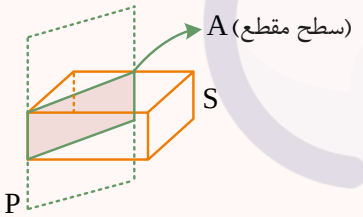
$\Rightarrow S_{\triangle MFH} = \frac{۱}{۲}h \times HF = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{\frac{۱۱}{۲}} \times ۳\sqrt{۲} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۱}$

مراقب باش دستت نَبُره!

برش: تقاطع یک شکل یا جسم هندسی (S) با یک صفحه (P) را برش گویند.

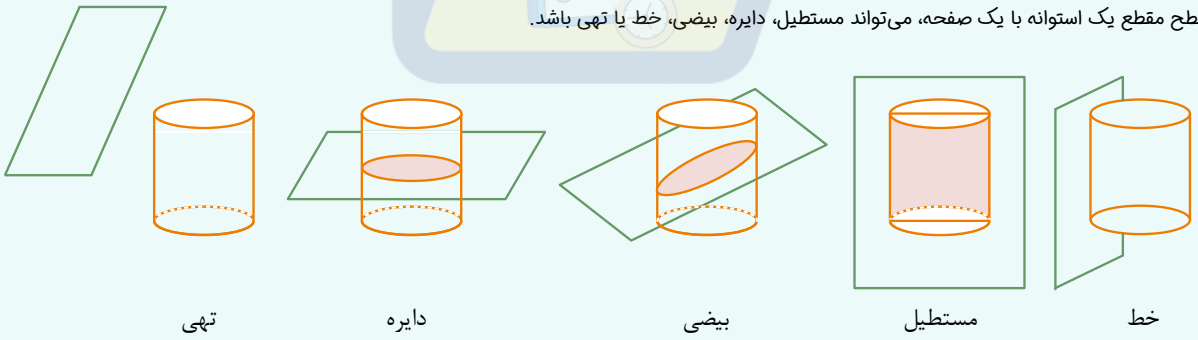
سطح مقطع یا سطح برش: مکان هندسی حاصل از تقاطع صفحه P و شکل یا جسم S را گویند.

به عبارتی دیگر، اگر سطح مقطع حاصل را A بنامیم، داریم: $A = S \cap P$



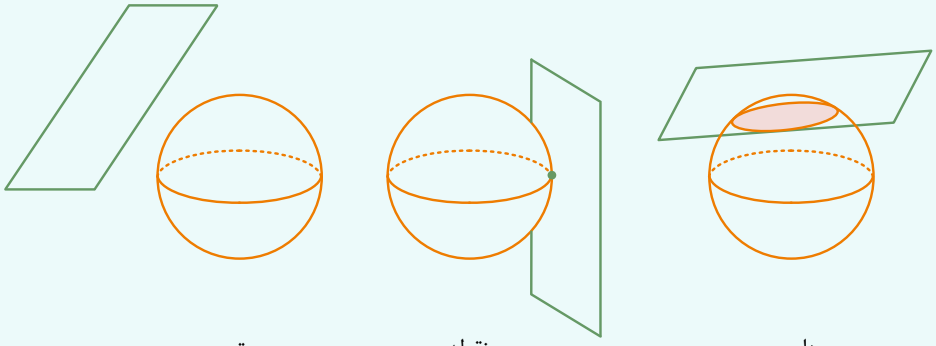
نکته طلایی ۱

سطح مقطع یک استوانه با یک صفحه، می‌تواند مستطیل، دایره، بیضی، خط یا تهی باشد.



نکته طلایی ۲

سطح مقطع یک کره با یک صفحه، می‌تواند یک دایره، یک نقطه یا تهی باشد.



دایره　　نقطه　　تهی

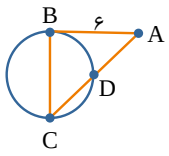
نکته طلایی ۳

سطح مقطع یک رویه مخروطی با یک صفحه، می‌تواند یک دایره، یک بیضی، یک سهمی، یک هذلولی، دو خط متقاطع، یک خط یا یک نقطه باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۹- در شکل زیر، **AB** بر دایره مماس است. **C** نقطه‌ای روی دایره است به طوری که قاطع **AC**، دایره را در نقطه **D** قطع می‌کنند، اگر $BA=۶$ و $\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}$

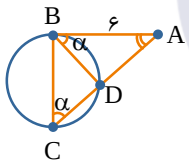
آن‌گاه اندازه **DC** چقدر است؟



۱) ۴/۵
۲) ۵
۳) ۵/۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲　　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زاویه B ظلی و روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BD}$ است، بنابراین:



$$\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\alpha$$

زاویه $B\hat{C}D$ محاطی و روبه‌روی کمان BD است، بنابراین:

$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\alpha$$

از طرفی، زاویه A در مثلث ABD و ABC مشترک است. بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{AD}{۶}=\frac{BD}{BC}=\frac{۶}{AC}$$

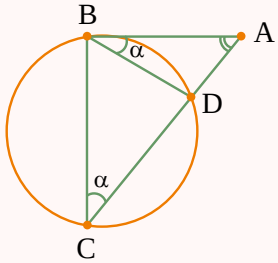
از طرفی $\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}$، بنابراین:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{AC}\Rightarrow AC=۹\Rightarrow AD=۴,\ DC=AC-AD=۹-۴=۵$$

یک تیپ تست آشنا در تشابه و دایره

از آن‌جا که زاویه $A\hat{B}D$، ظلی است داریم: $A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$

و از آن‌جایی که $A\hat{C}B$، زاویهٔ محاطی هستش، داریم: $A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$



حالا بنابه تشابه در حالت تساوی دو زاویه، می‌تونیم بنویسیم:

$$\left.\begin{matrix}A\hat{B}D=A\hat{C}B\\ B\hat{A}C\ \text{(زاویه مشترک)}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ACB}$$

چون ۲ مثلث متشابه هستن، رابطهٔ زیر بین اضلاع اون‌ها برقرار هستش:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{CB}$$

و میشه یکی از روابط طولی در دایره رو اثبات کرد:

$$\overline{AB}^{۲}=\overline{AD}\times\overline{AC}$$

$$(\text{مماس})^{۲}=(\text{جزء})\times(\text{کل})$$

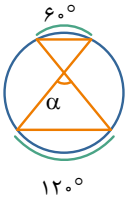
گروه آموزشی ماز

۲۰- در دایره‌ای به شعاع واحد، دو وتر موازی دو طرف مرکز دایره با اندازه‌های ۱ و $\sqrt{۳}$ دو قاعده یک ذوزنقه را تشکیل می‌دهند. زاویه بین قطرهای این ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۶۰° ۲) ۴۵° ۳) ۷۵° ۴) ۹۰°

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نظیر وتر با اندازه R، ۶۰° است و در مورد وتر با اندازه $\sqrt{۳}R$ این زاویه ۱۲۰° است، بنابراین:

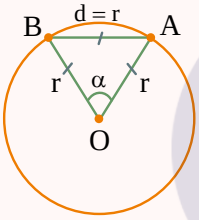


$$\alpha=\frac{۶۰^\circ+۱۲۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

دایره با چاشنی مثلثات

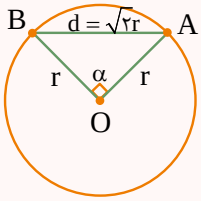
می‌خوایم برخی از وترهای خاص در دایره رو باهم بررسی کنیم؛ وتر به طول d در دایره رو در نظر بگیرید:

۱) اگه، $d=r$، یعنی وتر برابر با شعاع دایره باشه، کمان روبه‌رو به اون وتر ۶۰° هستش:



$$\Rightarrow \text{مثلث متساوی‌الاضلاع است.}\quad O\hat{A}B=A\hat{O}B=\alpha=۶۰^\circ$$

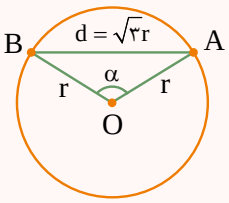
۲) اگه، $d=\sqrt{۲}r$، یعنی وتر، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره باشه، کمان روبه‌رو به اون وتر، ۹۰° هستش:



$$d^{۲}=\left(\sqrt{۲}r\right)^{۲}=۲r^{۲}=r^{۲}+r^{۲}$$

$$\Rightarrow \overline{OA}^{۲}+\overline{OB}^{۲}=\overline{AB}^{۲}\xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورث برقراره}}A\hat{O}B=\alpha=۹۰^\circ$$

۳) اگه، $d=\sqrt{۳}r$، یعنی وتر $\sqrt{۳}$ برابر شعاع دایره باشه، کمان روبه‌رو به اون وتر، ۱۲۰° هستش:



$$\text{قضیه کسینوس‌ها}:\ \overline{OA}^{۲}+\overline{OB}^{۲}-۲\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(\alpha)=\overline{AB}^{۲}$$

$$r^{۲}+r^{۲}-۲\cos(\alpha)r^{۲}=\left(\sqrt{۳}r\right)^{۲}=۳r^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲r^{۲}-۲\cos(\alpha)r^{۲}=۳r^{۲}\Rightarrow -۲\cos(\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha=۱۲۰^\circ$$

گروه آموزشی ماز

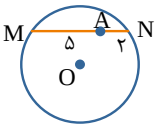
۲۱- A نقطه‌ای روی وتر MN از دایره است به طوری که $AN=۲$ و $AM=۵$، طول کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد، چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$

۲) $۲\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۲۰}$

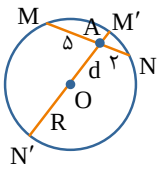
۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$



پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روش اول:

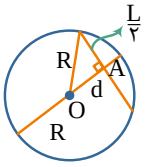
A نقطه‌ای دلخواه روی MN است. طبق قضیه روابط طولی خواهیم داشت:



$$AN\times AM=AM'\times AN'\Rightarrow ۲\times ۵=(R-d)(R+d)\Rightarrow R^۲-d^۲=۱۰$$

از طرفی کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد، همان است که از A بر قطر شامل A عمود می‌شود.

بنابراین اگر طول وتر L باشد، در یک مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم $\frac{L}{۲}$ را پیدا کنیم:



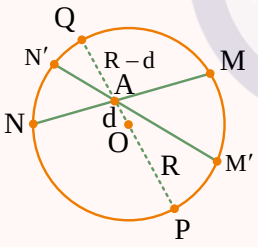
$$\frac{L}{۲}=\sqrt{R^۲-d^۲}\Rightarrow L=۲\sqrt{R^۲-d^۲}=۲\sqrt{۱۰}$$

روش دوم:

طول کوتاه‌ترین وتر $=۲\sqrt{۲\times ۵}=۲\sqrt{۱۰}$

نقطهٔ سرگردان درون دایره!

فرض کنید A یه نقطهٔ دلخواه توی دایره $C(O,r)$ باشد و وترهای دلخواه MN و $M'N'$ از اون نقطه عبور کنن؛ طبق روابط طولی در دایره می‌دونیم:



$$MA\times AN=AN'\times AM'$$

در حالت خاص، اگر فاصلهٔ مرکز تا نقطه رو d بنامیم $(OA=d)$ داریم:

$$AQ\times AP=(R-d)(R+d)=R^۲-d^۲=AM\times AN$$

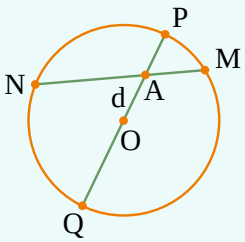
نکتهٔ خفن ۱

طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ دلخواه A در دایره، برابر است با:

طول کوتاه‌ترین وتر $=۲\sqrt{R^۲-d^۲}=۲\sqrt{AM\times AN}$

نکته خفن ۲

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه در دایره، وتری هستش که بر قطر گذرنده از اون نقطه عموده.

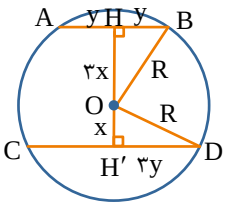


۲۲- در دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۱۰}$، دو وتر **AB** و **CD** ویژگی جالبی دارند. فاصله مرکز دایره از وتر **AB**، ۳ برابر فاصله آن از وتر **CD** است، از طرفی اندازه وتر **CD** دقیقاً ۳ برابر اندازه وتر **AB** است. کدام عدد، اندازه یکی از وترهاست؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

فقط دو بار از رابطه فیثاغورس در دو مثلث OHB و ODH′ استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}(۳x)^۲+y^۲=R^۲\\ x^۲+(۳y)^۲=R^۲\end{cases}\Rightarrow ۹x^۲+y^۲=x^۲+۹y^۲\Rightarrow x^۲=y^۲\Rightarrow x=y$$

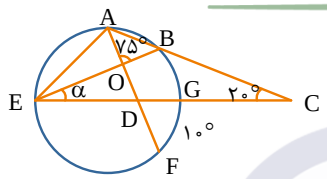
$$۹x^۲+x^۲=R^۲\Rightarrow ۱۰x^۲=R^۲=(۲\sqrt{۱۰})^۲$$

بنابراین:

$$۱۰x^۲=۴۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow\begin{cases}AB=۲y=۴\\ CD=۶y=۱۲\end{cases}$$

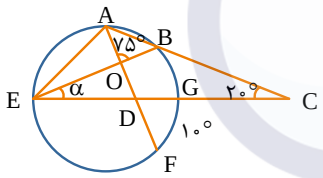
گروه آموزشی ماز

۲۳- در دایره مقابل، $\overset{\frown}{GF}=۱۰^\circ$ و $B\hat{C}G=۲۰^\circ$ و $A\hat{O}B=۷۵^\circ$، اندازهٔ زاویه $B\hat{E}C$ چقدر است؟



۱) ۵۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۴۰°

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)



$$\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EF}}{۲}=۷۵^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EF}=۱۵۰^\circ$$

از طرفی:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{GF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{EA}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۵۰^\circ+۱۰^\circ+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{AE}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{AE}=۲۰۰^\circ$$

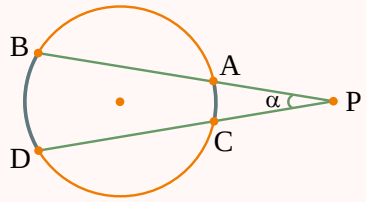
از طرفی:

$$\frac{\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}}{۲}=۲۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}=۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{BG}=۲۰۰^\circ\\ \overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}=۴۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\overset{\frown}{AE}=۱۲۰^\circ,\overset{\frown}{BG}=۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{\overset{\frown}{BG}}{۲}=۴۰^\circ$$

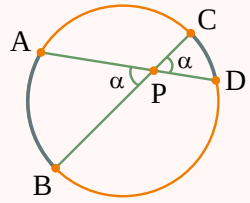
چندتا زاویهٔ مهم در دایره!

۱)



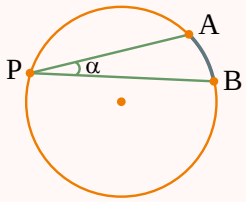
$$A\hat{P}C = \alpha = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

۲)



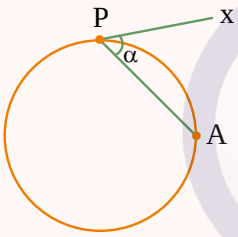
$$\underbrace{A\hat{P}B = C\hat{P}D}_{\text{متقابل به رأس}} = \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

۳) زوایه محاطی



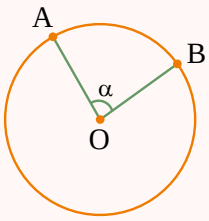
$$A\hat{P}B = \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۴) زاویه ظلی



$$A\hat{P}X = \alpha = \frac{\overset{\frown}{PA}}{۲}$$

۵) زاویه مرکزی



$$A\hat{O}B = \alpha = \overset{\frown}{AB}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر $A=\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}$ و $P(A)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های A باشد، آن‌گاه $P(A)-A$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$A=\{\{\ \},\{\{\ \}\}\} \Rightarrow P(A)=\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\{\ \}\}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\}$$

$$\Rightarrow A \subseteq P(A) \Rightarrow |P(A)-A| = |P(A)| - |P(A)\cap A| = |P(A)| - |A| \Rightarrow ۲^۲ - ۲ = ۲$$

مجموعهٔ توانی

فرض کنید A یک مجموعه باشد، مجموعه توانی A $\left(P(A)\right)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$P(A) = A$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه $(\text{Power set of } A)$

مثال

$A = \{۱,۲,۳\}$

$P(A) = \{\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\},\{\ \}\}$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $A\cup C\subseteq A\cap B$، آن‌گاه کدام گزینه را نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد؟

۱) $C\subseteq A$ ۲) $C\subseteq B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $A\subseteq C$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

$$A\cup C\subseteq A\cap B\Rightarrow \begin{cases} A\subseteq A\cap B \xrightarrow{A\cap B\subseteq B} A\subseteq B \\ C\subseteq A\cap B\Rightarrow C\subseteq A\ ,\ C\subseteq B \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر $p\vee\sim q\Rightarrow\sim r$ و $\sim p\wedge q\Rightarrow\sim r$ گزاره‌هایی درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره قطعاً درست است؟

۱) $r\wedge p\Rightarrow r\vee q$ ۲) $r\vee p\Rightarrow r\vee q$ ۳) $p\wedge q\Rightarrow r\wedge q$ ۴) $q\Leftrightarrow r$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر $S\equiv p\vee\sim q$، آن‌گاه $\sim p\wedge q\equiv\sim S$، بنابراین:

$$(S\Rightarrow\sim r)\wedge(\sim S\Rightarrow\sim r)\equiv(\sim S\vee\sim r)\wedge(S\vee\sim r)\equiv\sim r\vee F\equiv\sim r$$

بنابراین:

$\sim r\equiv T\Leftrightarrow r\equiv F$

در گزینه ۱ مقدم نادرست است، پس ارزش کل گزاره بنا به انتفای مقدم همواره درست است.

$$r\wedge p\Rightarrow r\vee q\equiv F\wedge p\Rightarrow F\vee q\equiv F\Rightarrow q\equiv T$$

یه مرور منطقی‌مون نشه؟

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

$(p\Rightarrow q)\equiv\sim p\vee q$

$\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q$

$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر $A=\{۲,۴,۶,\ldots,۱۰۲\}$ و $B=\{۳,۶,۹,\ldots,۱۰۲\}$، آن‌گاه $A^۲-B^۲$ چند عضو دارد؟

۱) ۲۱۳۲ ۲) ۲۳۱۲ ۳) ۲۲۳۱ ۴) ۲۳۲۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$A^۲-B^۲=A^۲-A^۲\cap B^۲=A^۲-(A\cap B)^۲$$

$$\Rightarrow\left|A^۲-B^۲\right|=\left|A^۲\right|-\left|(A\cap B)^۲\right|=|A|^۲-|A\cap B|^۲$$

$$|A|=\left[\frac{۱۰۲}{۲}\right]=۵۱$$

اما:

$$|A\cap B|=\left[\frac{۱۰۲}{۶}\right]=۱۷$$

$$\Rightarrow\left|A^۲-B^۲\right|=۵۱^۲-۱۷^۲=(۵۱-۱۷)(۵۱+۱۷)=۳۴\times۶۸=(۳۴)^۲\times۲=۲۳۱۲$$

ضرب دکارتی دو مجموعه

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه $(A\times B)$، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه اول خود را از مجموعه A و مؤلفه دوم خود را از مجموعه B می‌گیرند.
به‌صورت ریاضی می‌توان نوشت:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\ ,\ y\in B\}$$

✓ منظور از A^2، همان $A\times A$ است.

روابط بین تعداد اعضای مجموعه‌ها و ضرب دکارتی

($|A|$ نماد تعداد اعضای مجموعه A است.)

* $|A\times B|=|B\times A|=|A||B|$
* $|A\times B\cap B\times A|=|A\cap B|^2$
* $|A\times B\cup B\times A|=|A\times B|+|B\times A|-|A\cap B|^2$
* $|A\times B-B\times A|=|A\times B|-|A\cap B|^2$

گروه آموزشی ماز

۲۸- مجموعه همه زیرمجموعه‌های A، B و $A\cup B$ را با $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cup B)$ نشان می‌دهیم. اگر $|P(A\cup B)|=|P(A)|+|P(B)|+۴۶۴$، آن‌گاه $\big||A|-|B|\big|$ چقدر است؟ (A و B دو مجموعه مجزا هستند.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

با فرض اینکه $|A|=m$، $|B|=n$ و $m\geq n$، آن‌گاه:

$$۲^{m+n}-۲^m-۲^n=۴۶۴\Rightarrow ۲^n(۲^m-۲^{m-n}-۱)=۲^۴\times ۲۹\Rightarrow n=۴$$

$$\Rightarrow ۲^m-۲^{m-۴}-۱=۲۹\Rightarrow ۲^m-۲^{m-۴}=۳۰\Rightarrow ۲^{m-۱}-۲^{m-۵}=۱۵$$

$۲^{m-۱}-۲^{m-۵}$ فرد است، در نتیجه:

$$m-۵=۰\Rightarrow m=۵$$
$$\Rightarrow \big||A|-|B|\big|=۵-۴=۱$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{Z};\exists y\in\mathbb{Z};y\mid x$
۲) $\forall x\in\mathbb{N};\exists y\in\mathbb{N};y=x+۱$
۳) $\exists x\in\mathbb{Z};\forall y\in\mathbb{Z};x\mid y$
۴) $\forall x\in\mathbb{N};\exists y\in\mathbb{N}:x=y+۱$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

زیرا:

$$x=y+۱\ ,\ x=۱\Rightarrow ۱=y+۱\Rightarrow y=۰\notin\mathbb{N}$$

سورها

عباراتی که قبل از گزاره‌نماها به کار میرن و اونارو به گزاره تبدیل می‌کنن.

۱) **سور عمومی:** عبارت «به ازای هر مقدار» سور عمومی نام داره و با نماد $\forall$ مشخص میشه.

مثال اول

$\forall x\in\mathbb{N}\ ;\ x^2\geq ۱$ (به ازای هر x طبیعی، x^2 بزرگ‌تر یا مساوی یک هست.)

۲) **سور وجودی:** عبارت «به ازای برخی مقادیر» سور وجودی نام داره و با نماد $\exists$ مشخص میشه.

مثال دوم

$\exists K\in\mathbb{Z}\ ;\ K^2+۱=۰$ (به ازای برخی مقادیر صحیح K، $K^2+۱=۰$ است.)

ارزش گزارهٔ مثال اول درست و مثال دوم نادرست است.

نقیض گزاره‌های سوری

$\sim(\forall x\ ;\ p(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim p(x)$

$\sim(\exists x\ ;\ p(x)) \equiv \forall x\ ;\ \sim p(x)$

مثال سوم

$\sim\underbrace{\left(\forall x\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{x}\geq 0\right)}_{\text{درست}} \equiv \underbrace{\left(\exists x\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{x}<0\right)}_{\text{نادرست}}$

مثال چهارم

$\sim\underbrace{\left(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{1}{x}=0\right)}_{\text{نادرست}} \equiv \underbrace{\left(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{1}{x}\neq 0\right)}_{\text{درست}}$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $A\cup B=U$، آن‌گاه متمم مجموعه $B-\left[(A-(A-B))\cup((A-B)-B)\right]$ کدام است؟

۱) B ۲) $B-A$ ۳) A' ۴) $B'\cup A'$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روش اول:

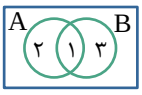
$$\begin{matrix} A-(A-B)=A\cap B \\ (A-B)-B=A-B \end{matrix} \Rightarrow (A\cap B)\cup(A-B)=A$$

$$\Rightarrow (A-B)'=U-(A-B)=A\cup B-(A-B)=B$$

روش دوم:

با انتخاب اعضای محدودی به عنوان مثال برای مجموعه‌های A و B، مجموعه موجود در صورت مسأله را می‌سازیم، چون: $A\cup B=U$

پس بیرون مجموعه A و B، عضوی در نظر نمی‌گیریم:



$$\begin{cases} A-(A-B)=\{1,2\}-\{2\}=\{1\} \\ (A-B)-B=\{2\}-\{1,3\}=\{2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{1,2\}-\{1,3\}=\{2\} \Rightarrow \{2\}'=\{1,3\}=B$$

جمع مجموعه‌ها جَمعِه!

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداره و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشون داده میشه.

مجموعه مرجع: در هر مسئله، همهٔ مجموعه‌های مورد بررسی، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع هستن.

به این مجموعه، مجموعه مرجع یا جهانی گفته میشه و با نماد U یا S نشون داده میشه.

برخی روابط در جبر مجموعه‌ها

* $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
* $|A-B|=|A|-|A\cap B|$
* $|A'|+|A|=|U|$

(۱) $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$ (۲) $A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$

(۳) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ، $(A\cup B)'=A'\cap B'$

گروه آموزشی ماز

دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

اهمیت مجموعه، الگو و دنباله ـ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری!

ما آدم‌ها همواره دنبال این هستیم که پدیده‌های دور و برمون رو بشناسیم و بتونیم کنترلشون کنیم. از این رو همه پدیده‌ها رو به کمک یه الگوی مناسب بیان می‌کنیم تا قابل درک و محاسبه شوند.

پس یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی اطرافمون و پی بردن به الگوی نهفته آنهاست و به حدی این موضوع اهمیت داره که برخی معتقدند که ریاضی علم مطالعه الگوهاست.

تعجب نکنید، فصول این بخش مبنا و پایه ریاضیاته که با تسلط رو اینا می‌تونین خیالتون بابت حل مسائل معادله، نامعادله و ... کاملاً راحت باشه.

این بخش‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

سوالات تابع، لگاریتم و نمایی، مشتق و کاربردش و ... حتی احتمال، همه و همه می‌تونن با این بخش‌ها ترکیب بشن، از طرفی بعضی از طراحان سعی بر این دارند که سوالات ترکیبی جدیدی از بخش‌های دیگه طرح کنند که از الگوها و دنباله در آن‌ها استفاده شود.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای بخش دنباله هندسی توجه ویژه‌ای به توان و قوانین توان (فصل ۴ نهم) داشته باشین.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۲	۱	۱	۱	۱	۱
مباحث مطرح شده در سوال	دنباله بازگشتی ضابطه یک دنباله	جمله عمومی یک دنباله	جمله عمومی دنباله هندسی	دنباله حسابی و هندسی	دنباله حسابی	دنباله هندسی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- در یک باشگاه ورزشی ۸۰ نفر حضور دارند که ۳۵ نفر از آن‌ها والیبال و ۲۵ نفر از آن‌ها بسکتبال بازی می‌کنند. اگر تعداد افرادی که در هر دو رشته بازی می‌کنند، $\frac{۱}{۳}$ افرادی باشد که در هیچ‌یک از دو رشته فعالیت نمی‌کنند، در این صورت در این باشگاه، چند نفر فقط والیبال بازی می‌کنند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

روش اول:

اگر مجموعه افرادی که والیبال بازی می‌کنند را A و مجموعهٔ افرادی که بسکتبال بازی می‌کنند را B بنامیم، در این صورت با فرض $n(A\cap B)=k$ خواهیم داشت:

$$n(A)=۳۵\ ,\ n(B)=۲۵\ ,\ n(A\cap B)=k$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cup B)=۳۵+۲۵-k=۶۰-k$$

تعداد افرادی که ورزش نمی‌کنند برابر $۳k$ خواهد بود (یعنی در هیچ‌یک از دو رشته، فعالیت ندارند) بنابراین داریم:

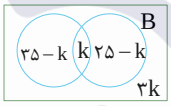
$$n\big((A\cup B)'\big)=۳k$$

از طرفی، چون $n\big((A\cup B)'\big)+n(A\cup B)=۸۰$، پس خواهیم داشت:

$$۳k+۶۰-k=۸۰\Rightarrow ۲k=۲۰\Rightarrow k=۱۰\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

تعداد افرادی که فقط والیبال بازی می‌کنند $=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۵-۱۰=۲۵$

روش دوم:



$$(۳۵-k)+(k)+(۲۵-k)+۳k=۸۰\Rightarrow ۲k=۲۰\Rightarrow k=۱۰$$

تعداد افرادی که فقط والیبال بازی می‌کنند $=۳۵-k=۳۵-۱۰=۲۵$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

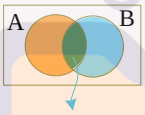
تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

می‌دونید چرا اینجوری شد؟

شکل مقابل را ببینید:



دوبار هاشور زده شده

برای شمارش تعداد اعضای اجتماع، تعداد اعضای $(A\cap B)$ را دو بار شمارش کردیم! پس یکبارش رو حذف می‌کنیم.

نکات طلایی

می‌دانیم که A و A' دو مجموعهٔ جدا از هم هستند، پس داریم:

$$n(A)+n(A')=n(A\cup A')=n(U)$$

همچنین مجموعه‌های $A\cap B$ ،$B-A$ و $A-B$ دوبه‌دو مجزا از هم محسوب می‌شوند، پس:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

تعداد اعضایی که فقط در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارند:

$$n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$$

تعداد اعضایی که فقط در مجموعهٔ A عضویت دارند:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

تعداد اعضایی که در هیچ‌یک از دو مجموعهٔ A و B قرار ندارند:

$$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)$$

همچنین بدانید:

$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

یکم دمورگان ببینید:

$$n(A\cup B)'=n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$n(A\cap B)'=n(A'\cup B')=n(U)-n(A\cap B)$$

۲- در دنباله هندسی با جملات مثبت اگر با جمله اول a و $\frac{a_۶}{a_۳^۲}+\frac{a_۲}{a^۲}=۶$، قدرنسبت دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$$\frac{aq^۵}{(aq)^۳}+\frac{aq}{a^۲}=۶\Rightarrow\frac{q^۲}{a^۲}+\frac{q}{a}=۶$$

$$\frac{q}{a}=t\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۲\Rightarrow q=۲a\\ t=-۳\Rightarrow q=-۳a\end{cases}$$

جملهٔ عمومی دنباله هندسی

اگر در یک دنباله هندسی، جمله اول را با $a_۱$ و قدرنسبت را با q نمایش دهیم، داریم:

جمله اول ($a_۱$) ، جمله دوم ($a_۲$) ، جملهٔ سوم ($a_۳$) ، جمله چهارم ($a_۴$) ، جمله پنجم ($a_۵$) ، جمله n ام (a_n)

$$a_۱\xrightarrow{\times q}a_۱q\xrightarrow{\times q}a_۱q^۲\xrightarrow{\times q}a_۱q^۳\xrightarrow{\times q}a_۱q^۴\ \ldots\ \xrightarrow{\times q}a_۱q^{n-۱}$$

بنابراین، جمله n ام یک دنباله هندسی که همان جمله عمومی آن می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$a_۱=$: جمله اول

$a_n=$ جمله n ام $\quad a_n=a_۱q^{n-۱};(n\in\mathbb{N})$

$n=$ شماره جمله

$q=$ قدرنسبت

توجه:

توجه کنید که در جمله عمومی یک دنباله هندسی توان قدرنسبت، یک عبارت درجه اول برحسب n بوده که ضریب n در آن برابر ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۳- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d تساوی $۶a_۴^۲-۵a_۳a=۳aa_۲$ برقرار باشد، واسطه حسابی جمله نهم و پنجم چند برابر قدرنسبت دنباله است؟

۱) ۴ یا ۷ ۲) ۳ یا ۹ ۳) ۸ یا ۴ ۴) ۴ یا ۷/۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$$۶(a+d)^۲-۵(a+۲d)a=۳a(a+d)$$

$$۶(a^۲+d^۲+۲ad)-۵a^۲-۱۰ad=۳a^۲+۳ad$$

$$a^۲+۶d^۲+۲ad=۳a^۲+۳ad\Rightarrow ۲a^۲+ad-۶d^۲=۰$$

$$(a+۲d)(۲a-۳d)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۲d\\ a=\frac{۳}{۲}d\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=a+(n-۱)d=-۲d+(n-۱)d=(n-۳)d\\ a_n=a+(n-۱)d=\frac{۳}{۲}d+(n-۱)d=(n+\frac{۱}{۲})d\end{cases}$$

$$\frac{a_۷}{d}=\begin{cases}\frac{۴d}{d}=۴\\ \frac{۷/۵d}{d}=۷/۵\end{cases}$$

واسطه حسابی جمله نهم و پنجم، جمله هفتم است.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی

اگر در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول را با a_1 و قدرنسبت را با d نمایش دهیم، داریم:

$$\underset{\text{جمله اول}}{a_1} \xrightarrow{+d} \underset{\text{جملهٔ دوم } (a_2)}{a_1+d} \xrightarrow{+d} \underset{\text{جملهٔ سوم } (a_3)}{a_1+2d} \xrightarrow{+d} \underset{\text{جملهٔ چهارم } (a_4)}{a_1+3d} \quad \cdots \xrightarrow{+d} \underset{\text{جملهٔ } n \text{ ام } (a_n)}{a_1+(n-1)d}$$

بنابراین جملهٔ n ام یک دنباله حسابی که همان جملهٔ عمومی آن می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$a_1 =$ جملهٔ اول

$a_n =$ جملهٔ n ام $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

$n =$ شمارهٔ جمله

$d =$ قدرنسبت

توجه:

اگر فاصلهٔ بین جملات یک دنبالهٔ حسابی با هم برابر باشند نیز می‌توان از رابطهٔ بالا استفاده کرد، به عبارت دیگر، اگر a_n, a_m, a_p سه جمله از یک دنبالهٔ حسابی باشند، به طوری که فاصلهٔ بین سه جمله با هم برابر باشد، در این صورت داریم:

$$a_m = \frac{a_n + a_p}{2} \qquad \underset{+kd \quad +kd}{a_n, \ldots, a_m, \ldots, a_p}$$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر جملات چهارم و هشتم دنباله خطی a_n به ترتیب برابر جملات دوم و هفتم دنباله خطی b_n باشند و قدرنسبت‌ها دو عدد طبیعی یک رقمی باشند، اختلاف جملات بیستم آن‌ها چه عددی است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

اگر $\begin{cases} a_n = an+b \\ b_n = cn+d \end{cases}$ دو دنباله خطی باشد، آن‌گاه: $\begin{cases} a_4 = b_2 \\ a_8 = b_7 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} 4a+b = 2c+d \\ 8a+b = 7c+d \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4a = 5c \Rightarrow a = 5, c = 4$$

با داشتن a و c به کمک جملات دنباله $d-b$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 20+b = 8+d \\ 40+b = 28+d \end{cases} \Rightarrow d-b = 12$$

$$a_{20} - b_{20} = (20a+b) - (20c+d) = 20(a-c) + b - d = 20 \times 1 - 12 = 8$$

الگو و دنباله خطی

به الگوها و دنباله‌هایی که اختلاف هر دو جمله متوالی در آن‌ها عددی ثابت باشد، الگو یا دنباله خطی می‌گوییم و جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an+b \; ; \{a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ است.

توجه کنید که در جملهٔ عمومی دنباله خطی، ضریب n (همون a) اختلاف بین جملات متوالی در دنباله خطی است که به آن قدرنسبت دنباله خطی می‌گوییم.

$$\underset{+a \quad +a \quad +a}{t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4} \quad \ldots$$

به عنوان مثال:

اگر $t_n = -2n+5$ جمله عمومی یک دنبالهٔ خطی باشد، جملات آن به صورت $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ است که در آن هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۲ واحد کاهش یافته است، ببینید:

$$\underset{-2 \quad -2 \quad -2 \quad -2}{3 \quad 1 \quad -1 \quad -3 \quad -5} \quad \ldots$$

همانطور که می‌بینید اختلاف جملات متوالی در این دنباله، همان ضریب n در جملهٔ عمومی دنباله است.

گروه آموزشی ماز

۵- اعداد طبیعی را چنان دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد در هر دسته مربع کامل باشد، در دسته‌ای که تعداد اعضای آن به ۱۳ می‌رسد، جمله وسط آن دسته کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۳۱ ۳) ۳۴ ۴) ۴۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

$\{۱\}$, $\{۲,۳,۴\}$, $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$, $\{۱۰,...,۱۶\}$

۱ عضوی ۳ عضوی ۵ عضوی ۷ عضوی

پس در دسته n ام تعداد اعضای دسته $۲n-۱$ است.

$۲n-۱=۱۳ \Rightarrow n=۷$

یعنی دسته هفتم هستیم، بزرگترین عضو دسته هفتم ۴۹ است.

دسته هفتم $=\{۳۷,۳۸,...,۴۹\}$

عدد وسطی $=\frac{۳۷+۴۹}{۲}=\frac{۸۶}{۲}=۴۳$

گروه آموزشی ماز

۶- اگر a,b,d دنباله هندسی و a,b,c,d دنباله حسابی تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله هندسی چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

در واقع جملات اول، دوم و چهارم دنباله حسابی سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند، پس:

قدرنسبت هندسی $=\frac{۴-۲}{۲-۱}=۲$

نکته:

اگر جملات m ام و n ام و k ام از یک دنباله حسابی خود تشکیل دنباله هندسی دهند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله هندسی $q=\frac{k-n}{n-m}$ است.

گروه آموزشی ماز

۷- هرگاه a_n یک الگوی خطی و $b_n=a_n.a_{n+۱}$ یک الگوی درجه ۲ باشد، به طوری که جملات اول و سوم الگوی خطی به ترتیب ۴ و ۱۰ باشند، جمع جمله چهارم دو دنباله چه عددی است؟

۱) ۲۲۱ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۷۶ ۴) ۱۸۱

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

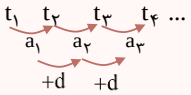
$a_n=an+b \Rightarrow \begin{cases} a+b=۴ \\ ۳a+b=۱۰ \end{cases} \Rightarrow a=۳\ ,b=۱$

$a_n=۳n+۱\ ,\ b_n=(۳n+۱)(۳n+۴) \Rightarrow b_n=۹n^۲+۱۵n+۴$

$a_۴+b_۴=(۱۳)+(۱۴۴+۶۰+۴)=۱۳+۲۰۸=۲۲۱$

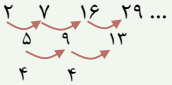
الگو و دنباله درجه دوم

به الگوها و دنباله‌هایی که میزان اختلاف جملات متوالی در آن‌ها ثابت نبوده و اختلاف جملات متوالی، خودشان تشکیل یک دنبالهٔ خطی بدهند، الگو یا دنباله درجه دوم می‌گوییم که جملهٔ عمومی آن به صورت $t_n=an^۲+bn+c\ ;\ (a\neq ۰)$ است، به عبارت دیگر، اگر t_n دنباله درجه دوم و a_n دنبالهٔ اختلاف جملات متوالی آن باشد، در این صورت a_n دنباله‌ای خطی با قدرنسبت d است.



به عنوان مثال:

اگر $t_n=۲n^۲-n+۱$ ، جمله عمومی یک دنباله درجه دومی باشد، جملات آن به صورت $۲,۷,۱۶,۲۹,...$ است و داریم:



همانطور که می‌بینید اختلاف جملات متوالی این دنباله به صورت $۵,۹,۱۳,...$ هستند که خودشان تشکیل یک دنبالهٔ خطی با قدرنسبت ۴ می‌دهند.

نحوه به دست آوردن جمله عمومی یک دنباله درجه دوم

می‌دانیم که جملهٔ عمومی یک دنباله درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c \; ; \; (a \neq 0)$ است، حال برای به دست آوردن ضرایب مجهول a، b و c به روش زیر عمل می‌کنیم:

- برای به دست آوردن ضریب a، اختلاف اختلاف‌های جملات متوالی دنباله (همان قدرنسبت دنباله خطی a_n) را به دست آورده و آن را نصف می‌کنیم.
- برای به دست آوردن ضریب c، از رابطه $c = t_1 - (a_1 - d)$ استفاده می‌کنیم.
- در نهایت، برای به دست آوردن ضریب b، یکی از جملات دنباله (معمولاً جمله اول) را در جملهٔ عمومی t_n جای‌گذاری می‌کنیم.

گروه آموزشی ماز

۸- حاصل $A = \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{27}} \cdot \sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} \times 81^{-\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) $6\sqrt[3]{9}$ ۴) $4\sqrt[3]{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A = \frac{\sqrt[3]{3^2 \times 3\sqrt{3}} \times 2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3} \times 3^{-1}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{9} \times 2\sqrt[3]{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 18$$

دقت داشته باشید $a > 0 : \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

کار کردن با رادیکال‌ها

اگر a عددی مثبت باشد، برای هر دو عدد طبیعی n و m داریم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

- اگر فرجه‌ها یکسان باشد:

رادیکال‌ها با فرجهٔ یکسان را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

راستی تا یادم نرفته، اگر n زوج باشد، a و b نامنفی باشند! در ضمن در رابطهٔ سمت راستی باید $b \neq 0$

- اگر فرجه‌ها متفاوت باشد:

دو راهکار داریم:

اول اینکه با استفاده از تعریف توان گویا ($\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$) رادیکال‌ها را به شکل توانی می‌نویسیم و از خواص توان‌ها استفاده می‌کنیم.

دومین راهکار، یکسان کردن فرجه‌هاست، فرجهٔ مشترک ک.م.م فرجه‌هاست، سپس باید فرجهٔ مشترک را بر هر کدام از فرجه‌ها تقسیم کرده و حاصل را در توان عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم، ببینید:

به عنوان مثال:

$$\sqrt{5} \times \sqrt[5]{5^3} = \sqrt[2\times5]{5^{1\times5}} \times \sqrt[5\times2]{5^{3\times2}} = \sqrt[10]{5^5} \times \sqrt[10]{5^6} = \sqrt[10]{5^{11}}$$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

در حالت کلی نمی‌توان گفت: $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \pm b}$ ، در صورتی می‌توان رادیکال‌ها را جمع و تفریق کرد که دقیقاً یکسان باشند، در این صورت رادیکال را با ضریبش جمع و تفریق می‌کنیم نه زیر رادیکال‌ها را!!

قانون ضرب فرجه‌ها

فرجه‌های زیر هم، در هم ضرب می‌شوند، همین! ببینید:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $A^{۳}=(\sqrt[۳]{۴}+۳)(\sqrt[۳]{۲}+۳)-۸$، مقدار $(A-۱)^{۳}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A^{۳}=(\sqrt[۳]{۴}+۳)(\sqrt[۳]{۲}+۳)-۸$$

$$A^{۳}=\sqrt[۳]{۸}+۳\sqrt[۳]{۴}+۳\sqrt[۳]{۲}+۱\Rightarrow A^{۳}=(\sqrt[۳]{۲}+۱)^{۳}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt[۳]{۲}+۱\Rightarrow (A-۱)^{۳}=۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $A=\frac{۴\sqrt{۲}+۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$ و $B=\frac{۲\sqrt{۲}-۳\sqrt{۳}}{۵+\sqrt{۶}}$، ساده شده $A-B^{۲}$ کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۶}$ ۲) ۵ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{۲(\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷})}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} A=\frac{۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(۲+۳-\sqrt{۶})}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}=۱۰-۲\sqrt{۶}$$

$$B=\frac{\sqrt{۸}-\sqrt{۲۷}}{۵+\sqrt{۶}} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} B=\frac{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})(۲+۳+\sqrt{۶})}{۵+\sqrt{۶}}=\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$$

$$B^{۲}=۵-۲\sqrt{۶}\Rightarrow A-B^{۲}=(۱۰-۲\sqrt{۶})-(۵-۲\sqrt{۶})\Rightarrow A-B^{۲}=۵$$

دنیای اتحادها

مفهوم اتحاد

اتحاد جبری، تساوی بین دو عبارت جبری است که به ازای تمام مقادیر مجاز برای متغیرهایشان برقرار است.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$	$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$
نتایج	$a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}-۲ab$ $a^{۲}+b^{۲}=(a-b)^{۲}+۲ab$ $(a+b)^{۲}+(a-b)^{۲}=۲a^{۲}+۲b^{۲}$ $(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}=۴ab$

اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$	$(a-b-c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-۲ab-۲ac+۲bc$

اتحاد مزدوج

$(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$	هر وقت دو عبارت مزدوج دیدید یا تفاضل دو جمله با توان‌های زوج، مزدوج بزنید.

اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$	$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$
اینجوری هم بلد باشید	$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳ab(a+b)+b^{۳}$ $(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳ab(a-b)-b^{۳}$
نتایج	$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$ $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)^{۳}+۳ab(a-b)$

اتحاد چاق و لاغر (فیل و فنجان)

$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$	$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $A=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲-\sqrt[۳]{۴}}$ و $B=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۲}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $AB=۲$ ۲) $A+B=\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $A+B=۱$ ۴) $AB=۱$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲-\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}-\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}$$

$$B=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}$$

$$AB=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}.\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow AB=۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $a=\sqrt[۴]{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ و $b=\sqrt[۴]{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ ساده شدهٔ $A=(a^۲+b^۲-ab)(a^۲+b^۲+ab)$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۱$ ۲) $۲\sqrt{۳}+۱$ ۳) $۲\sqrt{۳}-۲$ ۴) $۲\sqrt{۳}+۲$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A=a^۴+b^۴+۲a^۲b^۲-a^۲b^۲=a^۴+b^۴+a^۲b^۲$$

$$A=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}.\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\Rightarrow A=۲\sqrt{۳}+۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $A=\frac{\frac{۳}{\sqrt{۳}}+\sqrt{۲۴}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۶}}$، حاصل $(A-۳)^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲۴}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۶}}=\frac{\sqrt{۳}(۱+۲\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۲})}=\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$A=۴-۱-\sqrt{۲}\Rightarrow A=۳-\sqrt{۲}\Rightarrow (A-۳)^۲=۲$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر $\frac{۱}{a^۲+۱}+\frac{۱}{a^۲-۱}=۲$ ساده شده عبارت $A=\frac{۱}{a^۲-a+۱}+\frac{۱}{a^۲+a+۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$\frac{a^۲}{a^۴-۱}=۱\Rightarrow a^۴-۱=a^۲$$

$$A=\frac{۲(a^۲+۱)}{(a^۴+۲a^۲+۱)-a^۲}=\frac{۲(a^۲+۱)}{a^۴+۱+a^۲}=\frac{۲(a^۲+۱)}{۲(a^۲+۱)}=۱$$

($a^۴+۱+a^۲=a^۲+۱$)

گروه آموزشی ماز

۱۵- هرگاه $A=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}-۲}(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}-\sqrt{۲+\sqrt{۳}})$، ساده شده A کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۳}$ ۲) ۱ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

$$A=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}.(\underbrace{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}-\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}_{B})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}B$$

$$B<۰\ ,\ B^{۲}=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}-۲\sqrt{۴-۳}=۲\Rightarrow B=-\sqrt{۲}$$

$$A=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times-\sqrt{۲}=۱\Rightarrow A=۱$$

گروه آموزشی ماز

آزمون هندسه دهم قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴

۱- کدام حکم کلی زیر فاقد مثال نقض است؟

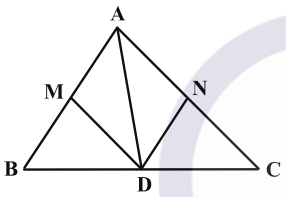
۱) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، همواره درون یا بیرون مثلث است.

۲) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع از دو برابر کوچک‌ترین ضلع، کوچک‌تر است.

۳) هر زاویهٔ خارجی مثلث حداقل از دو زاویهٔ داخلی آن مثلث بزرگ‌تر است.

۴) در هر مثلث، اندازهٔ هر ارتفاع از اندازهٔ تمام اضلاع مثلث کوچک‌تر است.

۲- در مثلث ABC، $\hat{B} > \hat{C}$ و نقاط M و N وسط اضلاع AB و AC قرار دارند. اگر AD نیمساز داخلی زاویهٔ A باشد، نسبت مساحت مثلث AMD به مساحت مثلث CND کدام است؟



۱) کوچک‌تر از ۱ ۲) ۱

۳) بین ۱ و ۲ ۴) ۲

۳- با استفاده از کدام روش رسم زیر، مرکز دایره‌ای که یک کمان از آن را داریم، می‌توانیم مشخص کنیم؟

۱) رسم عمودمنصف ۲) رسم نیمساز

۳) رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطه روی آن ۴) رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

۴- در مثلث ABC، نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ خارجی A قرار دارد. کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره برقرار است؟

۱) $PB + PC < BC + AC$ ۲) $PB + PC > BC + AC$

۳) $PB + PC < AB + AC$ ۴) $PB + PC > AB + AC$

۵- از هر رأس مثلث ABC با اضلاع ۳، ۴ و ۵ خطی موازی با ضلع مقابلش رسم می‌کنیم تا از تقاطع آن‌ها به مثلث $A'B'C'$ برسیم. مجموع فاصله‌های محل همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC از سه رأس مثلث $A'B'C'$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۶- در مثلث ABC، محل تقاطع عمودمنصف AC با ضلع AB، نقطه‌ای است که از دو ضلع AC و BC به یک فاصله است. کدام جمله در مورد مثلث ABC همواره درست است؟

۱) ABC یک مثلث متساوی‌الساقین است.
۲) ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است.
۳) در ABC، یک ضلع دو برابر ضلع دیگر است.
۴) در ABC، یک زاویه دو برابر زاویهٔ دیگر است.

۷- در مستطیل ABCD با اضلاع $AB=16$ و $AD=12$، چند نقطه روی قطرهای مستطیل وجود دارد که اختلاف فاصلهٔ آن‌ها از AB و CD برابر ۸ واحد باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) بی‌شمار

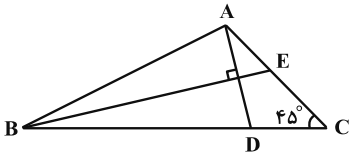
۸- در مثلث ABC رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{4}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}}{2}$ بین زوایا برقرار است. اگر O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث باشد حاصل $\frac{A\hat{O}B}{B\hat{O}C}$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{13}$
۲) $\frac{11}{12}$
۳) $\frac{11}{13}$
۴) $\frac{13}{12}$

۹- ذوزنقه‌ای به قطرهای ۵ و ۷ و قاعدهٔ کوچک ۲ و قاعدهٔ بزرگ a قابل رسم است. بیشترین مقدار صحیح a چقدر است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۱۰- در شکل زیر BE عمودمنصف AD است. اگر $BD=2CE=8$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ABE کدام است؟



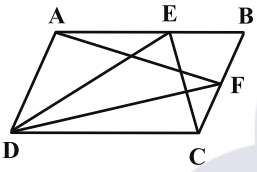
۱) ۸
۲) $8\sqrt{2}$
۳) ۱۶
۴) $16\sqrt{2}$

آزمون هندسه دهم قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴

۱- تساوی $\frac{a}{b}=\frac{b+1}{a+b}=\frac{b-1}{a}$ به ازای یک a و b مثبت برقرار است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{13}+1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

۲- اگر E و F نقاط دلخواه روی دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، چه رابطه‌ای بین مساحت‌های دو مثلث DEC و AFD برقرار است؟ $(AB > BC)$



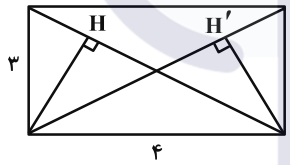
۱) همواره برابرند.

۲) مساحت مثلث AFD از مساحت مثلث DEC بزرگ‌تر است.

۳) مساحت مثلث DEC از مساحت مثلث AFD بزرگ‌تر است.

۴) بسته به جایگاه نقاط E و F، هر کدام از سه حالت امکان‌پذیر است.

۳- در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، مطابق شکل از دو رأس مجاور بر قطرهای مستطیل عمود رسم شده است. اندازهٔ HH' کدام است؟



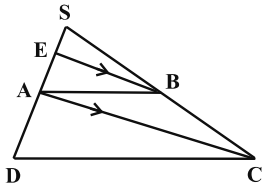
۱) ۱/۱۲

۲) ۱/۲۴

۳) ۱/۳۶

۴) ۱/۴۸

۴- در شکل زیر ABCD ذوزنقه است و $AC \parallel BE$. اگر $AD = ۵$ و $SE = ۴$، آن‌گاه طول ED کدام است؟



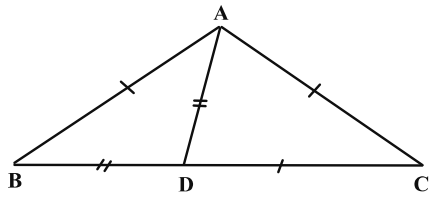
۱) $۲+۳\sqrt{۶}$

۲) $۳+۲\sqrt{۶}$

۳) $۲+۲\sqrt{۶}$

۴) $۳+۳\sqrt{۶}$

۵- مطابق شکل در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ D روی ضلع BC طوری قرار دارد که دو مثلث حاصل نیز متساوی‌الساقین هستند. نسبت طول ضلع BC به AB کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

۶- در ذوزنقهٔ ABCD، نقاط وسط دو ساق (M و N) را به هم وصل کرده‌ایم تا قطرهای ذوزنقه را در نقاط P و Q قطع کند. اگر اندازهٔ PQ با قاعدهٔ کوچک‌تر ذوزنقه برابر باشد، آن‌گاه نسبت مساحت دو ذوزنقه ABNM و CDMN کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷- در مثلث ABC، $BC-AC=۵$ و طول ضلع $AB=۶$ است. اگر مجموع طول ارتفاع‌های وارد بر AC و BC برابر طول ارتفاع وارد بر AB باشد، محیط مثلث برابر کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۳/۵ ۳) ۳۲ ۴) ۳۱

۸- در مستطیل ABCD نسبت اضلاع برابر ۲ می‌باشد، اگر قطر BD را رسم کنیم و از رأس A بر قطر BD عمود کرده و پای آن را M بنامیم، فاصلهٔ نقطهٔ M تا ضلع BC چند برابر عرض مستطیل است؟

۱) ۱/۸ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۶

۹- در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ و عمودمنصف AB همدیگر را در نقطهٔ D روی ضلع AC قطع می‌کنند. اگر $BC=۹$ و $AB=۱۶$ طول AC کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

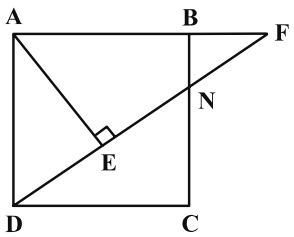
۱۰- در شکل زیر ABCD مربع، $CN=۲BN$، F در امتداد AB و AE عمود بر DF است. نسبت طول پاره‌خط EF به DE کدام است؟

۱) ۲/۲۵

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۴



۱- در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با طول قاعده‌های ۷ و ۹، قطرها بر هم عمودند. طول ساق برابر کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\sqrt{51}$ ۳) ۸ ۴) $\sqrt{65}$

۲- اگر نقاط وسط دو ضلع روبه‌روی هم و نقاط وسط دو قطر یک چهارضلعی را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک لوزی به محیط ۲۰ ایجاد می‌شود. در صورتی که در چهارضلعی اولیه مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۳- کدام گزینه ارزش گزاره‌های زیر را به درستی بیان می‌کند؟

الف) متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن نیمساز زاویه‌ها نیز باشد، مربع است.

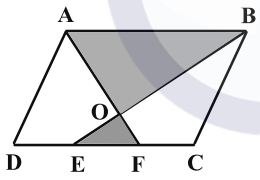
ب) چهارضلعی که قطرهای عمود بر هم داشته باشد، لوزی است.

پ) چهارضلعی که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

۱) هر سه گزاره نادرست هستند. ۲) هر سه گزاره درست هستند.

۳) فقط گزارهٔ (پ) درست است. ۴) فقط گزارهٔ (ب) نادرست است.

۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، اگر ضلع CD توسط نقاط E و F به سه قسمت مساوی تقسیم شده باشد، نسبت مساحت قسمت‌های رنگی به مساحت کل متوازی‌الاضلاع کدام است؟



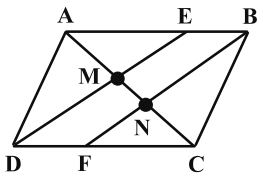
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۷}{۱۲}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقاط E و F روی اضلاع AB و CD طوری قرار دارند که $AE = CF = ۲BE = ۲DF$ است. طول پاره‌خط MN چه کسری از قطر AC است؟



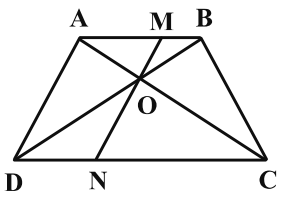
۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۶- در شکل زیر، MN از نقطهٔ O محل تلاقی دو قطر ذوزنقهٔ ABCD، موازی ساق AD رسم شده است. اگر طول قاعده‌های AB و CD به ترتیب ۴ و ۶ باشند، نسبت مساحت مثلث OAM به مساحت مثلث ONC کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۷- اگر چهار رأس به رأس‌های یک n ضلعی محدب اضافه کنیم، ۴۶ واحد به تعداد قطرهایش افزوده می‌شود. این n ضلعی چند قطر دارد؟

۱) ۹۰

۲) ۷۷

۳) ۵۴

۴) ۴۴

۸- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ\ ,\ \hat{C}=۱۵^\circ)$، AH ارتفاع وارد بر وتر و $BH=۴-۲\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

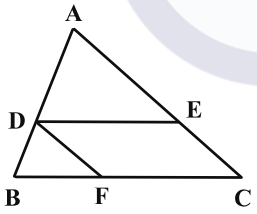
۱) ۴

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۱۶

۹- در شکل زیر چهارضلعی DECF متوازی‌الاضلاع است. اگر $\frac{FC}{BC}=\frac{۲}{۳}$، مساحت مثلث ADE چند برابر مساحت مثلث BDF است؟



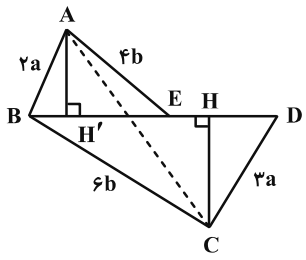
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۱۰- در شکل زیر می‌دانیم $BE=۲DE$ است. اگر $AC=۱۰$ و $CH=۳/۶$ باشد، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ H و H' از یکدیگر چقدر است؟



۱) ۷/۲

۲) ۷/۶

۳) ۸

۴) ۸/۴

آزمون هندسه دهم قلمچی ۳۰ آبان ۱۴۰۴

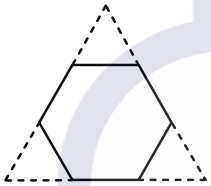
۱- در یک لوزی، اندازهٔ هر ضلع برابر ۶ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. مساحت این لوزی کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) $۱۸\sqrt{۳}$ ۳) ۹ ۴) $۹\sqrt{۳}$

۲- در مثلث ABC، $AB = ۶$ و $AC = ۸$ و دو میانهٔ BM و CN بر هم عمودند. اندازهٔ ضلع BC چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۳- مطابق شکل، از برخورد امتداد اضلاع یک شش‌ضلعی منتظم، یک مثلث حاصل شده است. اگر اندازهٔ ارتفاع این مثلث $۱۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



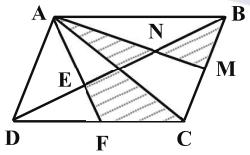
۱) ۷۲

۲) ۴۸

۳) ۹۶

۴) ۲۴

۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و F به ترتیب وسط اضلاع BC و CD می‌باشند، نسبت مساحت هاشورخورده به مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD کدام است؟



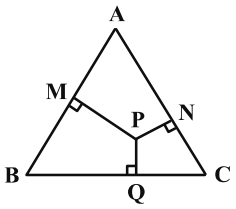
۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $AB = AC$ است. نقطهٔ M روی ضلع BC چنان اختیار شده است که $BM = ۲CM$. اگر مجموع فواصل M از دو ضلع AB و AC برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت چهارضلعی APMK است؟ (P و K محل تلاقی خطوط عمود مرسوم از M بر اضلاع AB و AC هستند.)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۲۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۸}{۱۳}$

۶- نقطهٔ P درون مثلث متساوی الاضلاع ABC طوری اختیار شده است که $۶PN = ۳PQ = ۲PM$، محیط این مثلث چند برابر PN است؟



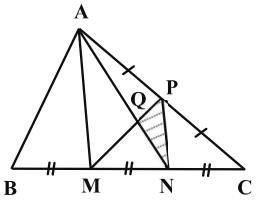
۱) ۶

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) ۱۲

۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۷- در شکل زیر، $BM = MN = NC$ و $AP = PC$ است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث PQN است؟



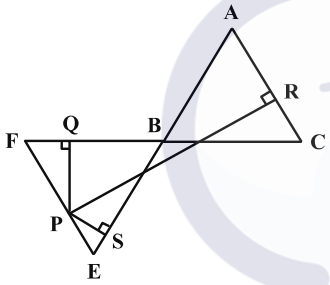
۱) ۱۲

۲) ۱۵

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۸- در شکل زیر اضلاع AB و BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به گونه‌ای امتداد داده‌ایم که مثلث BEF با آن متشابه باشد. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی ضلع EF باشد، نسبت $\frac{PR-(PQ+PS)}{AC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

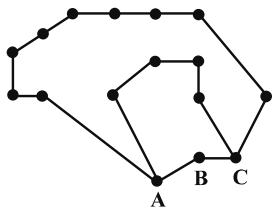
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) ۱

۹- دو چندضلعی شبکه‌ای متشابه طوری مفروض‌اند که اولی، ۱۰ نقطهٔ درونی و ۲۲ نقطهٔ مرزی و دومی ۴ نقطهٔ درونی دارد. اگر طول اضلاع اولی دو برابر طول اضلاع متناظر دومی باشند، تعداد نقاط مرزی چندضلعی دوم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰- در شکل زیر دو چندضلعی شبکه‌ای به همراه تمام نقاط مرزی آن‌ها رسم شده است. اگر این دو چندضلعی فقط در سه نقطهٔ A، B و C اشتراک داشته باشند و اختلاف مساحت آن‌ها ۱۳/۵ باشد، اختلاف تعداد نقاط درونی دو چندضلعی کدام است؟



۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

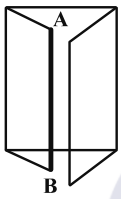
۴) ۱۲

آزمون هندسه دهم قلمچی ۱۴ آذر ۱۴۰۴

۱- دو صفحهٔ متقاطع P و Q مفروض‌اند. اگر خطوط متمایز L و L' به ترتیب با P و Q موازی باشند، در این صورت وضعیت این دو خط کدام است؟

۱) متقاطع‌اند.
۲) موازی‌اند.
۳) موازی یا متنافرند.
۴) هر وضعیتی می‌توانند داشته باشند.

۲- در شکل زیر، تعداد خطوطی را که نسبت به AB متنافر و موازی‌اند به ترتیب m و n می‌نامیم، مقدار $m \times n$ برابر با کدام است؟

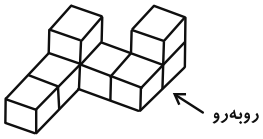


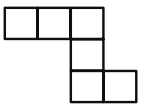
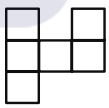
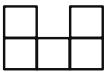
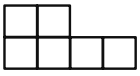
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۳- از مرکز قاعدهٔ یک مکعب مستطیل چند خط می‌توان در صفحهٔ قاعده‌اش رسم کرد که دو یال متنافر آن را قطع کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴- کدام گزینه نمایی از شکل مقابل نیست؟

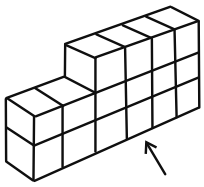


۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵- تمام وجوه یک مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ را رنگ کرده‌ایم. اگر m و n تعداد مکعب‌های کوچکی باشند که به ترتیب یک و سه وجه آن‌ها رنگ شده است، آن‌گاه $m+n$ کدام است؟

۱) ۶۲
۲) ۶۸
۳) ۷۲
۴) ۷۶

۶- در شکل زیر حداکثر چند مکعب کوچک را می‌توانیم برداریم به‌طوری که نمای بالای آن تغییری نکند؟



۱) ۴

۲) ۶

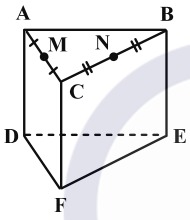
۳) ۱۰

۴) ۱۲

۷- کره‌ای با حجم $۴/۵\pi$ را با صفحات مختلف برش داده‌ایم. بزرگ‌ترین سطح مقطع ممکن چه مساحتی دارد؟

۱) $۱/۵\pi$ ۲) π ۳) $۰/۷۵\pi$ ۴) $۲/۲۵\pi$

۸- در منشور قائم شکل زیر تمام وجه‌های جانبی، مربعی به طول ضلع ۱۰ است. مطابق شکل نقاط M و N به ترتیب وسط AC و BC هستند. اگر منشور را با صفحه‌ای که از نقاط E ،D ،M و N می‌گذرد، برش دهیم، مساحت سطح مقطع چند برابر $\sqrt{۱۹}$ است؟



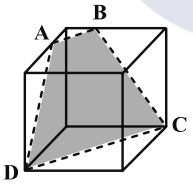
۱) ۱۸

۲) ۱۸/۲۵

۳) ۱۸/۵

۴) ۱۸/۷۵

۹- در شکل زیر اگر طول قاعده‌های ذوزنقهٔ حاصل از برش مکعب، برابر ۲ و ۶ باشند، آنگاه طول ساق آن چقدر است؟



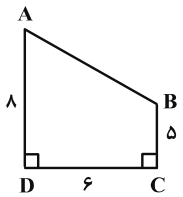
۱) $\sqrt{۱۵}$

۲) $\sqrt{۲۶}$

۳) ۵

۴) ۴

۱۰- ذوزنقهٔ شکل زیر را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چند برابر π است؟



۱) ۱۸۰

۲) ۲۵۲

۳) ۲۶۴

۴) ۲۸۸

آزمون هندسه دهم قلمچی ویژهٔ ۲۱ آذر ۱۴۰۴

۱- کدام چهارضلعی زیر را نمی‌توان رسم کرد؟

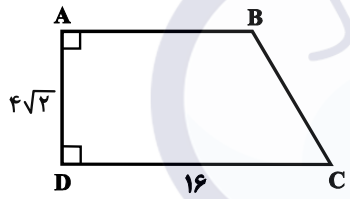
۱) لوزی‌ای که طول ضلع آن ۸ و طول قطر کوچک آن ۵ باشد.

۲) مستطیلی که طول قطر آن برابر ۶ و زاویهٔ بین دو قطر آن 45° باشد.

۳) مربعی که طول قطر آن ۴ باشد.

۴) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ و طول یکی از ضلع‌های آن ۹ باشد.

۲- در ذوزنقهٔ $ABCD$ شکل زیر، عمودمنصف قطر AC، قاعدهٔ DC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. فاصلهٔ M تا رأس D کدام است؟



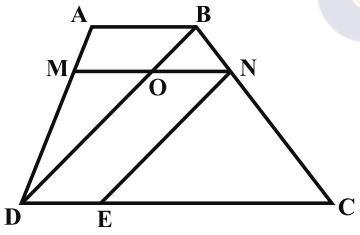
۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵/۵

۴) ۵

۳- در شکل زیر، $AB \parallel MN \parallel CD$ و $NE \parallel BD$ است. اگر $CE = 3DE$ و $OM = ON$ باشد، آنگاه نسبت طول پاره‌خط MN به طول پاره‌خط AB کدام است؟



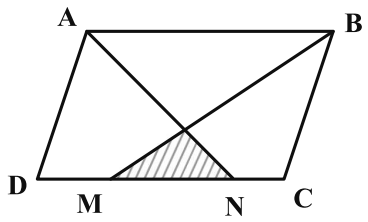
۱) ۲

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۵}{۲}$

۴- در شکل زیر نقاط M و N، ضلع CD را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر ۱۰۸ باشد، مساحت مثلث هاشورخورده کدام است؟



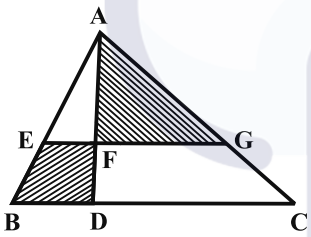
۱) ۹

۲) ۷/۵

۳) ۶

۴) ۴/۵

۵- در شکل زیر، اندازهٔ پاره‌خط‌های BD و DC به ترتیب ۲ و ۵ واحد و $AD = 3DF$ است. اگر $EG \parallel BC$ باشد، مساحت چهارضلعی BEFD چه کسری از مساحت مثلث AFG است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ ، میانه‌ها یکدیگر را در نقطهٔ G قطع کرده‌اند. اگر مساحت مثلث BGC برابر ۹ واحد مربع باشد، طول میانهٔ AM در این مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۷- مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای برابر ۲۰ است. اختلاف بین حداکثر و حداقل مساحت ممکن برای این چندضلعی کدام است؟

۱) ۹/۵ ۲) ۸/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۶/۵

۸- تمام وجه‌های مکعب مستطیلی به ابعاد ۴×۴×۵ را که از مکعب‌های کوچک به ضلع ۱ واحد تشکیل شده است، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. تعداد مکعب‌های رنگ نشده چه کسری از تعداد مکعب‌هایی است که فقط یک وجه آن‌ها رنگ شده است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۹- چند مورد از گزاره‌های زیر در مورد خط و صفحه در فضا همواره درست است؟

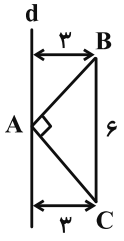
الف) اگر دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ بر صفحهٔ Q عمود باشند، آن‌گاه دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ با هم موازی‌اند.

ب) اگر خط d و صفحهٔ P بر صفحهٔ Q عمود باشند، آن‌گاه خط d با صفحهٔ P موازی بوده یا بر آن منطبق است.

ج) اگر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با صفحهٔ P موازی باشند، آن‌گاه خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ قطعاً بر هم عمود نیستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ کدام

۱۰- در شکل مقابل، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل از این دوران کدام است؟



۱) ۳۶π

۲) ۳۰π

۳) ۲۴π

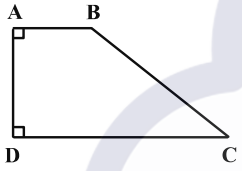
۴) ۲۰π

آزمون هندسه دهم قلمچی ۲۸ آذر ۱۴۰۴

۱- مثلث ABC، با اضلاع قائمه $AB = ۳$، $AC = ۴$ مفروض است. اگر نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند، آنگاه فاصلهٔ D تا ضلع AC کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۷}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۱۰}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۲- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD (شکل زیر)، $AB = ۲AD = CD = ۱۸$ است. اگر نیمسازهای زوایای B و C یکدیگر را در نقطه O قطع کنند، مساحت مثلث OBC کدام است؟



۱) ۳۰

۲) ۳۱/۲۵

۳) ۳۳/۷۵

۴) ۳۵

۳- در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B، همدیگر را در نقطهٔ D و همچنین امتداد CD، ضلع AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $A\hat{E}C = ۷۸^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۵۶ ۴) ۶۲

۴- برای رسم متوازی‌الاضلاعی به طول قطرهای ۴ و ۷، کدام یک از ترسیم‌های زیر را می‌توان به کار برد؟

۱) عمودمنصف یک پاره‌خط

۲) نیمساز یک زاویه

۳) خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن

۴) خطی موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن

۵- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد از خط d در صفحه قرار دارد. چند نقطه به فاصلهٔ ۴ واحد از A و ۱/۵ واحد از خط d در این صفحه می‌توان یافت؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱) نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

۲) اگر از هر رأس یک مثلث، خطی به موازات ضلع مقابل به آن رسم کنیم، در آن صورت عمودمنصف‌های اضلاع مثلث حاصل، همان ارتفاع‌های مثلث اولیه است.

۳) نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۴) اگر دو ضلع یک مثلث نابرابر باشند آنگاه ارتفاع متناظر با ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ارتفاع متناظر با ضلع کوچک‌تر.

۷- کدام قضیهٔ زیر را می‌توان به صورت یک قضیهٔ دوشرطی نوشت؟

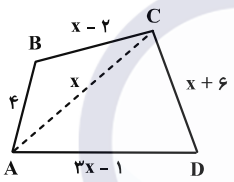
۱) هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

۲) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت برابر دارند.

۳) در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

۴) در هر مستطیل، اندازهٔ قطرها برابرند.

۸- در چهارضلعی شکل زیر برای طول قطر AC چند مقدار صحیح قابل قبول است؟



۱) ۱

۲) ۲

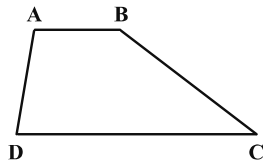
۳) ۳

۴) ۴

۹- عمودمنصف‌های دو ضلع AC و BC از مثلث ABC در نقطهٔ D همدیگر را قطع می‌کنند. اگر $DC = ۱۰$ و $AB = ۸\sqrt{۵}$ باشد، مساحت مثلث ABD کدام است؟

۱) $۲۰\sqrt{۵}$ ۲) $۴۰\sqrt{۵}$ ۳) ۸۰ ۴) ۴۰

۱۰- در ذوزنقهٔ شکل زیر، زوایای C و D حاده و رابطهٔ $AB + BC > CD$ برقرار است. در این صورت کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟



۱) $\hat{B} < ۲\hat{D}$

۲) $\hat{A} < ۲\hat{C}$

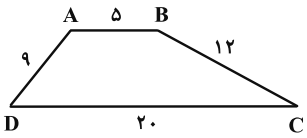
۳) $AD + CD > AB + BC$

۴) $BC + CD > AB + AD$

۱- در مثلث ABC، $AB = ۶$ و $AC = ۱۵$ است. اگر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC، برابر مجموع نصف اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع AC و $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع AB باشد، طول ضلع BC کدام است؟

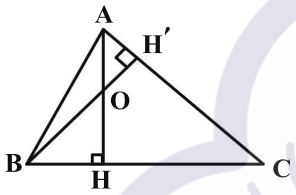
۱) ۱۰ ۲) ۱۱/۲۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵

۲- در ذوزنقهٔ شکل زیر، طول قطر BD کدام است؟



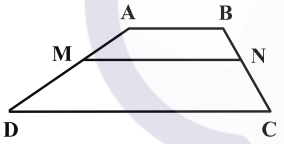
۱) ۱۲
۲) $۴\sqrt{۱۰}$
۳) ۱۳
۴) $۶\sqrt{۵}$

۳- در شکل زیر اگر $OH = OA = ۶$ و $CH = BH + ۱$ باشد، طول BH کدام است؟



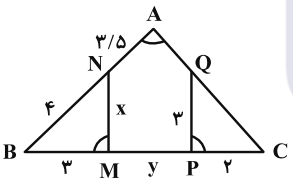
۱) ۶
۲) ۶/۷۵
۳) ۷/۵
۴) ۸

۴- در ذوزنقهٔ شکل زیر، MN موازی با قاعده‌ها رسم شده است. اگر $AM = NC$، $AD = ۶$ و $BC = ۳$ باشد، طول BN کدام است؟



۱) ۱/۲۵
۲) ۱
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۵

۵- در مثلث شکل زیر، اگر $\hat{A} = B\hat{M}N = C\hat{P}Q$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟

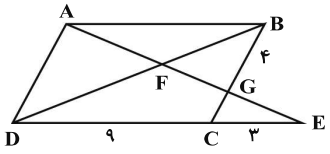


۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۶

۶- در مثلث ABC، نقطهٔ M وسط ضلع BC و $\hat{C} = B\hat{A}M$ است. اگر طول ضلع AC برابر ۶ باشد، طول AM چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

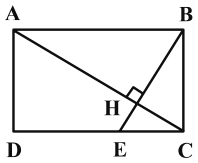
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۷- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، اندازهٔ AD کدام است؟



۱) $۵\frac{۱}{۳}$
۲) $۴\frac{۱}{۶}$
۳) $۵\frac{۲}{۳}$
۴) $۴\frac{۵}{۶}$

۸- در مستطیل زیر، نسبت طول به عرض برابر $\frac{۴}{۳}$ بوده و BE بر قطر AC عمود است. طول EH تقریباً چه کسری از طول AB است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

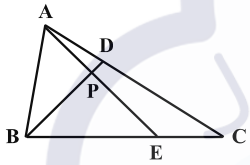
۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، $AB=۶$، $AC=۹$ و AH ارتفاع وارد بر وتر است. نسبت طول قطعات ایجاد شده روی ضلع AC توسط ارتفاع وارد بر آن در مثلث AHC کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

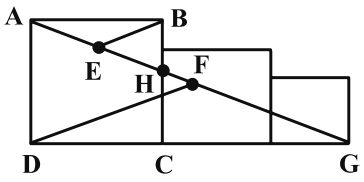
۱۰- در مثلث شکل زیر، اگر $\frac{CE}{BE}=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\frac{AP}{PE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱- در شکل زیر، سه مربع به اضلاع ۵، ۶ و ۷ کنار هم هستند. اگر $AE = EH$ و $AF = FG$ باشد نسبت $\frac{BE}{DF}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۷}$

۲) $\frac{۶}{۷}$

۳) $\frac{۷}{۱۸}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۲- وسط‌های اضلاع چهارضلعی ABCD را به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ ایجاد و از تقاطع نیمسازهای داخلی چهارضلعی $A'B'C'D'$، چهارضلعی $A''B''C''D''$ تشکیل شود. کدام جمله همواره درست است؟

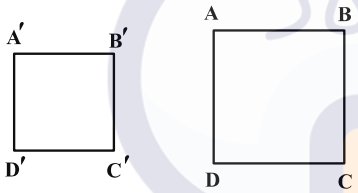
۱) چهارضلعی $A'B'C'D'$ مستطیل است.

۲) چهارضلعی $A''B''C''D''$ مربع است.

۳) محیط $A'B'C'D'$ برابر مجموع طول دو قطر ABCD است.

۴) محیط $A''B''C''D''$ برابر مجموع طول دو قطر $A'B'C'D'$ است.

۳- در شکل زیر، نسبت مساحت دو مربع برابر با ۲ است. فاصلهٔ رأس A' از قطر $B'D'$ چه کسری از طول ضلع مربع بزرگ‌تر است؟



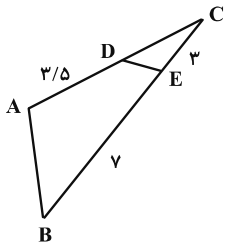
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۴- در شکل زیر، دو زاویهٔ DAB و DEB مکمل هم هستند. مساحت مثلث DEC چه درصدی از مساحت مثلث ABC است؟



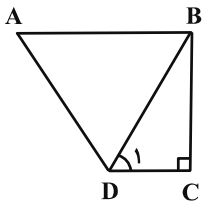
۱) ۱۵

۲) ۱۶

۳) ۱۸

۴) ۲۰

۵- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، قاعدهٔ بزرگ، هم‌اندازه با ساق مایل و اندازهٔ آن دو برابر طول قاعدهٔ کوچک است. زاویهٔ D_1 چند درجه است؟



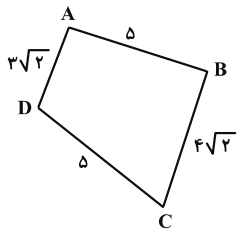
۱) ۴۵

۲) ۳۰

۳) ۷۵

۴) ۶۰

۶- در چهارضلعی ABCD، اگر وسط‌های اضلاع را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک مستطیل پدید می‌آید. مجموع فاصلهٔ محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD از وسط اضلاعش کدام است؟



۱) $۷+۲/۵\sqrt{۲}$

۲) $۵/۵+۳\sqrt{۲}$

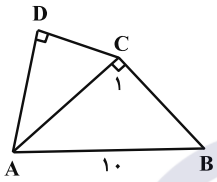
۳) $۵+۳/۵\sqrt{۲}$

۴) $۷/۵+۳\sqrt{۲}$

۷- اگر از تعداد رأس‌های یک n ضلعی، ۳ واحد کم کنیم، تعداد قطرهای آن نصف می‌شود. چند واحد به تعداد رأس‌های این n ضلعی اضافه کنیم تا تعداد قطرهای آن ۲/۵ برابر شود؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۸- در شکل زیر، $\hat{C}_۱ = \hat{D} = ۹۰^\circ$، $AB = ۱۰$ و $AC \times DC = AD \times BC$. اگر نسبت مساحت چهارضلعی ABCD به مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۴۱}{۲۵}$ باشد، محیط چهارضلعی ABCD کدام است؟



۱) ۲۷

۲) ۲۷/۲

۳) ۲۷/۴

۴) ۲۷/۶

۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} < ۳۰^\circ$)، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر هستند. اگر مساحت مثلث AHM، $\frac{۱}{۳۲}$ مجذور طول وتر BC باشد، اندازهٔ زاویهٔ B چند برابر زاویهٔ C است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۰- در چهارضلعی ABCD، امتداد اضلاع غیرمجاور AD و BC بر هم عمودند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن وسط‌های دو قطر چهارضلعی ABCD و وسط‌های اضلاع AB و CD برابر ۵ باشد، اندازهٔ AD×BC کدام است؟

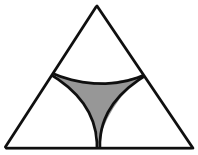
۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

آزمون هندسه یازدهم قلمچی ۱۸ مهر ۱۴۰۴

۱- در دایرهٔ گذرنده از سه رأس مثلث ABC، نقاط M، N و P را به ترتیب وسط کمان‌های AC، BC و AB اختیار می‌کنیم. اگر $P\hat{N}M = ۶۶^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

۲- در شکل زیر درون مثلث، سه قطاع دایره با شعاع برابر و دوبه‌دو بر هم مماس رسم شده است. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$ باشد، اندازهٔ محیط ناحیهٔ رنگی کدام است؟



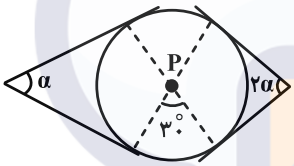
۱) π

۲) ۲π

۳) ۳π

۴) ۴π

۳- در شکل زیر اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۳۰

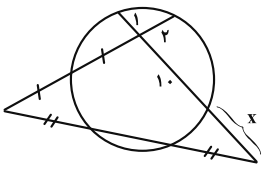
۴) ۴۰

۴- اگر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O , x)$ تا خط d برابر $۳ - ۲x$ باشد به ازای ..... خط و دایره ..... هستند.

۱) $x = \frac{۳}{۲}$ ، مماس ۲) $x = ۲$ ، بیرون از هم

۳) $x = ۳$ ، مماس ۴) $x = \frac{۷}{۲}$ ، متقاطع

۵- در شکل زیر مقدار x کدام است؟



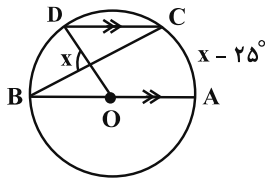
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۱۰

۴) ۱۵

۶- در شکل زیر وتر CD با قطر AB موازی است. اندازهٔ کمان CD چقدر است؟ (O مرکز دایره)



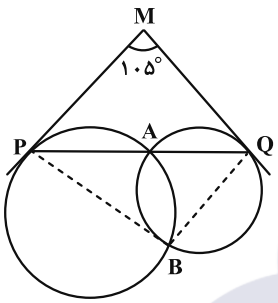
۱) ۸۰

۲) ۶۰

۳) ۵۰

۴) ۴۵

۷- دو دایرهٔ شکل زیر در نقاط A و B متقاطع‌اند. قاطع رسم شده از A، دو دایره را در نقاط P و Q قطع کرده و مماس‌های رسم شده در نقاط P و Q بر این دایره‌ها، در نقطهٔ M متقاطع هستند. اندازهٔ زاویهٔ PBQ چند درجه است؟



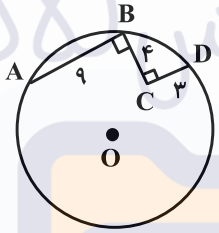
۱) ۷۵

۲) ۸۰

۳) ۸۵

۴) ۹۰

۸- در شکل زیر، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



۱) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۲}$

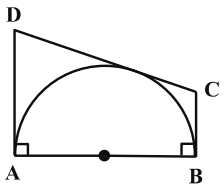
۳) $۵\sqrt{۱۰}$

۴) $۹\sqrt{۲}$

۹- وتر AB درون یک دایره به شعاع $۳\sqrt{۱۷}$ و به فاصلهٔ $۴\sqrt{۲}$ از مرکز آن واقع است. نقطه M روی وتر AB و به فاصلهٔ ۹ واحد از مرکز دایره، این وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۰- در شکل زیر، $AB = ۱۶$ قطر نیم‌دایره بوده و پاره‌خط CD بر نیم‌دایره مماس است. اگر محیط ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD برابر ۵۰ واحد باشد، مساحت این ذوزنقه چند واحد مربع است؟



۱) ۱۳۲

۲) ۱۱۲

۳) ۱۲۰

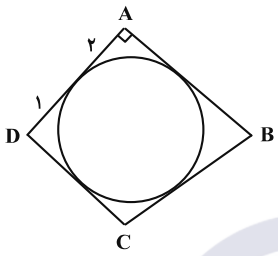
۴) ۱۳۶

آزمون هندسه یازدهم قلمچی ۲ آبان ۱۴۰۴

۱- اگر دو دایرهٔ $C(O , n)$ و $C'(O' , 2n+1)$ که فاصلهٔ بین مرکزهای آن‌ها برابر $2n+5$ است، دارای چهار مماس مشترک باشند، آن‌گاه مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۲- اگر در شکل زیر مساحت چهارضلعی ۲۰ واحد مربع باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۵

۲) ۶

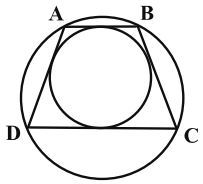
۳) ۷

۴) ۸

۳- زاویهٔ بین دو مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های $2\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2}$ برابر α درجه است، اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر $3\sqrt{6}$ باشد، در این صورت مقدار α کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۴- در ذوزنقهٔ شکل زیر $CD = 4AB$ است. اگر مساحت ذوزنقه برابر ۱۰ واحد مربع باشد، فاصلهٔ دو قاعدهٔ AB و CD، از یکدیگر برابر با کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$

۲) ۲

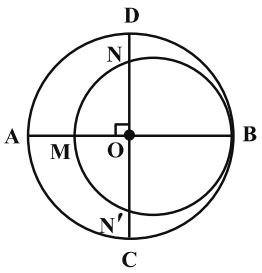
۳) $2\sqrt{2}$

۴) $4\sqrt{2}$

۵- در مثلث ABC، طول اضلاع AB، AC و BC به ترتیب برابر ۸، ۱۵ و ۱۷ است. طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس بر BC چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) $17\sqrt{2}$ ۴) $24\sqrt{2}$

۶- دو دایره در نقطهٔ B بر هم مماس بوده و $OM = AM$ می‌باشد. اگر $DN = ۴$، در این صورت تفاضل شعاع‌های دو دایره برابر کدام است؟ (O مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر است.)



۱) $۲-\sqrt{۲}$

۲) $۲+\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}-۱$

۴) $\sqrt{۲}+۱$

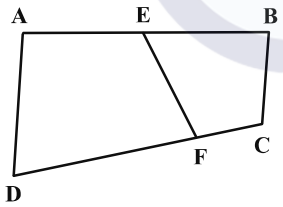
۷- طول ارتفاع‌های مثلثی، ۵، ۷/۵ و ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۳}$

۸- نسبت مساحت هشت‌ضلعی منتظم محیط بر یک دایره به مساحت هشت‌ضلعی منتظم محاط در همین دایره چقدر است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $۴-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۵-۳\sqrt{۲}$

۹- در شکل زیر نقاط E و F روی اضلاع چهارضلعی ABCD قرار دارند. اگر هر دو چهارضلعی کوچک‌تر محاطی باشند، در مورد چهارضلعی ABCD کدام جمله همواره درست است؟



۱) نیمساز زوایای داخلی آن همرس‌اند.

۲) عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس‌اند.

۳) دو ضلع موازی دارد.

۴) دو زاویهٔ برابر دارد.

۱۰- دو دایره با شعاع R و R' مماس خارج‌اند. مماس مشترک داخلی این دو دایره، مماس مشترک‌های خارجی را در نقاط M و N قطع می‌کند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) $R+R'$ ۲) $۲\sqrt{RR'}$ ۳) $\sqrt{R^۲+R'^۲}$ ۴) $\frac{۲RR'}{R+R'}$

آزمون هندسه یازدهم قلمچی ۱۶ آبان ۱۴۰۴

۱- نقطهٔ A در صفحه مفروض است. تناظر M به صورت زیر تعریف شده است. کدام گزینه در مورد M صحیح است؟

- اگر نقطهٔ B روی A منطبق باشد، آن‌گاه $M(B) = A$
- اگر نقطهٔ B روی A منطبق نباشد، آن‌گاه $M(B) = B'$ به‌طوری که نقطهٔ A وسط پاره خط BB' است.

۱) M تبدیل نیست.

۲) M یک تبدیل است ولی طولپا نیست.

۳) M یک تبدیل طولپاست و فقط یک نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۴) M یک تبدیل طولپاست و بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۲- کدام گزینه نادرست است؟

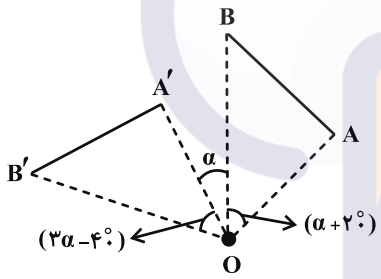
۱) انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

۲) در دوران، شکل و تصویر آن هم‌نهشت هستند.

۳) بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند.

۴) بازتاب نسبت به یک خط، بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۳- در شکل زیر، نقاط A و B با دوران به مرکز O و با زاویهٔ یکسان روی A' و B' تصویر می‌شوند، زاویهٔ این دوران چند درجه است؟



۱) ۱۳۰

۲) ۸۰

۳) ۷۰

۴) ۵۰

۴- یک شش‌ضلعی منتظم را با برداری به اندازهٔ نصف طول ضلع و در راستای یکی از اضلاع آن انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ محدود بین شکل و تصویرش، چه کسری از مساحت شش‌ضلعی است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵- نقطهٔ دلخواه P درون مستطیل ABCD به ابعاد ۲ و ۳ را نسبت به همهٔ اضلاع بازتاب می‌دهیم تا نقاط A'، B'، C' و D' به دست آید. مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۶- نقطه‌های $A'(-۲,۰)$ و $B'(-۶,۳)$ به ترتیب دوران یافته‌های دو نقطهٔ $A(۳,۲)$ و $B(۶,۶)$ در دوران به مرکز O و زاویهٔ α هستند. مختصات نقطهٔ O کدام است؟

۱) $(۱/۵,-۱/۵)$ ۲) $(-۱,۷)$

۳) $(۱,۷)$ ۴) $(-۱/۵\ ,\ ۱/۵)$

۷- نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,۴)$ قرار دارد. از O به A وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' حاصل شود و سپس دایرهٔ C را به مرکز A' و تحت زاویهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایرهٔ C' حاصل شود. اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۸\sqrt{۲}$

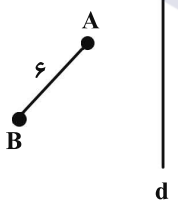
۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸- نقطهٔ A' بازتاب یافتهٔ نقطهٔ $A(۳\ ,\ ۵)$ نسبت به خط با معادلهٔ $x-\sqrt{۳}y=۰$ را نسبت به محور x ها بازتاب می‌دهیم و تصویر را A'' می‌نامیم. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۴}$ ۲) $\sqrt{۳۵}$

۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳۷}$

۹- پاره‌خط AB را مطابق شکل زیر نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم، اگر زاویهٔ امتداد پاره‌خط AB با محور بازتاب برابر ۴۵° و فاصلهٔ A تا محور بازتاب برابر ۶ باشد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟



۱) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

۲) $۹(۲\sqrt{۲}+۱)$

۳) $۱۸(\sqrt{۲}+۱)$

۴) $۱۸(۲\sqrt{۲}+۱)$

۱۰- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از خط d قرار دارد. این نقطه را توسط برداری به طول ۴ در راستای خط d و به سمت راست به نقطهٔ B منتقل می‌کنیم. تصویر نقطهٔ B تحت بازتاب نسبت به خط d را C می‌نامیم. اگر D دوران یافتهٔ نقطهٔ A با دوران به مرکز C و زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، طول پاره‌خط AD کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۲۶}$ ۳) ۱۰ ۴) ۸

آزمون هندسه یازدهم قلمچی ۳۰ آبان ۱۴۰۴

۱- چند تا از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) تبدیل همانی، همواره طولپاست.

ب) تنها در حالتی که ضریب تجانس $k=1$ باشد، تجانس طولپاست.

ج) انتقال غیرهمانی، نمی‌تواند نقطهٔ ثابت تبدیل داشته باشد.

د) اگر در یک تجانس با ضریب تجانس k، $|k|=1$ باشد، آنگاه این تجانس، تبدیل همانی است.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) همگی درست هستند.

۲- مربعی به ضلع a در تجانس نسبت به یک رأس آن و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ به مربعی تصویر شده است. اگر مساحت ناحیهٔ غیرمشترک بین این دو مربع برابر با ۳۲ باشد، محیط مربع اولیه کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۳- یک مربع به مرکز O و طول ضلع ۴ مفروض است. نقطهٔ M خارج این مربع طوری قرار دارد که OM بر ضلع مربع عمود بوده و اندازه‌اش برابر ۵ است. در یک تجانس به مرکز M و نسبت تجانس ۳، بیشترین فاصلهٔ نقاط مربع اولیه تا نقاط مربع حاصل از تبدیل تجانس کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳۳}$ ۲) $۲\sqrt{۶۶}$ ۳) $۲\sqrt{۹۷}$ ۴) $۸\sqrt{۶}$

۴- دایرهٔ $C'(O', r')$ متجانس دایرهٔ $C(O,r)$ با نسبت تجانس $k=\frac{۳}{۲}$ است. این دو دایره با اندازهٔ خط‌المرکزین ۱۰ مماس خارج هستند. یکی از مماس‌های مشترک خارجی این دو دایره را رسم کرده و محل تماس این مماس مشترک با دایره‌ها را T و T' می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $TOO'T'$ کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۲۰\sqrt{۶}$ ۳) $۱۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲۵\sqrt{۶}$

۵- اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ برابر ۲ و ۶ و ارتفاع آن ۶ است. اگر در دو تجانس به نسبت‌های ۳ و (-۳)، قاعدهٔ کوچک بر قاعدهٔ بزرگ تصویر شود، فاصلهٔ بین مراکز تجانس کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

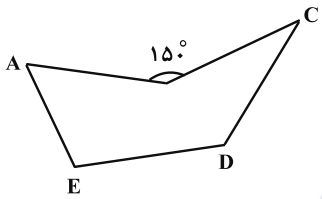
۶- دو دایرهٔ $C(O,۳)$ و $C'(O', \frac{۳}{۲})$ با طول خط‌المرکزین $OO'=۱$ مفروض اند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم این دو دایره از مرکز تجانس معکوس آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۷- فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -۱$ باشد. مساحت ناحیهٔ مشترک بین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸- طول همهٔ اضلاع شکل زیر با هم برابرند. اگر بتوانیم بدون تغییر محیط، مساحت شکل را به اندازه‌ای افزایش دهیم که عدد محیط با عدد مساحت اضافه شده، برابر شود، در این صورت طول هر ضلع برابر با کدام است؟



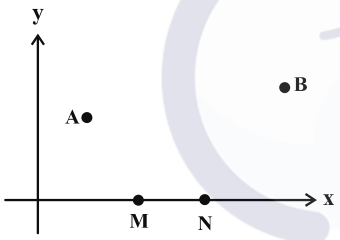
۱) ۵

۲) ۶

۳) ۱۰

۴) ۱۲

۹- نقاط A(۲,۶) و B(۱۳,۹) در دستگاه مختصات داده شده‌اند. می‌خواهیم پاره‌خط MN به طول a را روی محور x ها طوری انتخاب کنیم که طول مسیر شکستهٔ AMNB برابر ۲۰ و کمترین مقدار ممکن باشد. مقدار a کدام است؟



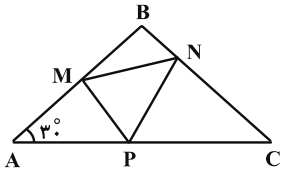
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۰- در مثلث متساوی‌الساقین شکل زیر (AB = BC)، نقطهٔ M وسط ضلع AB و نقطهٔ N روی ضلع BC طوری قرار گرفته است که $BC = ۴BN$. اگر $AC = ۱۰$ و نقطهٔ P روی قاعدهٔ AC به گونه‌ای قرار داشته باشد که محیط مثلث PMN حداقل مقدار ممکن باشد، اختلاف طول دو پاره‌خط AP و PC چقدر است؟



۱) ۲/۵

۲) ۲

۳) ۱/۵

۴) ۱

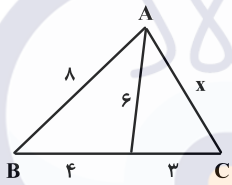
۱- در مثلث ABC به اضلاع $AB=۶$، $AC=۸$ و $BC=۱۰$، روی ضلع AC و در خارج آن، مربع ADEC را رسم می‌کنیم. اگر O محل برخورد قطرهای این مربع و M وسط ضلع BC باشد طول OM کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۷}$ ۲) ۷ ۳) $\sqrt{۶۵}$ ۴) ۹

۲- در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ میانهٔ وارد بر ساق و ارتفاع وارد بر قاعده به ترتیب برابر ۲ و ۳ می‌باشد. اندازهٔ مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\sqrt{۸}$

۳- در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



۱) ۵

۲) ۵/۵

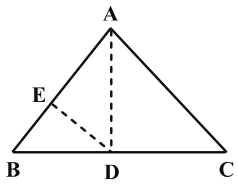
۳) ۶

۴) ۷

۴- در مثلث ABC به اضلاع $AB=۱۰$ و $AC=۶$، رابطهٔ $۲\sin\hat{A}=۳\sin\hat{B}$ برقرار است. طول نیمساز داخلی بزرگ‌ترین زاویهٔ این مثلث کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳۰}$

۵- در مثلث ABC به اضلاع $AB=۶$، $AC=۸$ و $BC=۷$، AD نیمساز زاویهٔ A و DE نیمساز زاویهٔ ADB است. اندازهٔ AE کدام است؟



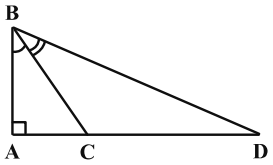
۱) ۵

۲) ۴/۵

۳) ۴

۴) ۳

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $CD = ۴AC = ۴$ است. اگر $C\hat{B}D = ۲A\hat{B}C$ باشد اندازهٔ BC کدام است؟



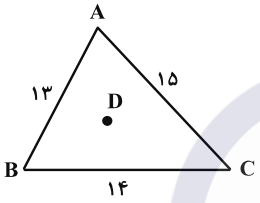
۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۶}$

۷- در مثلث زیر فاصلهٔ نقطهٔ D از هر دو ضلع AB و BC برابر ۳ است. فاصلهٔ نقطهٔ D از ضلع AC کدام است؟



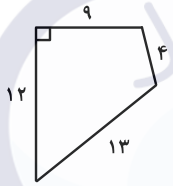
۱) ۴/۸

۲) ۵/۲

۳) ۵/۸

۴) ۶/۴

۸- مساحت چهارضلعی شکل زیر چقدر است؟



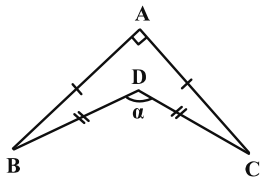
۱) ۶۴

۲) ۶۸

۳) ۷۲

۴) ۷۸

۹- در شکل زیر، رابطهٔ $\frac{AB^۲}{BD^۲} = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برقرار است، اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟ ($DB = DC$ و $AB = AC$)



۱) ۱۰۵

۲) ۱۲۰

۳) ۱۳۵

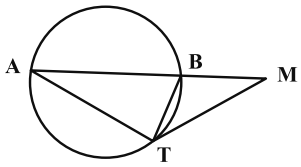
۴) ۱۵۰

۱۰- مثلث ABC با زاویهٔ $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و اضلاع $AB = x + ۲$ و $AC = x + ۳$ مفروض است. اگر اندازهٔ نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ برابر x باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

آزمون هندسه یازدهم قلمچی ویژهٔ ۲۱ آذر ۱۴۰۴

۱- در شکل زیر MT در نقطهٔ T بر دایره مماس است. اگر $BM = BT$ و $AB = AT$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ATM چند درجه است؟



۱) ۱۳۲

۲) ۱۲۰

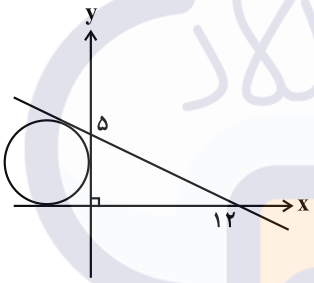
۳) ۱۱۲

۴) ۱۰۸

۲- در دایره‌ای به شعاع R، یک هشت‌ضلعی منتظم به مساحت ۴ محاط کرده‌ایم. مقدار R کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt[۴]{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۳- در شکل مقابل شعاع دایره کدام است؟



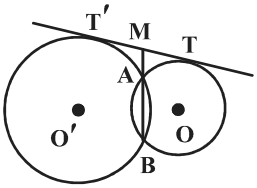
۱) $۳\sqrt{۲}$

۲) ۳

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) ۴

۴- در شکل زیر فاصلهٔ مراکز دو دایرهٔ متقاطع برابر $OO' = ۱۲$ است. وتر مشترک $AB = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا مماس مشترک خارجی TT' را در نقطهٔ M قطع کند. اگر $AM = ۳$ باشد، اختلاف اندازهٔ شعاع‌های دو دایره کدام است؟



۱) ۴

۲) $۲\sqrt{۳}$

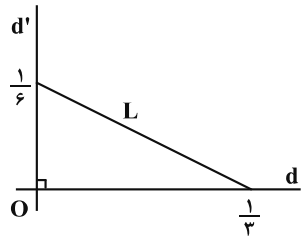
۳) ۶

۴) $۴\sqrt{۲}$

۵- بازتاب نقطهٔ $A(۲,۴)$ نسبت به محور xها را A' می‌نامیم. اگر تصویر نقطهٔ A تحت دوران به مرکز نقطهٔ A' و با زاویهٔ ۱۲۰° را A'' بنامیم، اندازهٔ پاره‌خط AA'' چقدر است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

۶- در شکل مقابل خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $k=۷$ بر خط L' تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین خط L و L' و خطوط d و d' کدام است؟

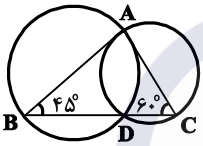


۱) ۱/۵ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۷- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ با قاعده‌های $AB=۴$ و $CD=۱۰$ و مساحت ۳۵ مفروض است. اگر M نقطهٔ دلخواهی روی قاعدهٔ CD باشد، کم‌ترین مقدار $MA+MB$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۱۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲۹}$ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۸- در شکل زیر، دو دایره در نقاط A و D متقاطع‌اند. اگر BC از نقطهٔ D بگذرد، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

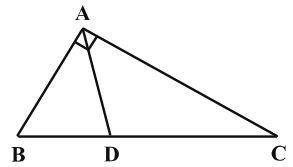


۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۲۵

۹- مثلث ABC به طول اضلاع $AB=۹$، $AC=۷$ و $BC=۴$ مفروض است. اگر نقطهٔ M وسط ضلع AB باشد، فاصلهٔ M از ضلع BC چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۲۵

۱۰- نیمساز زاویهٔ قائمهٔ A از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، وتر BC را به دو قسمت به طول‌های ۲ و ۱ واحد تقسیم می‌کند. اندازهٔ نیمساز AD برابر کدام است؟



۱) $۰/۸\sqrt{۱۰}$

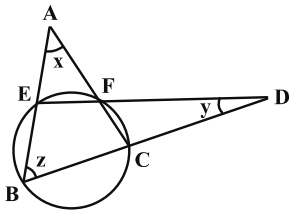
۲) $۰/۴\sqrt{۱۰}$

۳) $۱/۲\sqrt{۵}$

۴) $۰/۶\sqrt{۵}$

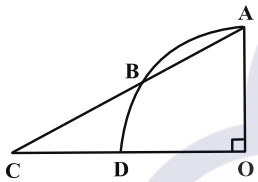
آزمون هندسه یازدهم قلمچی ۲۸ آذر ۱۴۰۴

۱- در دایرهٔ شکل زیر $x+y=63^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ z چند درجه است؟



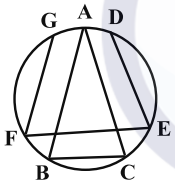
۱) ۵۸/۵
۲) ۵۹
۳) ۵۹/۵
۴) ۶۰

۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، ربع دایره (به مرکز O و شعاع OA) وتر AC و ضلع OC را به ترتیب در نقاط B و D قطع کرده است. اگر $AB=8$ و $BC=5$ باشد، طول CD کدام است؟



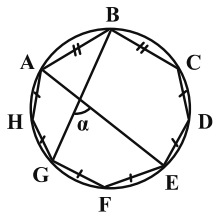
۱) $2\sqrt{3}$
۲) ۴
۳) $\sqrt{15}$
۴) $\sqrt{13}$

۳- در دایرهٔ شکل زیر $GF \parallel AC$، $AB \parallel DE$ و $BC \parallel EF$ است. اگر $\hat{A}=30^\circ$، $\overset{\frown}{DE}=40^\circ$، $\frac{1}{3}\overset{\frown}{FG}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ باشد. زاویهٔ F چند درجه است؟



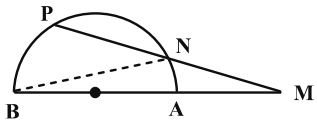
۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۴- در دایرهٔ شکل زیر به شعاع R می‌دانیم $AB=BC=R$ و $CD=DE=EF=FG=GH=HA$. اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟



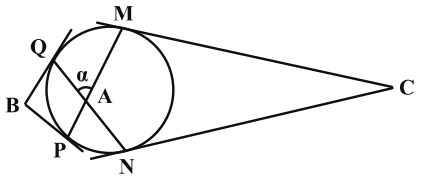
۱) ۶۰
۲) ۶۵
۳) ۷۰
۴) ۷۵

۵- در نیم‌دایرهٔ شکل زیر به قطر AB، اگر $MN=BN$ و $AB=\sqrt{2}PN$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ M چند درجه است؟



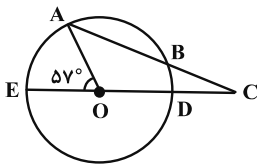
۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۲/۵

۶- در شکل زیر، اضلاع دو زاویهٔ B و C بر دایره مماس‌اند و اندازهٔ زاویه B دو برابر اندازهٔ زاویهٔ C است. مقدار $\overset{\frown}{MN} - \overset{\frown}{PQ}$ چند برابر α است؟



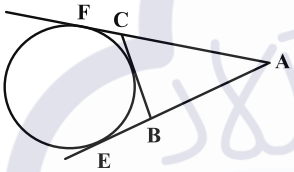
۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۷- در شکل زیر، O مرکز دایره و $A\hat{O}E = ۵۷^\circ$ و $\overset{\frown}{AB} = ۱۰۴^\circ$ می‌باشد، نسبت $\frac{BC}{ED}$ کدام است؟



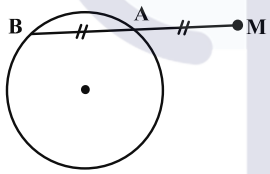
۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۸- در دایرهٔ شکل زیر، $AE = ۴$، $BC = \frac{۲}{۵}$، محیط مثلث ABC کدام است؟



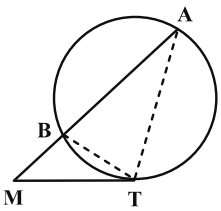
۱) ۲۰
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۴

۹- در شکل زیر، $MA = AB = R$ است. نسبت بیشترین فاصلهٔ M تا نقاط دایره به کمترین فاصلهٔ M تا نقاط این دایره کدام است؟ (شعاع دایره برابر R است.)



۱) $۱+۲\sqrt{۳}$
۲) $۲+۲\sqrt{۳}$
۳) $۱+\sqrt{۳}$
۴) $۲+\sqrt{۳}$

۱۰- در شکل زیر، از نقطهٔ M بر دایرهٔ $C(O, R)$ مماس MT را رسم کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث MBT برابر ۳۰ و $۳MB = ۲MT$ باشد، مساحت مثلث ABT کدام است؟

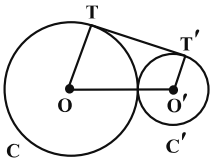


۱) ۶۷/۵
۲) ۶۰
۳) ۴۵
۴) ۳۷/۵

۱- یک دوازده‌ضلعی منتظم با مساحت ۱۲ مفروض است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۲- دو دایرهٔ C و C' به ترتیب با شعاع‌های ۴ و ۲ واحد مماس بیرونی‌اند و TT' مماس مشترک خارجی آن‌ها است. مساحت ذوزنقهٔ $OTT'O'$ چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

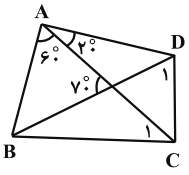
۳- دو دایرهٔ متخارج به شعاع‌های ۳ و ۸ و طول خط‌المرکزین ۲۲ مفروض‌اند. مماس مشترک داخلی دو دایره، خط‌المرکزین را به دو قطعه تقسیم می‌کند. طول قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۴- مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس بیرون $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ به ترتیب در نقاط T و T' بر آن‌ها مماس است. اگر محل برخورد دو پاره‌خط $O'T$ و OT' روی دایرهٔ کوچک‌تر باشد، مقدار $\frac{r}{r'}$ کدام است؟ $(r > r')$

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

۵- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. حاصل $\hat{C}_۱ + \hat{D}_۱$ چند درجه است؟



۱) ۱۰۰
۲) ۱۱۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۰

۶- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین نیمسازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس هستند. اگر مجموع فواصل این نقطه از اضلاع ذوزنقه برابر ۱۲ باشد، اندازهٔ واسطه هندسی طول دو قاعدهٔ این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۶

۷- اعداد $x+۳$، $۲x+۳$، $۳x-۲$ و $x+۱$ به ترتیب طول اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی هستند. محیط این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۲

۸- نقطهٔ M روی نیمساز داخلی زاویهٔ A از مثلث ABC به گونه‌ای قرار دارد که $BM = MC$ است. اگر $\hat{A} + B\hat{C}M = ۸۷^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BMC چند درجه است؟

۱) ۹۳ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۲۲ ۴) ۱۲۷

۹- طول ارتفاع‌های مثلثی ۴/۸، ۶ و ۸ است. اگر اندازهٔ دو تا از شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث ۴ و ۶ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی دیگر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۰- یک ذوزنقه داریم که هم محیطی است و هم محاطی و یک زاویه ۱۲۰ درجه نیز دارد. اگر شعاع دایرهٔ محاطی آن r باشد، مساحت ذوزنقه چند برابر $r^۲$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

آزمون هندسه 11 قلمچی 24 بهمن

۱- چند تا از گزاره‌های شرطی زیر را می‌توان به صورت قضیهٔ دوشرطی بیان کرد؟

* اگر یک تبدیل طولپا باشد، آنگاه جهت شکل را حفظ می‌کند.

* اگر در یک تبدیل تصویر هر نقطه بر خودش منطبق شود، آنگاه آن تبدیل بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

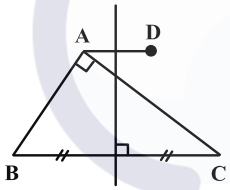
* اگر T تبدیل بازتاب و $T(A)$ تبدیل یافته نقطهٔ A باشد آنگاه برای تبدیل T، رابطهٔ $T(T(A)) = A$ برقرار است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲- مربع $ABCD$ را حول مرکزش، با زاویهٔ ۲۰درجه در جهت ساعتگرد دوران می‌دهیم تا بر مربع $A'B'C'D'$ تصویر شود. اندازهٔ زاویهٔ $A'AB$ چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۳- رأس A از مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر را نسبت به عمودمنصف وتر BC بازتاب داده‌ایم تا به D برسیم. مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ چقدر است؟ ($AB = ۳$ و $AC = ۴$)



۱) ۶/۴۸

۲) ۵/۴۴

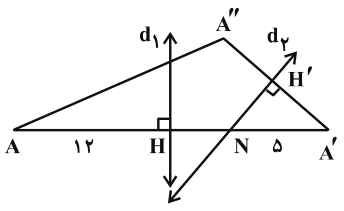
۳) ۷/۶۸

۴) ۶/۱۲

۴- اگر A نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ $C(O,۲)$ باشد، مساحت ناحیهٔ محدود به دایرهٔ C و دوران یافتهٔ آن به مرکز A و زاویهٔ ۹۰° کدام است؟

۱) $\pi - ۲$ ۲) $۴ - \pi$ ۳) $۲\pi - ۴$ ۴) $۸ - ۲\pi$

۵- در شکل زیر A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط $d_۱$ و A'' بازتاب نقطهٔ A' نسبت به خط $d_۲$ است. اگر مساحت مثلث $NA'H'$ برابر با ۵ باشد، طول پاره‌خط AA'' کدام است؟ ($A'N = ۵$ ، $AH = ۱۲$ و زاویهٔ حادهٔ $A'\hat{N}H'$ بیشتر از ۴۵° است.)



۱) $۴\sqrt{۱۷}$

۲) ۱۶

۳) $۴\sqrt{۱۵}$

۴) $۱۲\sqrt{۲}$

۶- فرض کنید A نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. اگر A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور xها، A'' بازتاب نقطهٔ A' نسبت به نیمساز ربع اول و سوم و $T(A) = A''$ باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد تبدیل T درست است؟

۱) بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد.
۲) شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.
۳) طولپا نیست.
۴) جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

۷- مثلثی با طول اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را نسبت به ارتفاع وارد بر ضلع متوسط بازتاب می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ محصور بین مثلث و تصویرش برابر کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۸۴

۸- لوزی با یک زاویهٔ ۳۰ درجه را با برداری به طول یک سوم قطر بزرگ و در راستای آن انتقال می‌دهیم. اگر مساحت بین لوزی و تصویرش ۲ باشد، طول ضلع این لوزی کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۴/۵ ۴) ۶

۹- اگر دوران یافتهٔ نقطهٔ A، حول نقطهٔ O و به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha < ۶۰^\circ$، نقطهٔ B و دوران یافتهٔ B با همان دوران، نقطهٔ C و دوران یافتهٔ C با همان دوران، نقطهٔ D باشد و $AD = \sqrt{۳}OA$ و اندازهٔ زاویهٔ BCD برحسب رادیان به صورت $\frac{m\pi}{n}$ باشد که در آن m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول هستند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۰- در مثلثی با طول اضلاع ۹، ۱۲ و ۱۵ طول کوتاه‌ترین بردار انتقال که مرکز ثقل مثلث را بر ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث تصویر کند، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵

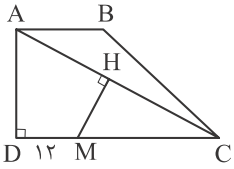
۱ – دو نقطهٔ متمایز **P** و **Q** را در صفحه در نظر بگیرید. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از **P** به فاصلهٔ ۳ و از **Q** به فاصلهٔ ۴ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای طول پاره‌خط **PQ** کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲ – در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که در آن $\hat{A} = ۹۰^\circ$، نقطهٔ **P** واقع بر ضلع **AB** از وتر و رأس زاویهٔ قائمه به یک فاصله است. اگر در این مثلث $\hat{B} = ۴\hat{C}$، آن‌گاه زاویهٔ حادهٔ بین **CP** و ضلع **AB** چند درجه است؟

۱) ۸۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۶۷/۵

۳ – در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ **ABCD**، عمودمنصف قطر **AC**، قاعدهٔ **CD** را در نقطهٔ **M** قطع کرده است. اگر $DM = ۱۲$ و $AD = \frac{۱}{۳}CD$ باشد، اندازهٔ قطر **AC** کدام است؟



۱) ۳۶ ۲) $۱۸\sqrt{۳}$

۳) ۲۷ ۴) $۹\sqrt{۱۰}$

۴ – در مثلث متساوی‌الساقین **ABC** $(AB = AC)$، نیمساز خارجی زاویهٔ **C**، امتداد ضلع **AB** را در نقطهٔ **D** قطع می‌کند. اگر $BC = CD$، آن‌گاه زاویهٔ **BAC** چند درجه است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۵

۵ – از هر رأس مثلث **ABC**، خطی موازی با ضلع مقابل به همان رأس رسم می‌کنیم. از تقاطع این سه خط، مثلث **MNP** تشکیل می‌شود، کدام گزینه درست است؟

۱) ارتفاع‌های مثلث MNP، عمودمنصف‌های مثلث ABC هستند.
۲) ارتفاع‌های مثلث MNP، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC هستند.
۳) ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث MNP هستند.
۴) ارتفاع‌های مثلث ABC، میانه‌های مثلث MNP هستند.

۶ – طول اضلاع یک مثلث n، $n-۱$ و $n^۲-۱$ است. حدود مقادیر **n** کدام است؟

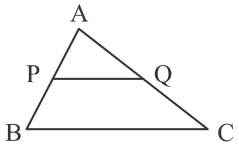
۱) $n > \sqrt{۲}$ ۲) $۱ < n < \sqrt{۳}$

۳) $۱ < n < \sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲} < n < ۲$

۱- در مثلث ABC با اضلاع $a=۳$ و $b=۶$، اگر $۳h_c = h_b + ۲h_a$ باشد، آن‌گاه محیط مثلث کدام است؟ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع $BC=a$ است.)

۱) ۱۱/۸ ۲) ۱۲/۶ ۳) ۱۲/۸ ۴) ۱۳/۲

۲- در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. حاصل $\frac{۳BP-۲CQ}{۳AP-۲AQ}$ کدام است؟

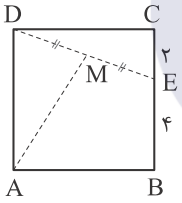


۱) $\frac{BC}{PQ}$ ۲) $\frac{PQ}{BC}$ ۳) $\frac{۳PQ}{۲BC}$ ۴) $\frac{BC}{PQ}-۱$

۳- در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{A}=\hat{A}'$ ، $\hat{B}=\hat{B}'$ و $AB<A'B'$ و نسبت مساحت آن‌ها $\frac{۲۵}{۶۴}$ است. اگر M و M' به ترتیب وسط‌های BC و $B'C'$ باشند، نسبت $\frac{A'M'}{AM}$ کدام است؟

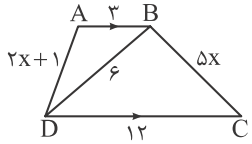
۱) ۱/۶ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) ۳/۲ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۴- در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مربع و M وسط DE است. طول AM کدام است؟



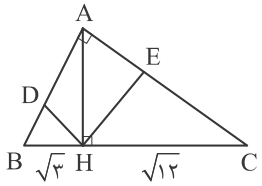
۱) $\sqrt{۳۴}$
۲) $\sqrt{۳۰}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۵- محیط ذوزنقه در شکل مقابل کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل، AH ارتفاع وارد بر وتر، DH نیمساز زاویهٔ $\widehat{AHB}$ و EH نیمساز زاویهٔ AHC است. نسبت $\frac{EH}{DH}$ برابر با کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱ – تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای، چهار برابر تعداد نقاط درونی آن است. مساحت این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

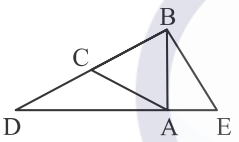
۲ – تعداد قطرهایی که از سه رأس متوالی یک چندضلعی محدّب می‌گذرد ۲۶تا است. تعداد کل قطرهای این چندضلعی کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

۳ – در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول ساق ۵ و قاعده‌های ۳ و ۹، فاصلهٔ هر رأس قاعدهٔ بزرگ، از ساق مقابل آن، کدام است؟

۱) ۸/۴ ۲) ۱۰/۲ ۳) ۷/۲ ۴) ۹/۶

۴ – در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و مثلث ACD متساوی‌الساقین است. اگر $BE = \frac{۲}{۳}AD$، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث BDE به مساحت ABC کدام است؟

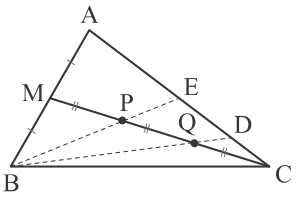


۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۵ – از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک چهارضلعی پدید می‌آید. اگر محیط این چهارضلعی دو برابر طول قطر مستطیل باشد، آن‌گاه نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۶ – مطابق شکل، نقاط P و Q میانهٔ CM را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند، نسبت $\frac{DE}{AC}$ برابر با کدام است؟



۱) ۰/۳
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۳۵

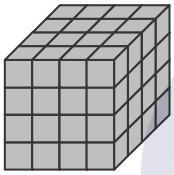
۱ - کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که با هر دو خط متنافر d و d' موازی باشد.
۲) اگر دو خط d و d' موازی صفحهٔ P باشند، آن‌گاه d و d' موازی هستند.
۳) اگر دو صفحهٔ P و P' موازی خط d باشند، آن‌گاه دارای فصل مشترکی موازی با d هستند.
۴) تمام صفحاتی که از نقطهٔ A خارج خط d ، موازی با این خط رسم می‌شوند، از خطی موازی با d عبور می‌کنند.

۲ - کدام گزینه نادرست است؟

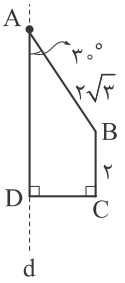
۱) اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در نقطهٔ تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه، عمود است.
۲) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، خطی در صفحهٔ اول وجود دارد که بر صفحهٔ دوم عمود است.
۳) اگر در فضا دو خط، بر خط سومی عمود باشند، دلیلی ندارد که آن دو خط با هم موازی باشند.
۴) در فضا، اگر خطی، یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۳ - تمام وجه‌های مکعب به ابعاد $۴\times۴\times۴$ در شکل زیر رنگ‌آمیزی شده است. تعداد مکعب‌های کوچکی که حداقل دو وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی شده است، کدام است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۳۲

۴ - مطابق شکل، قاعدهٔ بزرگ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ بر خط d واقع است. اگر این ذوزنقه را حول خط d دوران کامل دهیم، حجم شکل فضایی حاصل کدام است؟

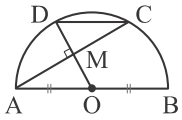


۱) ۶π
۲) ۷π
۳) ۸π
۴) ۹π

۵ - دو صفحهٔ موازی، کره‌ای به شعاع ۷ را قطع کرده‌اند. اگر مساحت مقطع‌های ایجادشده ۲۴π و ۴۸π باشد، بیشترین مقدار ممکن برای فاصلهٔ بین این دو صفحه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ - در نیم‌دایرهٔ شکل زیر، **CD** موازی با قطر **AB = ۶** رسم شده است. طول کمان **CD** کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲\pi}{۳}$
۳) π
۴) ۲π

۲ - مستطیلی به طول اضلاع ۵ و ۱۳ را در نظر بگیرید. طول قطر دایره‌ای که از دو سر یک ضلع بزرگ این مستطیل گذشته و بر دیگر ضلع بزرگ آن مماس است، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۳/۴۵

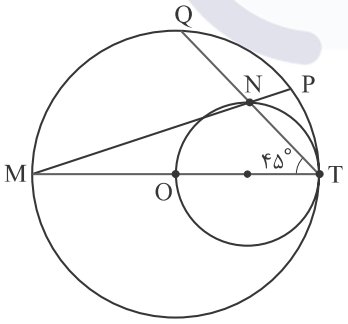
۳ - در مثلثی به طول اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷، مجموع قطر دایرهٔ محاطی داخلی و قطر دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۱۷
۲) ۲۰
۳) ۲۳
۴) ۳۰

۴ - در چهارضلعی محاطی **ABCD**، اگر $\hat{C} = ۸۰^\circ$ باشد، زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مقابل **B** و **D** کدام است؟

۱) ۱۵۰°
۲) ۱۶۰°
۳) ۱۷۰°
۴) ۱۴۰°

۵ - مطابق شکل، دو دایره در نقطهٔ **T** بر هم مماس‌اند و دایرهٔ کوچک‌تر، از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر می‌گذرد. اگر شعاع دایرهٔ کوچک ۵ باشد، طول **NP** کدام است؟

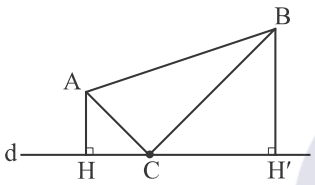


۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) $\sqrt{۱۰}$

۱ - کدام تبدیل می‌تواند همانی باشد؟

۱) انتقال با بردار غیرصفر
۲) دوران با زاویهٔ غیرصفر
۳) تجانس معکوس
۴) بازتاب

۲ - در شکل زیر فاصلهٔ نقاط A و B از خط d به ترتیب ۸ و ۲۰ است و نقطهٔ C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد. اگر $HH' = ۳۵$ باشد، مساحت مثلث ACH کدام است؟



۱) ۶۴
۲) ۵۶
۳) ۴۸
۴) ۴۰

۳ - در مستطیل ABCD، ضلع AB از ضلع $AD = ۴$ بزرگ‌تر است. نقطهٔ M روی ضلع CD قرار دارد و در انتقالی با بردار $\overrightarrow{CM}$، ناحیهٔ مشترک بین مستطیل و تصویرش یک مربع است. اگر $BM = ۵$، آن‌گاه مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

۱) ۲۸
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

۴ - مثلث ABC را که در آن $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است. حول رأس A با زاویهٔ ۴۰° دوران می‌دهیم تا مثلث $AB'C'$ ایجاد شود. زاویهٔ بین خطوط BB' و CC' کدام است؟

۱) ۲۰°
۲) ۵۰°
۳) ۶۰°
۴) ۸۰°

۵ - دایره‌ای را در تجانس به مرکز نقطه‌ای واقع بر آن تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس‌مشترک دایرهٔ اولیه و تصویرش در این تجانس، برابر با شعاع دایرهٔ تصویر باشد، نسبت تجانس کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۴
۴) -۴

آزمون هندسه دهم ماز 17 مهر

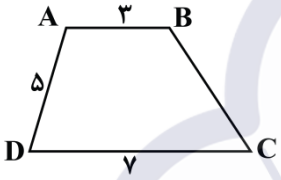
۱- در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطه دورترین فاصله را از ساحل دارد؟

۱) محل همرسی عمودمنصف‌ها
۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع‌ها
۴) محل همرسی میانه‌ها

۲- در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و $\sqrt{11}$، فاصلهٔ محل همرسی ارتفاع‌ها از محل همرسی عمودمنصف‌ها چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
۳) ۳
۴) $\frac{11}{2}$

۳- در ذوزنقهٔ ABCD که $AB \parallel DC$، $AB=3$، $AD=5$ و $DC=7$ است، اندازهٔ ضلع BC چند عدد طبیعی مختلف می‌تواند اختیار کند؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۴- در مثلث ABC، زاویهٔ بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر ۲۰° است. اگر بین زوایای مثلث رابطهٔ $\hat{A}=2\hat{B}+\hat{C}$ برقرار باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۰°
۲) ۱۱°
۳) ۱۲°
۴) ۱۳°

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC=5$ و $BC=6$ می‌باشد، فاصلهٔ محل همرسی عمودمنصف‌ها از قاعده چقدر است؟

۱) $\frac{5}{8}$
۲) $\frac{6}{8}$
۳) $\frac{7}{8}$
۴) ۱

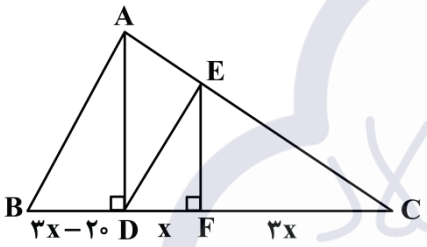
۱- در مثلث ABC، اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}$ و محیط مثلث ۱۸ باشد، حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟ (منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع a است.)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۶}$ ۳) $\frac{۱۹}{۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۶}$

۲- شخصی با قد ۱۶۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۴ متری از تیر چراغ برق به ارتفاع ۴/۸ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص روی زمین چند سانتی‌متر از قد شخص بیش‌تر است؟

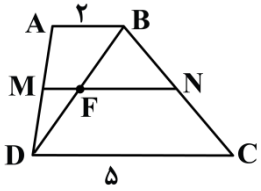
۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۰

۳- در مثلث ABC مطابق شکل $AB \| ED$ است، مساحت مثلث EFC چه کسری از مساحت مثلث ADC است؟



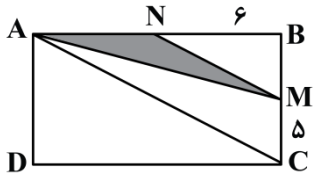
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۹}{۲۵}$
۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

۴- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل پاره‌خط MN موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم شده است، به‌طوری‌که توسط قطر DB به دو قسمت نامساوی، طوری تقسیم شده است که قطعهٔ بزرگ‌تر سه برابر قطعهٔ کوچک‌تر است. اندازهٔ پاره‌خط MN کدام است؟ $(NF > MF)$



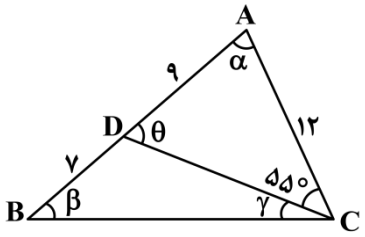
۱) $\frac{۴۰}{۱۱}$
۲) $\frac{۳۹}{۱۱}$
۳) $\frac{۲۰}{۱۱}$
۴) $\frac{۳۰}{۱۱}$

۵- در مستطیل ABCD مطابق شکل $NB=۶$ و $MC=۵$، اگر $N\hat{M}B = A\hat{C}M$ باشد، مساحت مثلث رنگ شده کدام است؟



۱) ۷/۵
۲) ۳۰
۳) ۱۵
۴) ۱۰

۱- **با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه الزاماً درست است؟**



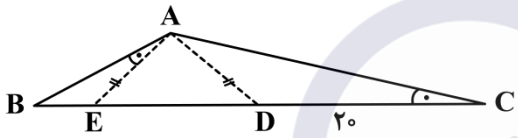
۱) $\gamma = ۲۵^\circ$

۲) $\theta = ۷۵^\circ$

۳) $\beta = ۵۵^\circ$

۴) $\alpha = ۶۵^\circ$

۲- **در شکل مقابل، $AE = AD$ و $B\hat{A}E = A\hat{C}D$ و همچنین ضلع AC دو برابر ضلع AB است، اگر $DC = ۲۰cm$ باشد، اختلاف اندازهٔ پاره‌خط‌های AE و BE کدام است؟**



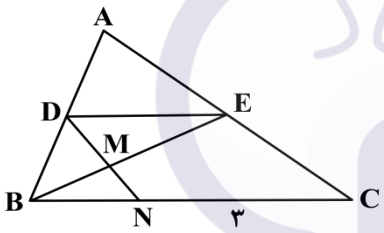
۱) $۵cm$

۲) $۴cm$

۳) $۶cm$

۴) $۱۰cm$

۳- **مطابق شکل، نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC بوده و $NC = ۳$ است، اگر $۳BM = ۲ME$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط DE کدام است؟**



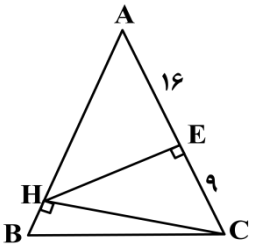
۱) ۲/۲۵

۲) ۱/۲۵

۳) ۱/۷۵

۴) ۲/۷۵

۴- **مطابق شکل مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB = AC)$ و CH ارتفاع وارد بر ساق است. اگر $AE = ۱۶$ و $EC = ۹$ باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BHC است؟**



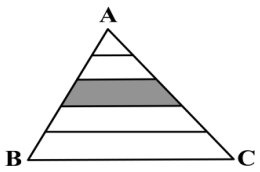
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۵- **در شکل مقابل، ضلع AB به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است و از هر یک خطوطی به موازات ضلع BC رسم شده است. اگر مساحت ذوزنقهٔ رنگ شده برابر $۲۰cm^۲$ باشد، مساحت کوچک‌ترین ذوزنقهٔ شکل کدام است؟**



۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۸

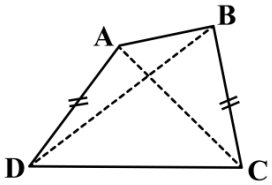
۴) ۱۶

۱- **یک $n+1$ ضلعی محدب را در نظر بگیرید. اگر دو رأس از این $n+1$ ضلعی کم کنیم از تعداد قطرهای آن ۱۱ واحد کم می‌شود. چه تعداد از گزاره‌های زیر دربارهٔ این $n+1$ ضلعی درست است؟**

الف) از هر رأس آن ۵ قطر می‌گذرد.
ب) مجموع زوایای داخلی آن 1080° است.
ج) مجموع تعداد اضلاع و قطرهای آن ۲۸ است.
د) مجموع زوایای خارجی آن 2700° است.

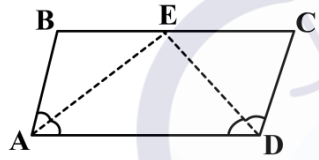
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- **در چهارضلعی ABCD مطابق شکل $AD=BC$ است. اگر وسط‌های دو قطر و وسط‌های اضلاع AB و DC را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی به‌دست آمده کدام ویژگی را حتماً دارد؟**



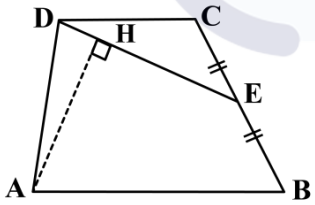
۱) قطرهای برابر دارد.
۲) اضلاع عمود بر هم دارد.
۳) قطرها عمودمنصف هم هستند.
۴) از برخورد نیمسازهای داخلی آن یک مربع ایجاد می‌شود.

۳- **در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل AE و DE نیمساز هستند، اگر $AE=\sqrt{5}$ و $DE=\sqrt{11}$ باشد، محیط متوازی‌الاضلاع ABCD کدام است؟**



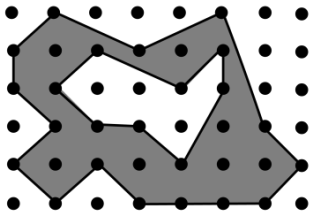
۱) ۸ ۲) ۱۲
۳) ۱۶ ۴) ۱۰

۴- **در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل، $AH\perp DE$ است. اگر $DE=6$ و مساحت ذوزنقه برابر ۴۸ باشد، طول پاره‌خط AH کدام ست؟**



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۵- **با توجه به مساحت چندضلعی شبکه‌ای، مساحت ناحیهٔ رنگ شده کدام است؟**

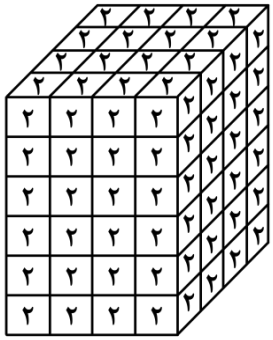


۱) ۱۷
۲) ۱۷/۵
۳) ۱۸
۴) ۱۸/۵

۱- نقطهٔ A خارج از دو خط متنافر d و d' قرار دارد، چند خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند؟

۱) دقیقاً یک خط
۲) بی‌شمار خط
۳) حداکثر یک خط
۴) چنین خطی وجود ندارد.

۲- یک مکعب‌مستطیل به ابعاد ۴، ۴ و ۶ از مکعب‌های ۱×۱×۱ تشکیل شده است و روی هر ۶ وجه بیرونی مکعب‌مستطیل و روی هر کدام از مربع‌های کوچک عدد ۲ نوشته شده است. این مکعب‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم. در چند مکعب از ۹۶ مکعب کوچک مجموع اعداد روی وجوه بزرگ‌تر از ۲ و کم‌تر از ۶ است؟

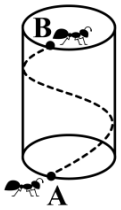


۱) ۱۶
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۲۸

۳- مکعب‌مستطیلی به ابعاد ۲، ۴ و ۶ را با صفحه‌ای که از کوچک‌ترین یال آن می‌گذرد طوری برش زده‌ایم که حجم مکعب‌مستطیل به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است. کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل از برش کدام است؟

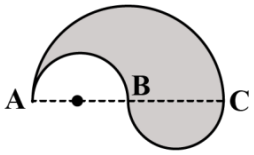
۱) ۱۰
۲) ۱۲/۵
۳) $۴\sqrt{۱۰}$
۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۴- استوانهٔ شکل مقابل را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از نقطهٔ A شروع به حرکت کند و پس از یک دور کامل دور استوانه، به نقطهٔ B دقیقاً در بالای نقطهٔ A برسد، اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه به ترتیب ۶ و ۵π باشند، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این مورچه چقدر است؟



۱) ۱۲π
۲) ۱۳π
۳) ۵π
۴) ۶۰π

۵- شکل مقابل، متشکل از ۳ نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ است. حجم حاصل از دوران این شکل هندسی حول محور AC کدام است؟



۱) $\frac{۲۸\pi}{۹}$
۲) $\frac{۸\pi}{۳}$
۳) $\frac{۳۲\pi}{۹}$
۴) $\frac{۲۸\pi}{۳}$

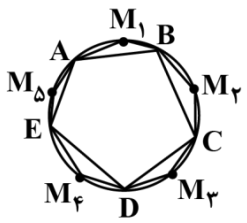
۱- اگر $A(۱,۲)$، $B(۲,۱)$ و $C(-۴,۱)$ مختصات رئوس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشند، شعاع دایرهٔ محیطی آن چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۲- کوچک‌ترین دایره‌ای که از نقطهٔ $A(۱,۲)$ گذشته و بر خط $x-۳y=۱۵$ مماس باشد، از کدام نقطهٔ زیر عبور می‌کند؟

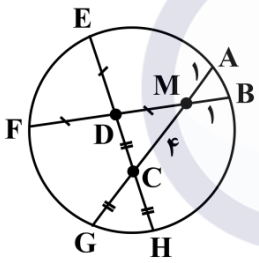
۱) $(۵,۰)$ ۲) $(۰,۵)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(۱,-۱)$

۳- در شکل زیر، تمام نقاط در شکل، روی محیط دایره واقع هستند. مجموع زوایای $\hat{M}_۱$ تا $\hat{M}_۵$ $(\sum_{i=۱}^{۵} M_i)$ کدام است؟



۱) ۵۴۰°
۲) ۶۳۰°
۳) ۷۲۰°
۴) ۹۰۰°

۴- در دایرهٔ مقابل، اگر $MA=MB=۱$، $MC=۴$، $DF=DM=DE$ و $CD=CG=CH$ باشد، آن‌گاه $DC-DE$ چقدر است؟



۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۵- نقطهٔ M خارج دایرهٔ C است. برای رسم دو مماس از نقطهٔ M بر دایره، از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنیم. برای این منظور، چند بار باید از پرگار استفاده کنیم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- در دایرهٔ $C(O,۶)$، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، ۲ برابر فاصلهٔ آن از وتر CD است. اگر $CD=۲AB$ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب طول دو وتر چقدر است؟

۱) ۵۷ / ۲ ۲) ۵۷ / ۳ ۳) ۵۷ / ۴ ۴) ۵۷ / ۶

۱- دو دایرهٔ C_1 و C_2 دقیقاً ۳ مماس مشترک دارند که اندازهٔ یکی از آن‌ها ۴ است. اگر اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره $\frac{17}{2}$ باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

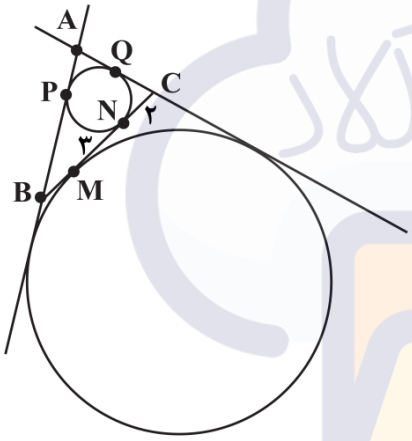
۲- در یک ۸ ضلعی منتظم، اندازهٔ کوچک‌ترین قطر برابر با $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ است. مساحت ۸ ضلعی چقدر است؟

۱) $1+\sqrt{2}$ ۲) $2+\sqrt{2}$ ۳) $4-\sqrt{2}$ ۴) $6-\sqrt{2}$

۳- مساحت یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی برابر با ۴ و مجموع ارتفاع وارد بر قاعده و یک ساق آن برابر با $3\sqrt{2}$ است. در این ذوزنقه قاعدهٔ بزرگ چقدر از قاعدهٔ کوچک بزرگ‌تر است؟

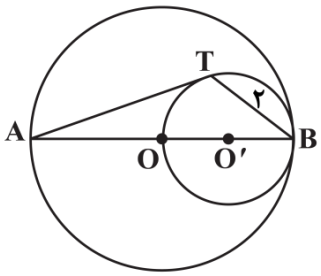
۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- در مثلث زیر دایرهٔ محاطی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC رسم شده است. اگر $CN=2$ و $MN=3$، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط BM کدام است؟



۱) $\frac{5}{2}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $\frac{7}{2}$

۵- دو دایرهٔ زیر با مرکزهای O و O' در نقطهٔ B بر یکدیگر مماس‌اند. اگر AT بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد و $BT=2$، آن‌گاه AT چقدر است؟



۱) $2\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $3\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$

۱- چه تعداد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

الف) هر تبدیل طولپا، جهت شکل را حفظ می‌کند.

ب) هر تبدیل طولپا، بی‌نهایت نقطهٔ ثابت دارد.

ج) هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

د) هر تبدیل طولپا، شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است و بازتاب‌های I نسبت به اضلاع مثلث I_1، I_2 و I_3 هستند، نقطهٔ I برای مثلث $I_1I_2I_3$ چه نقطه‌ای است؟

۱) مرکز دایرهٔ محاطی ۲) مرکز دایرهٔ محیطی ۳) مرکز ثقل ۴) محل تلاقی ارتفاعات

۳- شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a داریم. تبدیل هندسی بازتاب نسبت به یک قطر کوچک شش‌ضلعی با کدام تبدیل زیر هم‌ارز است؟

۱) دوران حول مرکز شش‌ضلعی ۲) بازتاب نسبت به یک محور دیگر

۳) انتقال با برداری به طول a ۴) انتقال با برداری به طول $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

۴- خطوط d_1 و d_2 در نقطهٔ O متقاطع‌اند و باهم زاویهٔ 60° می‌سازند، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از O و غیر واقع بر d_1 و d_2 مفروض است. اگر بازتاب A نسبت به d_1 نقطهٔ A' و بازتاب A' نسبت به d_2 نقطهٔ A'' باشد، طول AA'' چند سانتی‌متر است؟

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

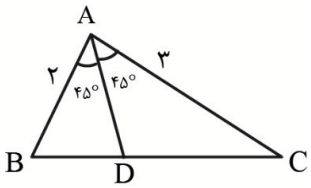
۵- مثلث ABC مفروض است. اگر B' و C' دوران یافته‌های B و C حول A به اندازهٔ 90° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند و $B'C'=6cm$ و محیط مثلث ABC برابر $14cm$ باشد، اندازهٔ $BB'+CC'$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) ۱۶ ۴) $12\sqrt{2}$

۱ – دو نقطه‌ی متمایز A و B را در صفحه در نظر بگیرید. اگر در این صفحه تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی ۲ و از B به فاصله‌ی ۳ باشد، برای طول پاره‌خط AB چند مقدار متفاوت امکان‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

۲ – در شکل مقابل مجموع فاصله‌های نقطه‌ی D از دو پاره‌خط AB و AC کدام است؟

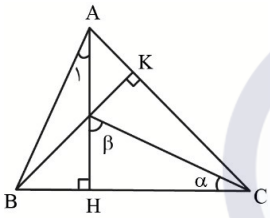


۱) ۲/۴
۲) ۲/۵
۳) ۲/۷
۴) ۲/۸

۳ – در مثلث ABC که $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف ضلع AB و نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$، هم‌دیگر را در نقطه‌ی T قطع می‌کنند، زاویه‌ی $C\hat{A}T$ چند درجه است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۴ – در شکل رسم شده، اگر $\hat{A}_1=\frac{1}{3}\beta$، آن‌گاه $\beta-\alpha$ چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۵۴
۴) ۳۶

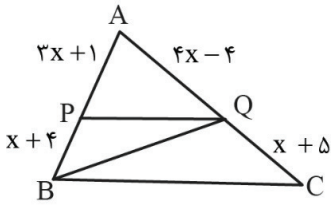
۵ – متوازی‌الاضلاعی که طول یکی از قطرهای آن a و طول قطر دیگر و یکی از اضلاع آن برابر ۴ است، قبل رسم است. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

۱. پاره‌خط AB، نقطهٔ M بر این پاره خط و نقطهٔ N واقع بر امتداد آن مفروض‌اند. اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=\frac{۱}{۲}$ و طول پاره خط MN برابر با ۶ واحد باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۲. در شکل مقابل PQ با BC موازی است. نسبت مساحت مثلث BPQ به مساحت مثلث BCQ کدام است؟

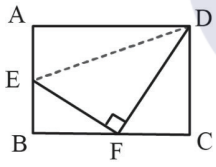


۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۳. در ذوزنقه‌ی ABCD، AB قاعده‌ی کوچک‌تر است. نقطه‌ی M را روی ساق AD و نقطه‌ی N را روی ساق BC طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۴}{۹}$. اگر پاره‌خط MN توسط قطرهای ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{AB}$ کدام است؟

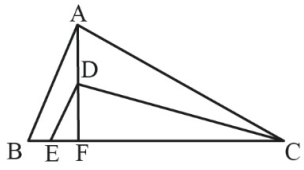
۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۴. مطابق شکل، E و F وسط‌های دو ضلع مستطیل ABCD هستند. نسبت $\frac{DE}{AD}$ برابر با کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۵. در شکل مقابل، زاویه‌های BAC، CDE و AFC قائمه‌اند. اگر E وسط BF و DF = BF آن‌گاه حاصل $\frac{AC}{DC}$ کدام است؟

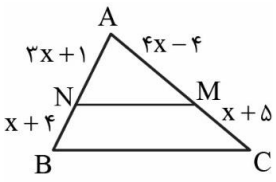


۱) $\sqrt{۱/۲}$
۲) $\sqrt{۱/۳}$
۳) $\sqrt{۱/۴}$
۴) $\sqrt{۱/۵}$

۱- از هر رأس یک n ضلعی محدب (n–۷)۳ قطر می‌گذرد. تعداد کل قطرهای این n ضلعی کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۷

۲- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت ذوزنقهٔ MNBC کدام است؟

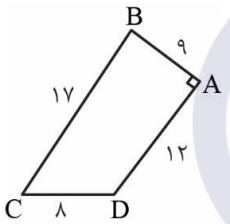


۱) ۰/۶۵
۲) ۰/۷
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر هستند. اگر $MH=\frac{۱}{۴}BC$ آن‌گاه طول BC، چند برابر فاصله‌ی نقطهٔ H از خط AM است؟

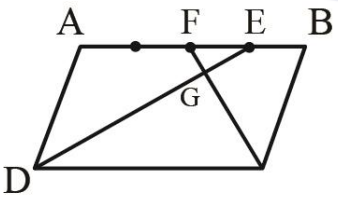
۱) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $۳+\sqrt{۳}$

۴- در شکل مقابل، وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD، رأس‌های یک چهارضلعی هستند، مساحت این چهارضلعی کدام است؟



۱) ۵۷
۲) ۵۸
۳) ۵۹
۴) ۶۰

۵- در شکل مقابل چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و ضلع AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی AFGD و BEGC کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۱۰}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد از نقطه‌ی M واقع بر امتداد ضلع BC بر ضلع AB عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. اگر $MH=5\sqrt{3}$، فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط شامل ضلع AC کدام است؟ (MB>MC)

۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

۲- در شکل مقابل مساحت ناحیه‌ی رنگی چند واحد سطح است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۷ ۴) ۳

۳- در یک چندضلعی شبکه‌ای مجموع تعداد نقاط درونی و تعداد نقاط مرزی برابر با ۷ است. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مساحت ممکن برای این چندضلعی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۴- نقطه‌ی G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است. اگر نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های مثلث BGC باشد، مساحت مثلث GPC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۱- مکان هندسی نقاطی که از آن نقطه‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره $C(O,3)$ رسم کرد، کدام است؟

۱) دایره $C'(O,5)$ ۲) دایره $C'(O,7)$ ۳) مربعی به مرکز O و قطر ۱۰ ۴) دایره $C'(O,\sqrt{7})$

۲- چه تعداد از جملات زیر گزاره درست هستند.

آ) در فضا از هر نقطه خارج خط فقط یک خط می‌توان عمود بر خط d رسم کرد.

ب) از هر نقطه خارج صفحه بی‌شمار صفحه وجود دارد که بر آن صفحه عمود است.

پ) از هر نقطه خارج خط بی‌شمار صفحه موازی آن صفحه وجود دارد.

ت) از هر نقطه خارج صفحه یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- نقطه A و خط d و صفحه p مفروض است. اگر بی‌شمار صفحه از A بگذرد و با خط d موازی باشد و بر صفحه p عمود باشد، وضعیت خط d و صفحه p کدام است؟

۱) $d \perp p$ ۲) $d \parallel p$ ۳) $d \cap p = A$ ۴) $d \cap p = d$

۴- مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{A} = ۹۰$ مفروض است. از رأس B خطی موازی ضلع قائم AC رسم می‌کنیم. سپس مثلث را نسبت به خط d دوران می‌دهیم. اگر حجم جسم فضای حاصل ۱۴۴π باشد، محیط مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

۱) $۶(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۶(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۱۲(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۱۲(۲+\sqrt{۲})$

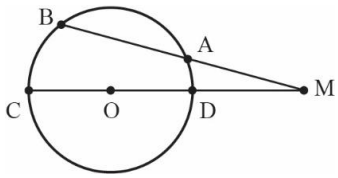
۵- مکعب توپری توسط صفحه قطری برش داده می‌شود و سپس به کمک وجه مثلث به هم چسبیده می‌شود تا یک منشور با قاعده مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ساخته شود. مساحت کل منشور حاصل چند برابر مساحت کل مکعب است؟

۱) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۶}$ ۳) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۴}$

۶- دو خط متنافر d و d' و نقطهٔ A مفروضند. چند خط وجود دارد که از نقطه A می‌گذرد و بر هر دو خط d و d' عمود و متقاطع است؟

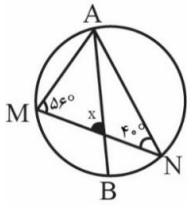
۱) صفر ۲) یک ۳) حداکثر یک ۴) بی‌شمار

۱- در شکل زیر اندازهٔ پاره‌خط MA برابر با طول شعاع دایره است. طول کمان BC چه کسری از طول کمان AD است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۱/۵
۴) ۲

۲- در شکل زیر پاره‌خط AB قطر دایره است. مقدار x کدام است؟

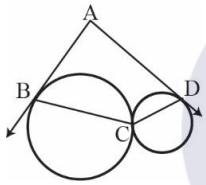


۱) ۷۴°
۲) ۶۸°
۳) ۶۴°
۴) ۷۸°

۳- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتری از دایره که از نقطهٔ A می‌گذرد چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۴- در شکل زیر مجموع زوایای ABC و ADC برابر با ۱۵۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ A چقدر است؟



۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۷۵°
۴) ۶۰°

۵- مجموع بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ از دایرهٔ C به معادلهٔ $۲x^۲+۲y^۲-۴x-۸y+۲=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

آزمون 16 بهمن هندسه 11

ماراتون

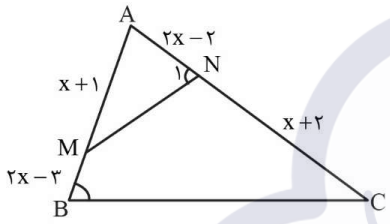
1- ذوزنقه محاطی ABCD مفروض است. $(AB||CD)$ اگر $\hat{B}=135^\circ$، $AB=5/4$ و $DC=10$ باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده کدام است؟

۱) ۲/۳ ۲) ۳/۷ ۳) ۴/۶ ۴) ۵/۴

2- مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۱۸ و اندازه محیط آن برابر ۱۲ است. مقدار عبارت $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ کدام است؟

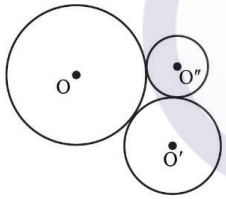
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

3- در شکل مقابل $\hat{N}_1=\hat{B}$ و چهارضلعی MNCB محیطی است. طول ضلع MN کدام است؟



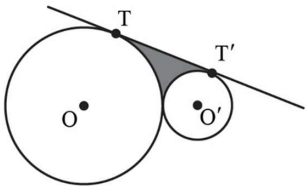
۱) $\frac{10}{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$

4- سه دایره $C(O,10)$، $C'(O',3)$ و $C''(O'',2)$ مطابق شکل بر یکدیگر مماسند. اندازه شعاع دایره محاطی داخلی مثلث $OO'O''$ کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

5- دو دایره $C(O,3)$ و $C'(O',1)$ بر یکدیگر مماس هستند. مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱) $4\sqrt{3}-\frac{3\pi}{2}$
۲) $4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{6}$
۳) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
۴) $2\sqrt{3}-\frac{3\pi}{2}$

۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) این حکم نادرست است، چون در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر، یعنی روی مثلث است.

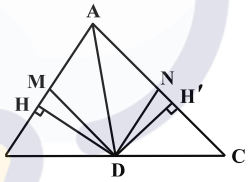
۲) این حکم نادرست است. به عنوان مثال نقض می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۶، ۵ و ۲ را در نظر گرفت که اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع از دو برابر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌تر است.

۳) این حکم کاملاً درست و فاقد مثال نقض است. هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است، پس قطعاً از این دو زاویه بزرگ‌تر است.

۴) این حکم نادرست است. به عنوان مثال نقض در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمهٔ ۳ و ۴، ضلع به طول ۴، ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۳ و بزرگ‌تر از آن است.

(هندسه ۱- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



از نقطهٔ D، عمودهای DH و DH' را بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، یعنی $DH = DH'$. از طرفی طبق قضیهٔ زاویهٔ برتر در مثلث ABC داریم:

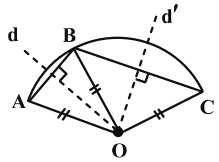
$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB \Rightarrow \frac{AC}{۲} > \frac{AB}{۲} \Rightarrow CN > AM$$

$$\frac{S_{AMD}}{S_{CND}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH \times AM}{\frac{۱}{۲}DH' \times CN} = \frac{AM}{CN} < ۱$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

مطابق شکل، سه نقطهٔ A، B و C را روی کمان دایره مشخص می‌کنیم.



عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و BC را رسم کرده و محل تقاطع آن‌ها را مشخص می‌کنیم، داریم:

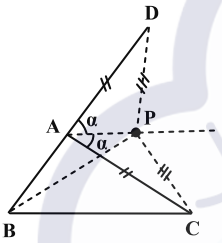
$$\left.\begin{matrix} AB \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow AO = BO \\ BC \text{ عمودمنصف } d' \Rightarrow BO = CO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AO = BO = CO$$

در نتیجه O از سه نقطهٔ A، B و C به یک فاصله بوده و مرکز دایره است.

(هندسه ۱- مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۶)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

AB را از طرف A به اندازهٔ AC تا نقطه D امتداد می‌دهیم. دو مثلث APD و APC به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند. بنابراین $PD = PC$. اکنون در مثلث BPD بنابه نامساوی مثلثی داریم:



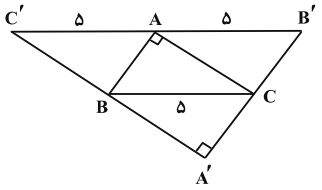
$$BD < PB + PD \Rightarrow BA + AD < PB + PD$$

$$\xrightarrow[PD=PC]{AD=AC} AB + AC < PB + PC$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۱ تا ۲۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مثلث ABC با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است و محل همرسی ارتفاع‌های آن رأس قائم (رأس A) است. این نقطه محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $A'B'C'$ است و فاصله‌اش تا هر رأس ۵ است.

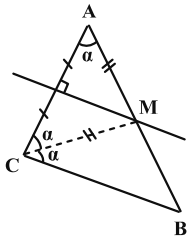


$$AA' + AB' + AC' = ۱۵$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

نقطهٔ M محل تقاطع عمودمنصف AC با ضلع AB طبق تعریف عمودمنصف، فاصله‌اش از A و C برابر است، بنابراین:



$AM = MC \Rightarrow M\hat{A}C = M\hat{C}A = \alpha$

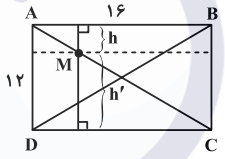
نقطهٔ M از دو ضلع AC و BC به یک فاصله است، پس CM نیمساز زاویهٔ C است و داریم:

$M\hat{C}A = M\hat{C}B = \alpha \Rightarrow \hat{C} = 2\hat{A}$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۱ تا ۲۰)

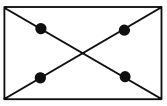
۷- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

ابتدا شکل مورد نظر مسئله را رسم می‌کنیم، نقطهٔ M را روی قطر AC در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن تا اضلاع AB و CD را به ترتیب h و h' لحاظ می‌کنیم. پس داریم:



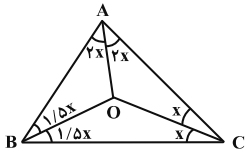
$$\begin{cases} h' + h = ۱۲ \\ h' - h = ۸ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲h' = ۲۰ \Rightarrow h' = ۱۰ \Rightarrow h = ۲$$

سپس با کمی دقت متوجه می‌شویم ۴ نقطهٔ مشابه M روی قطرها به صورت زیر موجود است:



(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*



طبق فرض داریم:

$$\frac{\hat{A}}{۴} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{C}}{۲} = x \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۴x \\ \hat{B} = ۳x \\ \hat{C} = ۲x \end{cases}$$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x + ۳x + ۲x = ۹x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$

در نتیجه:

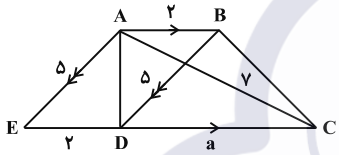
$$\begin{cases} A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - ۳/۵x = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ \\ B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - ۲/۵x = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ \end{cases}$$

$$\frac{A\hat{O}B}{B\hat{O}C} = \frac{۱۱۰^\circ}{۱۳۰^\circ} = \frac{۱۱}{۱۳}$$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

از A خطی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا امتداد CD را در E قطع کند. پس: $DE = ۲$ و $AE = ۵$.



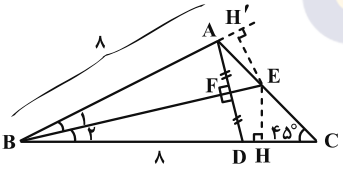
در $\overset{\Delta}{AEC}$ $\quad |\underbrace{۷-۵}_{۲}| < a+۲ < \underbrace{۷+۵}_{۱۲} \Rightarrow (۰ < a < ۱۰) \cap (a > ۲)$

$\Rightarrow ۲ < a < ۱۰ \Rightarrow \max(a \in \mathbb{N}) = ۹$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۷)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

در مثلث ABD، BF عمودمنصف AD است، پس $AF = FD$ و $B\hat{F}D = A\hat{F}B$ است. بنابراین دو مثلث AFB و BFD هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ و $AB = BD = ۸$ است.



حال چون BE نیمساز است، پس فاصلهٔ E از دو ضلع AB و BC برابر است. طبق شکل EHC متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است، پس:

$EH^۲ + CH^۲ = CE^۲ \Rightarrow ۲EH^۲ = ۱۶ \Rightarrow EH = ۲\sqrt{۲}$

$\xrightarrow{\text{BE نیمساز}} EH' = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{۱}{۲} AB \times EH'$

$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$

(هندسه ۱- صفحه‌های ۱۳ و ۱۵ تا ۲۷)

۱- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، می‌توان نوشت: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

بنابراین داریم: $\frac{a}{b}=\frac{(b+1)+(b-1)}{(a+b)+(a)}=\frac{2b}{2a+b}$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a^2+ab=2b^2 \Rightarrow 2b^2-ab-2a^2=0$$

$$\xrightarrow{+a^2} 2(\frac{b}{a})^2-(\frac{b}{a})-2=0 \xrightarrow{t=\frac{b}{a}} 2t^2-t-2=0$$

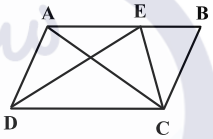
$$\xrightarrow{t>0} t=\frac{1+\sqrt{17}}{4}=\frac{b}{a}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۲- **گزینهٔ «۱»** (افشین خاصه‌خان)

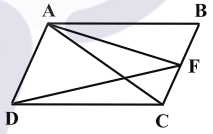
چون $AB \parallel DC$ و A و E روی AB قرار دارند لذا:

$$S_{DEC}=S_{ADC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$



به دلیل مشابه $AD \parallel BC$ و F و C روی BC قرار دارند پس:

$$S_{AFD}=S_{ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

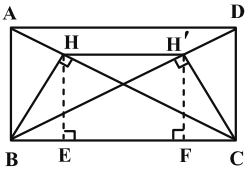


پس مساحت دو مثلث همواره برابرند.

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۳- **گزینهٔ «۱»** (محمد خندان)

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، BH ارتفاع وارد بر وتر است، بنابراین:



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$BH\times AC=AB\times BC \Rightarrow 5BH=3\times 4 \Rightarrow BH=\frac{12}{5}$$

حال اگر از H بر BC عمود رسم کنیم، با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH داریم:

$$BH^2=BE\times BC \Rightarrow (\frac{12}{5})^2=BE\times 4 \Rightarrow BE=\frac{36}{25}$$

به‌طور مشابه $CF=\frac{36}{25}$ است و خواهیم داشت:

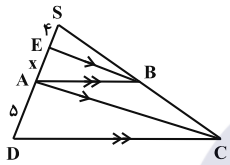
$$HH'=EF=BC-BE-FC=4-\frac{36}{25}-\frac{36}{25}$$

$$=\frac{100-72}{25}=\frac{28}{25}=1/12$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۴- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله حسنی)

فرض کنیم: $AE=x$.



$$\overset{\Delta}{SAC}: BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{SE}{AE}=\frac{SB}{BC} \Rightarrow \frac{4}{x}=\frac{SB}{BC} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{SDC}: AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{SA}{AD}=\frac{SB}{BC} \Rightarrow \frac{x+4}{5}=\frac{SB}{BC} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{4}{x}=\frac{x+4}{5} \Rightarrow x^2+4x=20$$

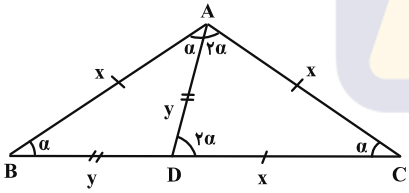
$$\Rightarrow x^2+4x-20=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2-2\sqrt{6} & \text{غ ق ق} \\ x=-2+2\sqrt{6} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow DE=5+x=3+2\sqrt{6}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** (محمد خندان)

مطابق شکل با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین و برابری زاویه‌ها، می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث ABD و ABC بنابر حالت (ز ز) متشابه‌اند.



مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} A\hat{B}D=A\hat{B}C \\ B\hat{A}D=A\hat{C}B \end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AC}{AD}=\frac{BC}{AB}$$

با فرض $AB=x$ و $AD=y$ خواهیم داشت:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x} \Rightarrow x^2=xy+y^2 \Rightarrow x^2-xy-y^2=0$$

$$\xrightarrow{+y^2} (\frac{x}{y})^2-\frac{x}{y}-1=0 \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} t^2-t-1=0$$

$$\xrightarrow{t>0} t=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

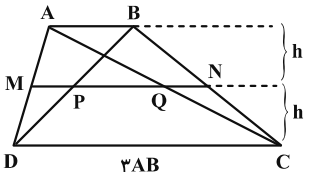
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اندازه‌های MN و PQ با روابط زیر به دست می‌آید:

$$PQ=\frac{CD-AB}{2}=AB\Rightarrow CD=3AB$$

$$\Rightarrow MN=\frac{CD+AB}{2}=\frac{4AB}{2}=2AB$$



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{CDMN}}=\frac{\frac{1}{2}(AB+MN)h}{\frac{1}{2}(CD+MN)h}=\frac{3AB}{5AB}=\frac{3}{5}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

$$a-b=5\Rightarrow a=b+5$$

داریم: $ah_a=bh_b=ch_c=2S$ پس $h_c=\frac{2S}{c}$ ، $h_b=\frac{2S}{b}$ و $h_a=\frac{2S}{a}$ چون طبق فرض $h_b+h_a=h_c$ پس:

$$\frac{2S}{b}+\frac{2S}{a}=\frac{2S}{c}\xrightarrow{+2S}\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{c}\xrightarrow[c=6]{a=b+5}\frac{1}{b}+\frac{1}{b+5}=\frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{\times 6b(b+5)}6(b+5)+6b=b(b+5)\Rightarrow 12b+30=b^2+5b$$

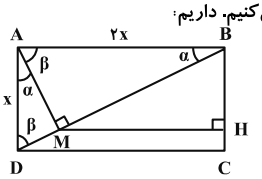
$$\Rightarrow b^2-7b-30\Rightarrow\begin{cases}b=-3 & \text{غ ق ق}\\ b=10\Rightarrow a=b+5=15\end{cases}$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با: $a+b+c=15+10+6=31$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

ابتدا مستطیل $ABCD$ و قطر BD را رسم می‌کنیم و از رأس A بر آن عمود می‌کنیم و پای عمود را M نامیده و سپس از M، عمود MH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. داریم:



$$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(2x)^2+x^2}:\text{ طبق فیثاغورس}$$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{5}x$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:

$$AB^2=MB\times BD$$

$$\Rightarrow (2x)^2=MB\times\sqrt{5}x\Rightarrow 4x^2=MB\times\sqrt{5}x$$

$$\Rightarrow MB=\frac{4x}{\sqrt{5}}$$

اکنون در مثلث BCD با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس خواهیم داشت:

$$MH\parallel CD\Rightarrow\frac{BM}{BD}=\frac{MH}{CD}\Rightarrow\frac{\frac{4x}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}x}{1}}=\frac{MH}{2x}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{MH}{2x}$$

$$\Rightarrow MH=\frac{8x}{5}\xrightarrow{\text{پس}}\frac{MH}{AD}=\frac{\frac{8x}{5}}{x}=\frac{8}{5}=1/6$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۴۲)

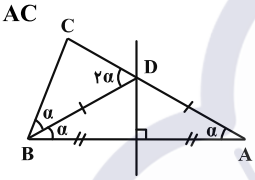
۹- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

چون D روی عمودمنصف AB است پس $AD=BD$. بنابراین:

$$A\hat{B}D=\hat{A}=\alpha$$

همچنین $B\hat{D}C=A\hat{B}D+\hat{A}=2\alpha$ و $\hat{B}=2A\hat{B}D=2\alpha$. بنابراین دو مثلث ABC و CBD به حالت (ز ز) متشابه‌اند. پس:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}$$



با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$\frac{BD}{16}=\frac{CD}{9}=\frac{9}{AC}\Rightarrow\frac{BD+CD}{16+9}=\frac{9}{AC}$$

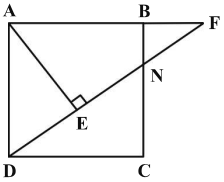
$$\xrightarrow{BD=AD}\frac{AC}{25}=\frac{9}{AC}\Rightarrow AC^2=9\times 25$$

$$\Rightarrow AC=3\times 5=15$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BNF و CND متشابه‌اند، چون داریم:



$$\begin{cases}\hat{C}=F\hat{B}N=90^\circ\\ B\hat{N}F=C\hat{N}D\end{cases}\xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{(\text{ز ز})}\overset{\Delta}{BNF}\sim\overset{\Delta}{CND}$$

$$\Rightarrow\frac{BF}{CD}=\frac{BN}{CN}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BF=\frac{CD}{2}\xrightarrow{\text{مربع ABCD}}BF=\frac{AB}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF طبق روابط طولی داریم:

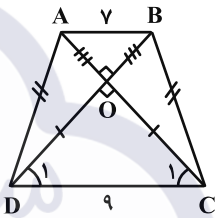
$$\begin{cases}AF^2=EF\times DF\\ AD^2=DE\times DF\end{cases}\xrightarrow{+}\frac{AF^2}{AD^2}=\frac{EF}{DE}$$

$$\xrightarrow[AD=AB]{AF=\frac{3}{2}AB}\frac{EF}{DE}=\frac{9}{4}=2/25$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۲)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

در شکل زیر $ABCD$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است که قطرها بر هم عمودند و $AB = ۷$ و $DC = ۹$. چون قطرها با هم برابرند پس $\overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{BDC}$ (ض ض ض). بنابراین $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$ در نتیجه مثلث DOC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. با استدلالی مشابه مثلث AOB نیز قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. بنابراین:



در مثلث DOC: $OC^۲ + OD^۲ = CD^۲ = ۹^۲ = ۸۱$

$$\Rightarrow OC^۲ = \frac{۸۱}{۲}$$

در مثلث AOB: $OB^۲ + OA^۲ = AB^۲ = ۷^۲ = ۴۹$

$$\Rightarrow OB^۲ = \frac{۴۹}{۲}$$

در مثلث BOC: $BC^۲ = OB^۲ + OC^۲ = \frac{۴۹}{۲} + \frac{۸۱}{۲} = \frac{۱۳۰}{۲} = ۶۵$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۶۵}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

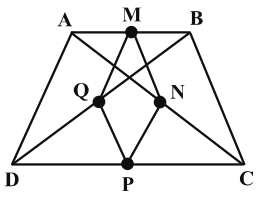
مطابق فرض مسئله، $MNPQ$ لوزی با محیط ۲۰ است، پس $MN = MQ = ۵$.

در مثلث ABC وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کردیم، بنابراین:

$$MN \parallel BC \text{ و } MN = \frac{۱}{۲}BC = ۵$$

و به همین ترتیب در مثلث ABD داریم:

$$MQ = \frac{۱}{۲}AD = ۵ \quad , \quad MQ \parallel AD$$



$$\Rightarrow AD = BC = ۱۰$$

طبق فرض داریم:

$$AB + DC = AD + BC$$

$$\Rightarrow \text{محیط } ABCD = ۲(AD + BC) = ۲(۲۰) = ۴۰$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۶۴)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن نیمساز زاویه‌ها نیز باشد لوزی است، پس گزارهٔ (الف) نادرست است.

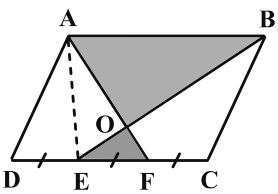
یک چهارضلعی که قطرهای عمود بر هم داشته باشد، می‌تواند کایت یا ذوزنقه باشد پس گزارهٔ (ب) نادرست است.

یک چهارضلعی که دو ضلع برابر و دو ضلع موازی داشته باشد، می‌تواند ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد پس گزارهٔ (پ) نادرست است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

از رأس A به نقطهٔ E روی ضلع CD وصل می‌کنیم، از طرفی دو مثلث OEF و AOB متشابه‌اند پس:



$$\frac{S_{OEF}}{S_{OAB}}=(\frac{EF}{AB})^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_{OAB}=۹S_{OEF} \qquad (I)$$

و نسبت اضلاع $\frac{OF}{OA}=\frac{۱}{۳}$ می‌باشد (چون نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ است) و از آنجایی که دو مثلث OEF و AOE دارای ارتفاع‌های یکسان هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها همان نسبت قاعده‌هاست. پس:

$$\frac{S_{AOE}}{S_{OEF}}=۳\Rightarrow S_{AOE}=۳S_{OEF} \qquad (II)$$

به کمک روابط (I) و (II) داریم:

$$S_{AEB}=S_{OAB}+S_{AOE}=۱۲S_{OEF} \qquad (III)$$

از طرفی مساحت مثلث AEB نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است زیرا ارتفاع و قاعدهٔ آن با ارتفاع و قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع برابر است پس:

$$S_{AEB}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD} \xrightarrow{(III)} S_{OEF}=\frac{۱}{۲۴}S_{ABCD}$$

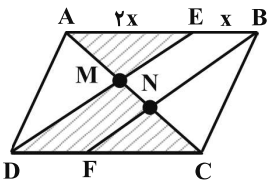
در نتیجه: $S_{AOB}+S_{OEF}=۱۰S_{OEF}=$ مساحت قسمت‌های رنگی

$$=\frac{۱۰}{۲۴}S_{ABCD}=\frac{۵}{۱۲}S_{ABCD}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۸)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

با در نظر گرفتن $BE=x$ داریم $AE=۲x$ و طول ضلع AB برابر $۳x$ می‌شود. دو مثلث AME و DMC با هم متشابه‌اند (چرا؟) و داریم:



$$\frac{AM}{MC}=\frac{AE}{CD}=\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AM}{AM+MC}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow AM=\frac{۲}{۵}AC$$

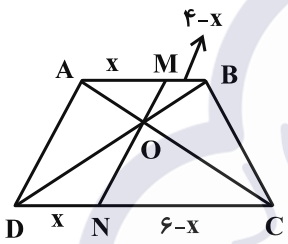
به طریق مشابه $NC=\frac{۲}{۵}AC$ خواهد بود و در نتیجه:

$$MN=AC-(AM+NC)=AC-\frac{۴}{۵}AC\Rightarrow MN=\frac{۱}{۵}AC$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۶۴)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن چهارضلعی $AMND$ داریم: $AM=DN=x$



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OAM}\sim\overset{\Delta}{ONC}\Rightarrow\frac{x}{۶-x}=\frac{OM}{ON}\\ \overset{\Delta}{OMB}\sim\overset{\Delta}{OND}\Rightarrow\frac{۴-x}{x}=\frac{OM}{ON}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x}{۶-x}=\frac{۴-x}{x}$$

$$\Rightarrow x^{۲}=x^{۲}-۱۰x+۲۴\Rightarrow x=۲/۴$$

دو مثلث OAM و ONC متشابه‌اند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست. پس:

$$\frac{S_{OAM}}{S_{ONC}}=(\frac{x}{۶-x})^{۲}=(\frac{۲/۴}{۳/۶})^{۲}=(\frac{۲}{۳})^{۲}=\frac{۴}{۹}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

تعداد قطرهای n ضلعی محدب برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است. بنابراین تعداد قطرهای $n+۴$ ضلعی برابر $\frac{(n+۴)(n+۱)}{۲}$ است. پس:

$$\frac{(n+۴)(n+۱)}{۲}-\frac{n(n-۳)}{۲}=۴۶\Rightarrow\frac{n^{۲}+۵n+۴-n^{۲}+۳n}{۲}=۴۶$$

$$\Rightarrow \frac{8n+4}{2} = 46 \Rightarrow 8n+4 = 92 \Rightarrow 8n = 88 \Rightarrow n = 11$$

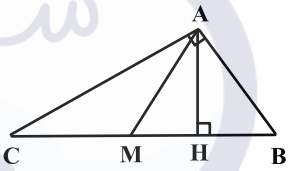
بنابراین تعداد قطرهای این n ضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{11\times 8}{2} = 44$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۵۵)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ 15° دارد، اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر برابر $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است. از طرفی اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه نصف اندازهٔ وتر است، پس با فرض $AH = x$، داریم $BC = 4x$ و $AM = 2x$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM طبق قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:

$$MH^2 = AM^2 - AH^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow MH = \sqrt{3}x$$

$$BH = BM - MH = 2x - \sqrt{3}x = (2-\sqrt{3})x$$

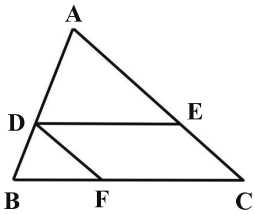
مطابق فرض سوال داریم:

$$BH = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3})x = 2(2-\sqrt{3}) \Rightarrow x = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH\times BC = \frac{1}{2}x(4x) = 2x^2 = 2(2)^2 = 8$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۴)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*



$$DF \parallel AC \Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{AD}{AB})^2 = \frac{4}{9} \quad (1)$$

$$DF \parallel AC \Rightarrow \overset{\Delta}{BDF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = (\frac{BF}{BC})^2 = \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{S_{ADE}}{S_{BDF}} = 4$$

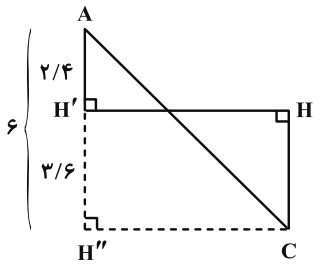
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

دو مثلث ABE و BCD بنابر حالت تناسب اضلاع $(\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3})$ متشابه‌اند و بنابراین نسبت ارتفاع‌ها $(\frac{AH'}{CH})$ نیز برابر $\frac{2}{3}$ است، پس:

$$\frac{AH'}{\underbrace{CH}_{3/6}} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH' = 2/4$$

حال با توجه به شکل اگر AH' را امتداد دهیم و از C موازی HH' خط رسم کنیم، مستطیل $HH'H''C$ تشکیل می‌شود. حال با نوشتن فیثاغورس در مثلث ACH'' داریم:

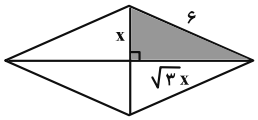


$$AH''^2 + CH''^2 = AC^2 \Rightarrow 6^2 + CH''^2 = 10^2 \Rightarrow CH'' = HH' = 8$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(نرگس کارگر)*

نسبت اندازه‌های دو قطر برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است، پس اندازهٔ قطرهای کوچک و بزرگ را به ترتیب $۲x$ و $۲\sqrt{۳}x$ در نظر می‌گیریم. قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث رنگی می‌نویسیم:



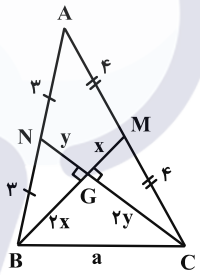
$$x^۲+(\sqrt{۳}x)^۲=۳۶\Rightarrow ۴x^۲=۳۶\Rightarrow x=۳$$

در نتیجه: $S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}$: مساحت لوزی

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

دو میانهٔ BM و CN در مرکز ثقل G همرسند و داریم:



$$GM=\frac{۱}{۲}BG=x\quad,\quad GN=\frac{۱}{۲}GC=y$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ GMC و GNB قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x^۲+۴y^۲=۱۶\\ y^۲+۴x^۲=۹\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}۵(x^۲+y^۲)=۲۵\Rightarrow x^۲+y^۲=۵$$

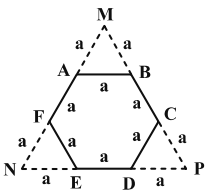
حال قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویهٔ BGC می‌نویسیم:

$$۴x^۲+۴y^۲=a^۲\Rightarrow a^۲=۴\times ۵=۲۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۵}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۷)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طول ضلع شش‌ضلعی منتظم را a در نظر می‌گیریم. هر یک از مثلث‌های کناری، از نوع متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشند. پس مثلث MNP یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۳a$ می‌باشد:



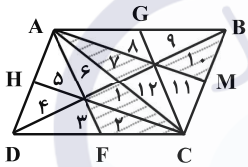
$$۱۲\sqrt{۳}=\frac{۳a\times\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow a=۸$$: طبق فرض

$$\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم}=\frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳}=\frac{۳}{۲}\times ۸^۲\times\sqrt{۳}=۹۶\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، هر دو مثلث ABC و ADC هم‌نهشت‌اند. پس دارای مساحت یکسان می‌باشند. در شکل زیر میانه‌های اضلاع دو مثلث ABC و ADC رسم شده‌اند که هر کدام از این دو مثلث به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم شده‌اند. پس:

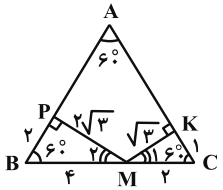


$$\frac{S_{\text{هاشورخورده}}}{S_{ABCD}}=\frac{\text{۴ مثلث}}{\text{۱۲ مثلث}}=\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(نرگس کارگر)*

از آنجا که $AB=AC$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$، پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین تا ساق‌ها برابر ارتفاع وارد بر ساق است. پس:



$$MK+MP=۳\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\ \text{(ارتفاع وارد بر ساق)}$$

$$\Rightarrow a=۶\quad\text{(ضلع مثلث)}$$

در نتیجه: $BM=۴\quad,\quad CM=۲$

$$\overset{\Delta}{KMC}:\hat{M}_۱=۳۰^\circ\Rightarrow KC=۱\ ,\ MK=\sqrt{۳}\Rightarrow S_{MKC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{BMP}:\hat{M}_۲=۳۰^\circ\Rightarrow BP=۲\ ,\ MP=۲\sqrt{۳}\Rightarrow S_{MPB}=۲\sqrt{۳}$$

داریم:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶^۲=۹\sqrt{۳}$$

$$S_{APMK}=S_{ABC}-(S_{MKC}+S_{MPB})$$

$$=۹\sqrt{۳}-(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۲\sqrt{۳})=\frac{۱۳}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APMK}}=\frac{۹\sqrt{۳}}{\frac{۱۳}{۲}\sqrt{۳}}=\frac{۱۸}{۱۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۵ و ۶۸)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

در مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطهٔ درون مثلث از سه ضلع، برابر طول ارتفاع است. اگر فرض کنیم $PN=m$، آنگاه در صورتی که AH ارتفاع مثلث ABC باشد، داریم:

$$PQ=۲m \ , \ PM=۳m \Rightarrow PN+PQ+PM=AH=۶m$$

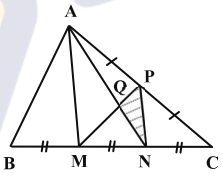
$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=۶m \Rightarrow a=۶\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}m=۴\sqrt{۳}m$$ طول ضلع مثلث a

$$\xrightarrow{\text{محیط}=۳a} ۳a=۱۲\sqrt{۳}m \Rightarrow \frac{۳a}{PN}=\frac{۱۲\sqrt{۳}m}{m}=۱۲\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۵ و ۶۸)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

در مثلث AMC، AN و MP دو میانهٔ وارد بر MC و AC هستند. بنابراین Q محل برخورد میانه‌ها است. بنابراین:



$$\frac{S_{PQN}}{S_{PMN}}=\frac{PQ}{PM}=\frac{۱}{۳} \ , \ \frac{S_{PMN}}{S_{PNC}}=\frac{MN}{NC}=۱$$

همچنین چون $\frac{NC}{MN}=۱=\frac{PC}{AP}$ بنابه عکس قضیهٔ تالس $PN \parallel AM$،

پس $\overset{\Delta}{PNC} \sim \overset{\Delta}{AMC}$ و در نتیجه: $\frac{S_{PNC}}{S_{AMC}}=(\frac{PC}{AC})^۲=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$

از طرفی $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{۲}{۳}$، بنابراین:

$$\frac{S_{PQN}}{S_{ABC}}=\frac{S_{PQN}}{S_{PMN}}\times\frac{S_{PMN}}{S_{PNC}}\times\frac{S_{PNC}}{S_{AMC}}\times\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}$$

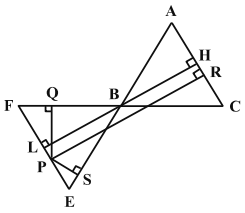
$$=\frac{۱}{۳}\times ۱\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱۸}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC، ۱۸ برابر مساحت مثلث PQN است.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۷۳)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

از رأس B به قاعده‌های دو مثلث عمود می‌کنیم. مثلث BEF متساوی‌الاضلاع (و در نتیجه متساوی‌الساقین) است. پس داریم:



$PS+PQ=BL$ (ارتفاع مثلث)

چون چهارضلعی $HLPR$ مستطیل است، $PR=LH$ می‌شود و از آنجا که $LH=BH+BL$ و این‌که مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، خواهیم داشت:

$$\frac{PR-(PQ+PS)}{AC}=\frac{BH}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(ایمان ساریقانی)*

ابتدا توسط فرمول پیک مساحت چندضلعی اول را می‌یابیم:

$S=\frac{۲۲}{۲}+۱۰-۱=۲۰$: مساحت چندضلعی اول

$$\Rightarrow \frac{S}{S'}=k^۲ \xrightarrow{k=۲} \frac{۲۰}{S'}=۴ \Rightarrow S'=۵$$

$S'=\frac{b}{۲}+i-۱=۵ \xrightarrow{i=۴} \frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow b=۴$: مساحت چندضلعی دوم

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

به کمک رابطهٔ پیک داریم:

$S=i+\frac{b}{۲}-۱$: مساحت چندضلعی بزرگ‌تر

$S'=i'+\frac{b'}{۲}-۱$: مساحت چندضلعی کوچک‌تر

$$\Rightarrow S-S'=(i+\frac{b}{۲}-۱)-(i'+\frac{b'}{۲}-۱)$$

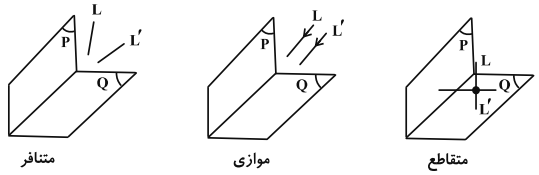
$$=(i-i')+\frac{۱}{۲}(b-b') \Rightarrow ۱۳/۵=(i-i')+\frac{۱}{۲}(۱۲-۷)$$

$$\Rightarrow ۱۳/۵=(i-i')+۲/۵ \Rightarrow i-i'=۱۱$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

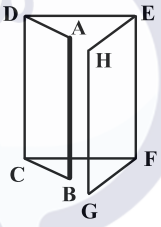
با توجه به شرایط خطوط و صفحات هر کدام از موارد زیر می‌تواند صحیح باشد.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

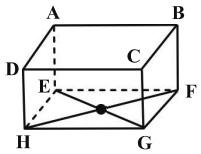
در شکل زیر EF، GH و CD با AB موازی‌اند پس $n=3$ و CF، DE، GF و HE نسبت به AB متنافرند لذا $m=4$ بنابراین $m\times n=12$.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۸۵)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

همان‌طور که مشاهده می‌شود EG و HF که قطرهای قاعدهٔ مکعب مستطیل هستند به ترتیب یال‌های متنافر (FG و AE) و (HE و BF) را قطع می‌کنند.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

گزینهٔ «۱»: نمای بالا

گزینهٔ «۳»: نمای چپ

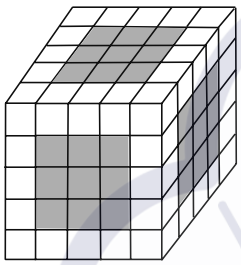
گزینهٔ «۴»: نمای پشت

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(نرگس کارگر)*

تعداد مکعب‌هایی که سه وجه رنگ شده دارند: ۸ مکعب در گوشه‌ها است (۴ تا بالا و ۴ تا پایین)

تعداد مکعب‌هایی که فقط یک وجه‌شان رنگ شده: در هر وجه ۹ مکعب مانند شکل زیر وجود دارد و چون مکعب شش وجه دارد پس: $9\times6=54$



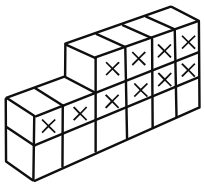
در نتیجه $m+n=54+8=62$.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

نمای بالای این شکل به صورت زیر است:

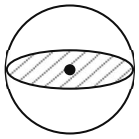
اگر مکعب‌های دو ردیف بالا را حذف کنیم نمای بالا تغییری نخواهد کرد، بنابراین حداکثر $4+6=10$ مکعب را حذف کنیم، نمای بالا بدون تغییر خواهد بود:



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(محمد ناری‌ابیانه)*

بزرگ‌ترین سطح مقطع زمانی ایجاد می‌شود که صفحهٔ برش از مرکز کره بگذرد. مطابق شکل داریم:



$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۹}{۲}\pi \Rightarrow r^۳ = \frac{۲۷}{۸} \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}$$

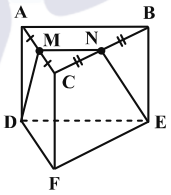
مساحت سطح مقطع: $S = \pi r^۲ = \pi(\frac{۳}{۲})^۲ = \pi \times \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵\pi$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

سطح مقطع حاصل، ذوزنقه متساوی‌الساقین $MNED$ است که قاعده‌های آن DE و MN و دو ساق آن MD و NE هستند. در مثلث ABC چون $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$ پس $MN \parallel AB$ و بنابه تعمیم تالس داریم:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}AB = ۵$$

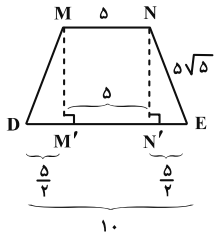


در مثلث قائم‌الزاویهٔ BNE داریم:

$$NE^۲ = BN^۲ + BE^۲ = ۵^۲ + ۱۰^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow NE = ۵\sqrt{۵}$$

به همین ترتیب $DM = ۵\sqrt{۵}$.

اکنون برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقه کافی است طول ارتفاع وارد بر قاعده را محاسبه کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $NN'E$ داریم:



$$NN'^۲ + N'E^۲ = NE^۲ \Rightarrow NN'^۲ + \frac{۲۵}{۴} = ۱۲۵$$

$$\Rightarrow NN'^۲ = \frac{۴۷۵}{۴} \Rightarrow NN' = \frac{۵}{۲}\sqrt{۱۹}$$

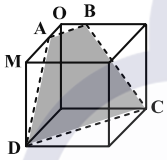
$$\Rightarrow S_{MNED} = \frac{۱}{۲}(MN + DE) \times NN'$$

$$= \frac{۱}{۲}(۵ + ۱۰) \times \frac{۵}{۲}\sqrt{۱۹} = \frac{۷۵}{۴}\sqrt{۱۹} = ۱۸/۷۵\sqrt{۱۹}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مثلث OAB مطابق شکل قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و داریم:



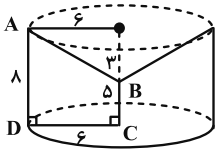
$$\begin{cases} CD = ۶ \Rightarrow \text{یال مکعب} = ۳\sqrt{۲} \\ AB = ۲ \Rightarrow OA = OB = \sqrt{۲} \Rightarrow AM = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AMD} : AD = \sqrt{AM^۲ + DM^۲} = \sqrt{۸ + ۱۸} = \sqrt{۲۶}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

شکل حاصل استوانه‌ای قائم به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۸ است که مخروطی قائم به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۳ از آن خارج شده است. بنابراین:



حجم مخروط − حجم استوانه = حجم شکل

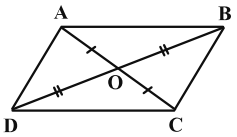
$$= \pi r^۲ h - \frac{۱}{۳}\pi r'^۲ h' = \pi(۶)^۲ \times ۸ - \frac{۱}{۳}\pi(۶)^۲ \times ۳$$

$$= ۲۸۸\pi - ۳۶\pi = ۲۵۲\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را مطابق شکل در نظر بگیرید، به گونه‌ای که طول قطرهای AC و BD برابر ۶ و ۱۰ و طول ضلع AB در آن ۹ باشد.



می‌دانیم قطرهای یک متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند، پس:

$$\begin{cases} OA = OC = ۳ \\ OB = OD = ۵ \end{cases}$$

در این صورت در مثلث OAB داریم:

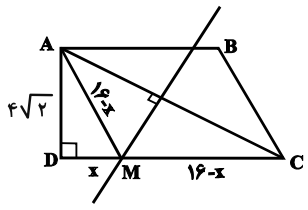
$$\begin{cases} OA + OB = ۳ + ۵ = ۸ \\ AB = ۹ \end{cases} \Rightarrow OA + OB < AB$$

بنابراین چنین مثلثی قابل رسم نیست (طبق اصل نامساوی مثلثی) و در نتیجه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ قابل رسم نمی‌باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال + چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۵۸)

۲- **گزینهٔ «۱»** (جواد حاتمی)

چون M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است $(MA = MC)$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:



$$AM^۲ = AD^۲ + DM^۲ \Rightarrow (۱۶ - x)^۲ = ۳۲ + x^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵۶ - ۳۲x + x^۲ = ۳۲ + x^۲ \Rightarrow ۳۲x = ۲۲۴ \Rightarrow x = ۷$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۳- **گزینهٔ «۳»** (محمد خندان)

طبق فرض طول دو پاره‌خط هم‌اندازهٔ OM و ON را x می‌گیریم. چهارضلعی $ONED$ متوازی‌الاضلاع است، پس $DE = ON = x$ و در نتیجه:

$$CE = ۳DE = ۳x$$

داریم:

$$\overset{\Delta}{BDC} : NE \parallel BD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{CN}{NB} = \frac{CE}{DE} = ۳$$

طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{DM}{MA} = \frac{CN}{NB} = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{DM}{DM + MA} = \frac{۳}{۱ + ۳} \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{۳}{۴}$$

حال در مثلث ADB طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$OM \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{OM}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۴}{۳}OM = \frac{۴}{۳}x$$

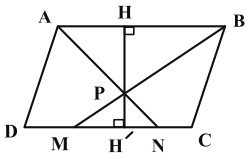
در نتیجه:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{۲x}{\frac{۴}{۳}x} = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۴- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

دو مثلث PAB و PMN به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند.



نسبت ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه آن دو مثلث است،

بنابراین داریم:

$$\frac{PH}{PH'}=\frac{AB}{MN}=\frac{۳}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{PH+PH'}{PH'}=\frac{۳+۱}{۱}$$

$$\Rightarrow\frac{HH'}{PH'}=۴$$

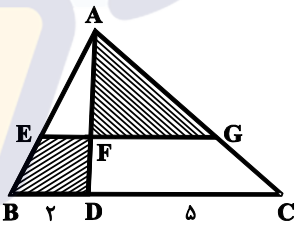
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PMN}}=\frac{HH'\times AB}{\frac{۱}{۲}PH'\times MN}=۲\times\frac{HH'}{PH'}\times\frac{AB}{MN}=۲\times۴\times۳=۲۴$$

$$\xrightarrow{S_{ABCD}=۱۰۸}S_{PMN}=\frac{۱۰۸}{۲۴}=۴/۵$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

طبق قضیهٔ اساسی تشابه می‌توان نوشت:



$$EF\parallel BD\Rightarrow\overset{\Delta}{AEF}\sim\overset{\Delta}{ABD}\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABD}}=\left(\frac{AF}{AD}\right)^{۲}=\frac{۴}{۹}$$

$$FG\parallel DC\Rightarrow\overset{\Delta}{AFG}\sim\overset{\Delta}{ADC}\Rightarrow\frac{S_{AFG}}{S_{ADC}}=\left(\frac{AF}{AD}\right)^{۲}=\frac{۴}{۹}$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABD}}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}}\frac{S_{BEFD}}{S_{ABD}}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow S_{BEFD}=\frac{۵}{۹}S_{ABD}$$

دو مثلث ABD و ADC دارای ارتفاع مشترک هستند، بنابراین نسبت مساحت آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های آن دو مثلث، بنابراین داریم:

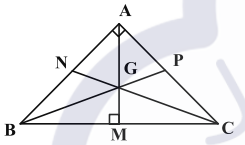
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{BEFD}}{S_{AFG}}=\frac{\frac{۵}{۹}S_{ABD}}{\frac{۴}{۹}S_{ADC}}=\frac{۵}{۴}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۷۳)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم از وصل کردن نقطهٔ همرسی میانه‌های یک مثلث به سه رأس آن مثلث، سه مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین داریم:



$$S_{ABC}=۳S_{GAB}=۳\times۹=۲۷\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\times AC=۲۷$$

$$\xrightarrow{AB=AC}\frac{۱}{۲}AB^{۲}=۲۷\Rightarrow AB^{۲}=۵۴$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۲AB^{۲}=۲\times۵۴=۱۰۸$$
$$\Rightarrow BC=۶\sqrt{۳}$$

طول میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است، پس داریم:

$$AM=\frac{۱}{۲}BC=۳\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۷)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

حداقل مقدار ممکن برای تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای برابر صفر است. با توجه به این موضوع داریم:

حالت اول:

$$b=۳ \Rightarrow i=۲۰-۳=۱۷$$

$$S_{max}=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۳}{۲}+۱۷-۱=۱۷/۵$$

حالت دوم:

$$i=۰ \Rightarrow b=۲۰-۰=۲۰$$

$$S_{min}=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۲۰}{۲}+۰-۱=۹$$

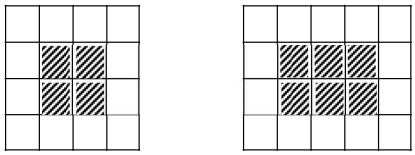
بنابراین اختلاف بین حداکثر و حداقل مساحت برابر است با:

$$S_{max}-S_{min}=۱۷/۵-۹=۸/۵$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۸- **گزینهٔ «۲»** (نریمان فتح‌اللهی)

اگر از هر سمت این مکعب مستطیل، یک ردیف حذف کنید، یک مکعب مستطیل به ابعاد $۳\times۲\times۲$ باقی می‌ماند که شامل ۱۲ مکعب کوچک رنگ نشده است. از طرفی وجه‌های این مکعب شامل ۲ وجه به ابعاد ۴×۴ و ۴ وجه به ابعاد ۵×۴ است که مطابق شکل زیر در آن‌ها به ترتیب ۴ و ۶ مکعب کوچک وجود دارد که تنها دارای یک وجه رنگ شده هستند، پس تعداد مکعب‌های با یک وجه رنگ شده برابر است با:



$$۲\times۴+۴\times۶=۳۲$$

$$\frac{\text{تعداد مکعب‌های رنگ نشده}}{\text{تعداد مکعب‌های با یک وجه رنگ شده}}=\frac{۱۲}{۳۲}=\frac{۳}{۸}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۹۰)

۹- **گزینهٔ «۱»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

فقط گزارهٔ (ب) درست است.

بررسی گزاره‌های نادرست:

الف) زیرا دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ هر وضعیتی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند.

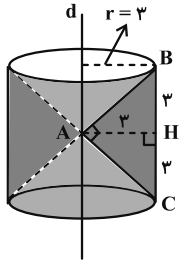
ج) زیرا دو خط $d_۱$ و $d_۲$ می‌توانند موازی یا متقاطع یا متنافر با هر زاویه‌ای باشند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل، وتر BC موازی خط d و فاصلهٔ رأس A تا خط BC برابر ۳ خواهد بود. طول ارتفاع AH (وارد بر وتر BC) نصف اندازهٔ وتر BC است، پس این ارتفاع همان میانهٔ وتر BC و در نتیجه $BH=HC=۳$.

حجم حاصل از دوران مثلث ABC حول d، از تفاضل حجم دو مخروط قائم و مساوی (در بالا و پایین شکل) از حجم استوانهٔ قائم به دست می‌آید:



حجم مورد نظر: $V=V$ (استوانه) $-2V$ (مخروط قائم)

$$=\pi r^۲h-۲(\frac{۱}{۳}\pi r'^۲\times h')=\pi\times۳^۲\times۶-\frac{۲}{۳}\pi\times۳^۲\times۳$$

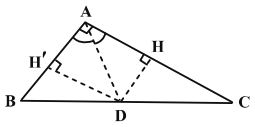
$$=۵۴\pi-۱۸\pi=۳۶\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(اسحاق اسفندیار)*

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس:

$$DH = DH'$$



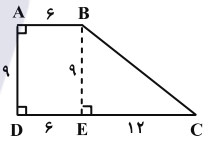
$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} \Rightarrow \frac{۳\times۴}{۲} = \frac{DH\times۴}{۲} + \frac{DH'\times۳}{۲}$$

$$\Rightarrow DH = DH' = \frac{۱۲}{۷}$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

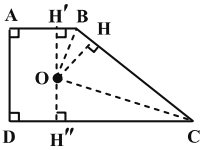
۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل از نقطهٔ B، عمود BE را بر ضلع CD رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE داریم:



$$BC^۲ = BE^۲ + CE^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۱۵^۲ \Rightarrow BC = ۱۵$$

می‌دانیم هر نقطهٔ واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. از طرفی نقطهٔ O بر نیمسازهای زوایای B و C واقع است، بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{matrix} OH = OH' \\ OH = OH'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}H'H'' = \frac{۱}{۲}AD = \frac{۹}{۲}$$

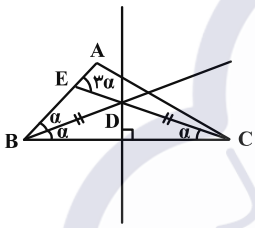
در نتیجه مساحت مثلث OBC برابر است با:

$$S_{OBC} = \frac{۱}{۲}OH\times BC = \frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۲}\times۱۵ = \frac{۱۳۵}{۴} = ۳۳/۷۵$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

فرض کنیم $\hat{B} = ۲\alpha$، بنابراین $D\hat{B}C = \alpha$. چون نقطهٔ D روی عمودمنصف ضلع BC است پس $BD = DC$ و مثلث BDC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $D\hat{C}B = D\hat{B}C = \alpha$.



از طرفی در مثلث BEC زاویهٔ خارجی $A\hat{E}C$ برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است، یعنی: $A\hat{E}C = \hat{B} + D\hat{C}B = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$

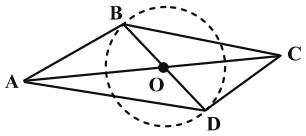
چون $A\hat{E}C = ۷۸^\circ$، پس: $۳\alpha = ۷۸^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۷۸^\circ}{۳} = ۲۶^\circ$

بنابراین: $\hat{B} = ۲\alpha = ۲\times۲۶^\circ = ۵۲^\circ$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

برای رسم متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به طول قطرهای ۴ و ۷، ابتدا یکی از قطرهای آن، مثلاً قطر بزرگ‌تر (پاره‌خط AC به طول ۷) را رسم می‌کنیم. برای ادامهٔ رسم متوازی‌الاضلاع، به نقطهٔ وسط پاره‌خط AC نیاز داریم که برای این کار کافی است به کمک خط‌کش و پرگار، عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم کنیم و محل تلاقی آن با پاره‌خط AC را O می‌نامیم. حال به مرکز O و شعاع ۲، دایره‌ای رسم می‌کنیم و یکی از قطرهای دلخواه آن (که هم‌خط با AC نیست) را در نظر گرفته و دو سر آن را B و D می‌نامیم. در انتها نقاط B و D را به A و C وصل می کنیم.

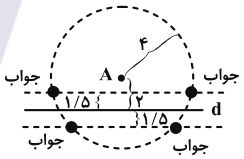


توجه: البته می‌توان دو دایرهٔ هم‌مرکز، یکی به شعاع $r_1 = \frac{۴}{۲} = ۲$ و $r_2 = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$ رسم کرد و از هر کدام از این دو دایره، قطری دلخواه و غیر هم‌خط با یکدیگر در نظر بگیریم:

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۵)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا صادقیان)*

مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد هستند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۴ واحد می‌باشد؛ همچنین مجموعه نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ واحد هستند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از آن و در دو طرف آن می‌باشند. محل برخورد نقاط این دو مجموعه (یعنی دایره و دو خط موازی) جواب سوال است. مطابق شکل ۴ نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصلهٔ ۴ و از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ است.



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نقطهٔ برخورد نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، نه از سه رأس مثلث!

۲) در اثبات همرسی ارتفاع‌های یک مثلث از همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی استفاده می‌کنیم که این مثلث با رسم خطوط موازی اضلاع مثلث اولیه از هر رأس آن به دست آمده است. (صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۳) نقطهٔ برخورد عمومنصف‌های اضلاع از سه رأس مثلث به یک فاصله است، نه از سه ضلع مثلث!

۴) ارتفاع متناظر با ضلع بزرگ‌تر، کوچک‌تر است از ارتفاع متناظر با ضلع کوچک‌تر.

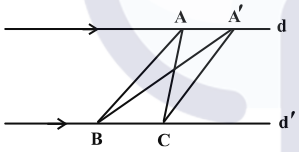
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) مثال نقض برای عکس این قضیه، یک متوازی‌الاضلاع با طول اضلاع متمایز ۵ و ۳ است.

۲) مثال نقض برای عکس این قضیه، دو مثلث با اندازهٔ ارتفاع و قاعده‌های نظیر $(a_1 = ۴ , h_1 = ۳)$ و $(a_2 = ۶ , h_2 = ۲)$ هستند که هر دو مساحت یکسان و برابر دارند ولی هم‌نهشت نیستند؛ یا به عنوان مثال دیگر در شکل زیر که هر دو مثلث ABC و $A'BC$ دارای مساحت برابرند ولی غیرهم‌نهشت‌اند.



۳) عکس این قضیه درست است، پس آن را می‌توان به صورت قضیهٔ دوشرطی زیر نوشت:

«یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر، قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند.»

۴) مثال نقض برای عکس این قضیه، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است که اندازهٔ قطرهایش با هم برابرند ولی مستطیل نیست.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

در دو مثلث ABC و ADC نامساوی مثلثی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۴+(x-۲)>x \\ ۴+x>x-۲ \\ x+(x-۲)>۴ \end{cases} \Rightarrow x>۳$$

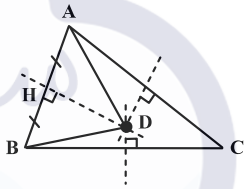
$$\begin{cases} x+(x+۶)>۳x-۱ \\ x+(۳x-۱)>x+۶ \\ (x+۶)+(۳x-۱)>x \end{cases} \Rightarrow \frac{۷}{۳}<x<۷$$

پس محدودهٔ $۳<x<۷$ قابل قبول است و x می‌تواند اعداد صحیح ۴، ۵ و ۶ باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحهٔ ۲۷)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

می‌دانیم عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC در یک نقطه همرس‌اند، که این نقطهٔ همرسی از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس مطابق شکل و فرض سوال داریم: $AD=DC=۱۰$



از طرفی:

$$AH=\frac{AB}{۲}=۴\sqrt{۵}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$AD^۲=AH^۲+DH^۲$$

$$\Rightarrow DH^۲=(۱۰)^۲-(۴\sqrt{۵})^۲=۱۰۰-۸۰=۲۰\Rightarrow DH=۲\sqrt{۵}$$

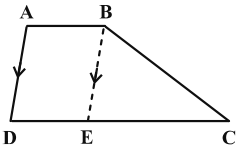
در نتیجه مساحت مثلث ABD برابر است با:

$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB\times DH=\frac{۱}{۲}(۸\sqrt{۵})(۲\sqrt{۵})=۴۰$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

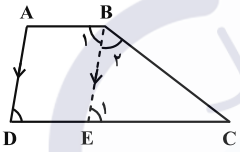
گزینه‌های «۳» و «۴» همواره برقرارند و به رابطهٔ $AB+BC>CD$ مربوط نیست. کافی است از رأس B خطی موازی ساق AD رسم کنیم تا قاعدهٔ CD را در نقطهٔ E قطع کند. چهارضلعی $ABED$ متوازی‌الاضلاع است. در مثلث BEC نامساوی مثلثی را می‌نویسیم:



$$BE+EC>BC \xrightarrow{+DE} \overbrace{BE}^{AD}+(\overbrace{EC+DE}^{CD})>BC+\overbrace{DE}^{AB}$$

$$\Rightarrow AD+CD>AB+BC$$ (گزینهٔ «۳»)

به طریق مشابه اگر نامساوی مثلثی $BC+CE>BE$ را بنویسیم به نامساوی گزینهٔ «۴» می‌رسیم. همچنین با توجه به فرض، در این شکل داریم:



$$\begin{cases} AB+BC>CD \\ CD=CE+DE \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB+BC>CE+\overbrace{DE}^{AB}\Rightarrow BC>CE$$

در مثلث BEC، چون $BC>CE$، پس $\hat{E}_۱>\hat{B}_۲$. واضح است که $\hat{E}_۱=\hat{D}=\hat{B}_۱$، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{D}>\hat{B}_۲\Rightarrow \hat{D}>\hat{B}-\hat{B}_۱ \xrightarrow{\hat{B}_۱=\hat{D}} ۲\hat{D}>\hat{B}$$ (گزینهٔ «۱»)

تنها رابطهٔ گزینهٔ «۲» نتیجه‌گیری نمی‌شود.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۷)

۱- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید مساحت مثلث ABC برابر S باشد، در این صورت داریم:

$$h_a=\frac{2S}{a}\quad,\quad h_b=\frac{2S}{b}\quad,\quad h_c=\frac{2S}{c}$$

با جای‌گذاری این مقادیر، رابطهٔ صورت سوال به شکل زیر درمی‌آید:

$$h_a=\frac{1}{2}h_b+\frac{1}{3}h_c\Rightarrow\frac{2S}{a}=\frac{2S}{2b}+\frac{2S}{3c}$$

$$\xrightarrow{+2S}\frac{1}{a}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\xrightarrow[c=6]{b=15}\frac{1}{a}=\frac{1}{30}+\frac{1}{18}=\frac{3+5}{90}$$

$$\Rightarrow a=\frac{90}{8}=11/25$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

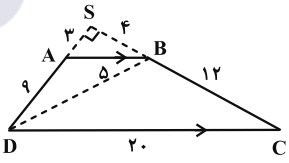
۲- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله حسنی)

نقطهٔ تقاطع امتداد ساق‌های DA و CB را S درنظر می‌گیریم.

چون $AB\parallel DC$ پس بنابه تعمیم قضیهٔ تالس داریم: $\frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{DC}$

$$\Rightarrow\frac{SA}{SA+9}=\frac{SB}{SB+12}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4SA=SA+9\Rightarrow SA=3\\4SB=SB+12\Rightarrow SB=4\end{cases}$$



چون بین اندازهٔ اضلاع مثلث SAB، رابطهٔ فیثاغورس $(3^2+4^2=5^2)$ برقرار است، پس بنابه عکس قضیهٔ فیثاغورس $\hat{S}=90^\circ$ است. اکنون بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ SBD داریم:

$$BD^2=SB^2+SD^2=4^2+12^2=16+144=160$$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۳- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

دو زاویهٔ OBH و CAH هر دو متمم زاویهٔ C هستند، پس برابر یکدیگرند.

$$\left.\begin{matrix}O\hat{B}H=C\hat{A}H\\O\hat{H}B=A\hat{H}C=90^\circ\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}}\overset{\Delta}{OBH}\sim\overset{\Delta}{CAH}$$

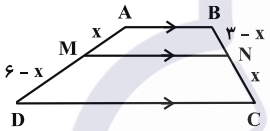
$$\Rightarrow\frac{OH}{CH}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{6}{BH+1}=\frac{BH}{12}\Rightarrow BH(BH+1)=72=8\times9$$

در نتیجه $BH=8$.

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

با فرض $AM=CN=x$ داریم: $BN=3-x\quad,\quad MD=6-x$



طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم: $\frac{x}{6-x}=\frac{3-x}{x}$

$$\Rightarrow x^2=x^2-9x+18\Rightarrow x=2\Rightarrow BN=3-x=1$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحهٔ ۳۷)

۵- **گزینهٔ «۳»** (حامد قاسمیان)

سه مثلث شکل، دوبه‌دو با هم متشابه‌اند (به حالت تساوی زوایا)، لذا داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{BMN}\Rightarrow\frac{4}{5+y}=\frac{3}{7/5}\Rightarrow y=5$$

$$\overset{\Delta}{PQC}\sim\overset{\Delta}{BMN}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{3}{3}\Rightarrow x=2$$

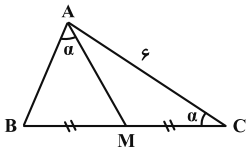
در نتیجه: $x+y=7$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۶- **گزینهٔ «۴»** (روح‌اله حسنی)

دو مثلث ABM و ABC به حالت (ز ز) متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{BM}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{BC}\quad(1)\qquad\Rightarrow AB^2=BM\times BC$$



و چون $BM=\frac{BC}{۲}$، لذا داریم:

$$AB^۲=\frac{BC}{۲}\times BC=\frac{BC^۲}{۲}\Rightarrow\frac{AB^۲}{BC^۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

پس بنابر رابطهٔ (۱) داریم $\frac{AM}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، پس:

$$AM=\frac{AC}{\sqrt{۲}}$$

طبق فرض $AC=۶$ است، بنابراین:

$$AM=\frac{۶}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۷- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملونی)

$$\left.\begin{array}{l}AB\parallel DE\Rightarrow \overset{\Delta}{ABF}\sim\overset{\Delta}{EDF}\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{BF}{DF}\\ BG\parallel AD\Rightarrow \overset{\Delta}{BGF}\sim\overset{\Delta}{DAF}\Rightarrow\frac{BG}{AD}=\frac{BF}{DF}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{BG}{AD}$$

$$\Rightarrow\frac{۹}{۱۲}=\frac{۴}{AD}\Rightarrow AD=\frac{۱۶}{۳}=۵\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

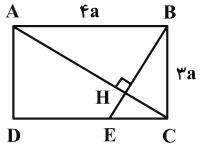
۸- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

با فرض $AB=۴a$ و $BC=۳a$، طبق قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $AC=۵a$.

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$BC^۲=CH\times AC\Rightarrow(۳a)^۲=CH\times۵a\Rightarrow CH=\frac{۹}{۵}a$$

$$\Rightarrow AH=۵a-\frac{۹}{۵}a=\frac{۱۶}{۵}a$$



دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HEC و ABC با هم متشابه‌اند (چرا؟) و داریم:

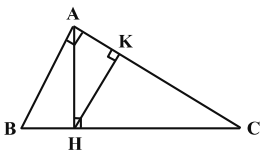
$$\frac{HE}{۳a}=\frac{\frac{۹}{۵}a}{۴a}\Rightarrow HE=\frac{۲۷}{۲۰}a\Rightarrow\frac{HE}{AB}=\frac{\frac{۲۷}{۲۰}a}{۴a}=\frac{۲۷}{۸۰}\simeq\frac{۲۷}{۸۱}=\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۴)

۹- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

از نقطهٔ H (پای ارتفاع وارد بر وتر در مثلث ABC)، عمود HK را بر ضلع AC رسم می‌کنیم. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\left.\begin{array}{l}AB^۲=BH\times BC\\ AC^۲=CH\times BC\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\frac{BH}{CH}\qquad(*)$$



از طرفی AB و HK هر دو بر ضلع AC عمودند، پس با یکدیگر موازی بوده و در نتیجه طبق قضیهٔ تالس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

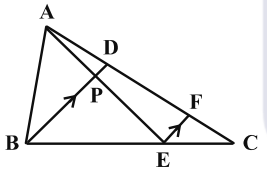
$$HK\parallel AB\Rightarrow\frac{AK}{CK}=\frac{BH}{CH}\xrightarrow{(*)}\frac{AK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\left(\frac{۶}{۹}\right)^۲$$

$$=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲=\frac{۴}{۹}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (محمد خندان)

ابتدا پاره‌خط EF را موازی با BD رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{CBD}:EF\parallel BD\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{CF}{DF}=\frac{CE}{BE}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow DF=۳CF\quad(۱)$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AD}{DC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AD}{CF+DF}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\frac{AD}{۴CF}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AD}{CF}=۲\xrightarrow{DF=۳CF}\frac{AD}{DF}=\frac{۲}{۳}$$

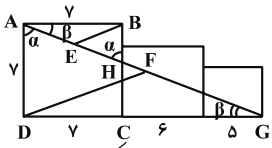
$$\overset{\Delta}{AEF}:PD\parallel EF\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}}\frac{AP}{PE}=\frac{AD}{DF}=\frac{۲}{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد ناری‌ابیانه)*

مثلث‌های ABH و ADG به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند. BE و DF میانه‌های وارد بر وتر این دو مثلث هستند و نسبت میانه‌ها با نسبت اضلاع برابر است، بنابراین:

$$\frac{BE}{DF}=\frac{AB}{DG}=\frac{۷}{۷+۶+۵}=\frac{۷}{۱۸}$$



(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد هنران)*

بررسی گزینه‌ها:

از به هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود (نادرستی گزینهٔ «۱») که محیط این متوازی‌الاضلاع برابر با مجموع طول دو قطر چهارضلعی اولیه است. (درستی گزینهٔ «۳»)

از تقاطع نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع، مستطیل تشکیل می‌شود. (نادرستی گزینهٔ «۲»)

نادرستی گزینهٔ «۴» را در حالت کلی بررسی کنید.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(حامد معنوی)*

ضلع و قطر مربع بزرگ را به ترتیب a و d و ضلع و قطر مربع کوچک را به ترتیب a' و d' در نظر می‌گیریم:

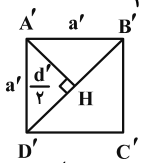
$$\frac{\text{مساحت مربع بزرگ}}{\text{مساحت مربع کوچک}}=(\frac{a}{a'})^۲=۲\Rightarrow\frac{a}{a'}=\sqrt{۲}$$

از طرفی نسبت قطرهای دو مربع نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d'}=\frac{\sqrt{۲}a}{\sqrt{۲}a'}=\frac{a}{a'}=\sqrt{۲}\Rightarrow d'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}d=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲}a)=a$$

در مربع، قطرها هم‌اندازه و عمودمنصف یکدیگرند، بنابراین فاصلهٔ رأس مربع کوچک‌تر از قطر آن، همان $\frac{d'}{۲}$ است. پس:

$$\frac{A'H}{a}=\frac{\frac{d'}{۲}}{a}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{۱}{۲}$$

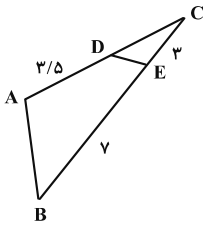


(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$\left.\begin{matrix}D\hat{A}B+D\hat{E}B=۱۸۰^\circ\\ D\hat{E}C+D\hat{E}B=۱۸۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow D\hat{A}B=D\hat{E}C$$

بنابراین دو مثلث ABC و DEC بنابر حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند. با محاسبهٔ اندازه DC، نسبت تشابه را مشخص کرده و سپس نسبت مساحت‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEC}\Rightarrow\frac{DC}{BC}=\frac{CE}{AC}\Rightarrow\frac{DC}{۱۰}=\frac{۳}{DC+۳/۵}$$

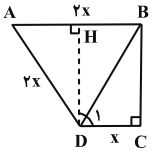
$$\Rightarrow DC^۲+۳/۵DC-۳۰=۰\Rightarrow ۲DC^۲+۷DC-۶۰=۰$$

$$\Rightarrow(۲DC+۱۵)(DC-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}DC=-۷/۵ & \text{غ‌ق‌ق}\\ DC=۴ & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}}=(\frac{DC}{BC})^۲=(\frac{۴}{۱۰})^۲=۰/۱۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(محمد ناری‌ابیانه)*



روش اول: اگر $CD=x$، پس $AD=AB=۲x$. حال از D بر AB عمود می‌کنیم، داریم: $AH=x$

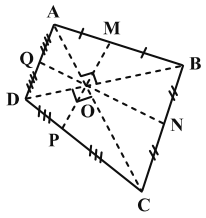
$$DH=\sqrt{(۲x)^۲-x^۲}=x\sqrt{۳}\Rightarrow BC=x\sqrt{۳}$$

$$\tan\hat{D}_۱=\frac{x\sqrt{۳}}{x}=\sqrt{۳}\Rightarrow\hat{D}_۱=۶۰^\circ$$

روش دوم: از D ارتفاع DH را بر AB رسم می‌کنیم. مطابق شکل چهارضلعی $BCDH$ مستطیل است، پس $BH=x$ و در نتیجه $AH=x$ است، یعنی ارتفاع DH در مثلث ADB، میانهٔ وارد بر ضلع AB است، پس $AD=BD$ و در نتیجه مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{D}_۱=A\hat{B}D=۶۰^\circ$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۲)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*



چون چهارضلعی تشکیل شده از وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است، پس قطرهای آن بر هم عمودند. اگر O محل برخورد قطرها باشد و M، N، P و Q به ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA باشد، آن‌گاه در چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB، BOC، COD و DOA میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین:

$$OM=\frac{AB}{۲}\ ،\ ON=\frac{BC}{۲}\ ،\ OP=\frac{DC}{۲}\ ،\ OQ=\frac{AD}{۲}$$

$$\Rightarrow OM+ON+OP+OQ=\frac{AB}{۲}+\frac{BC}{۲}+\frac{CD}{۲}+\frac{AD}{۲}$$

$$=\frac{۵}{۲}+\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۵}{۲}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}=۵+۳/۵\sqrt{۲}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق فرض، تعداد قطرهای $(n-3)$ ضلعی، نصف تعداد قطرهای n ضلعی است، پس داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=2\times\frac{(n-3)(n-6)}{2}\xrightarrow[n\neq3]{+(n-3)}n=2(n-6)$$

$$\Rightarrow n=2n-12\Rightarrow n=12$$

حال می‌دانیم تعداد قطرهای $(12+k)$ ضلعی، ۲/۵ برابر تعداد قطرهای ۱۲ ضلعی است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{(12+k)(9+k)}{2}=\frac{5}{2}\times\frac{12\times9}{2}$$

$$\Rightarrow 2(k^2+21k+108)=5\times12\times9$$

$$\xrightarrow{+2}k^2+21k+108=270\Rightarrow k^2+21k-162=0$$

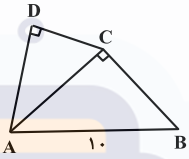
$$\Rightarrow (k+27)(k-6)=0\Rightarrow\begin{cases}k=-27 & \text{غ ق ق}\\ k=6\end{cases}$$

بنابراین باید ۶ واحد به تعداد رأس‌های ۱۲ ضلعی اضافه کنیم تا تعداد قطرهای آن ۲/۵ برابر شود.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۵۵)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

چون $AC\times DC=AD\times BC$



پس $\frac{DC}{BC}=\frac{AD}{AC}$ و چون $\hat{D}=\hat{C}$ پس دو مثلث ADC و ACB (به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین) متشابه‌اند. اگر k نسبت تشابه دو مثلث ADC و ACB باشد، آنگاه:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=k^2\Rightarrow S_{ADC}=k^2S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=S_{ABC}+k^2S_{ABC}=(k^2+1)S_{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{ABC}}=k^2+1$$

طبق فرض داریم $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{41}{25}$، پس:

$$k^2+1=\frac{41}{25}\Rightarrow k^2=\frac{41}{25}-1=\frac{16}{25}\Rightarrow k=\frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{AB=10}AC=8\ ,\quad DC=\frac{4}{5}BC\ ,\quad AD=\frac{4}{5}AC=\frac{32}{5}=6/4$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BC^2=AB^2-AC^2=10^2-8^2=100-64=36$$

$$\Rightarrow BC=6\Rightarrow DC=\frac{4}{5}BC=\frac{24}{5}=4/8$$

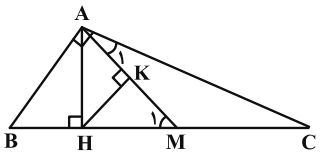
بنابراین محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$AB+BC+CD+AD=10+6+4/8+6/4=27/2$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:



$$S_{AHM}=\frac{1}{32}BC^2=\frac{1}{32}(2AM)^2=\frac{1}{8}AM^2$$

$$=\frac{1}{2}\times HK\times AM\Rightarrow HK=\frac{1}{4}AM$$

$$\overset{\Delta}{AMC}:AM=CM=\frac{1}{2}BC\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{C}$$

$$\overset{\Delta}{AMC}:\text{(زاویهٔ خارجی)}\ \hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C}=2\hat{C}<60^\circ$$

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ طول وتر باشد، یکی از زاویه‌های حاده برابر ۱۵ درجه است، پس $\hat{M}_1$ برابر ۱۵ یا ۷۵ درجه است. چون $\hat{M}_1<60^\circ$ است، پس $\hat{M}_1=15^\circ$ است و $\hat{C}=7/5^\circ$ و در نتیجه $\hat{B}=82/5^\circ$ و در نهایت $\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{82/5}{7/5}=11$.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۴)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

$$\overset{\Delta}{BAD}:\frac{BM}{MA}=\frac{BQ}{QD}=1\Rightarrow\begin{cases}MQ\parallel AD\\ MQ=\frac{AD}{2}\end{cases}\quad(1)$$

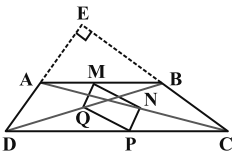
$$\overset{\Delta}{CAD}:\frac{CN}{NA}=\frac{CP}{PD}=1\Rightarrow\begin{cases}NP\parallel AD\\ NP=\frac{AD}{2}\end{cases}\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}MQ\parallel NP\\ MQ=NP\end{cases}\Rightarrow MNPQ\ \text{متوازی الاضلاع است.}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=1\Rightarrow\begin{cases}MN\parallel BC\\ MN=\frac{BC}{2}\end{cases}$$

چون امتداد اضلاع AD و BC برهم عمودند، پس دو پاره‌خط MQ و MN نیز برهم عمودند و در نتیجه چهارضلعی $MNPQ$ مستطیل است. داریم:

$$S_{MNPQ}=MN\times MQ=\frac{BC}{2}\times\frac{AD}{2}=5\Rightarrow BC\times AD=20$$



(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۴)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

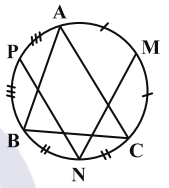
$$۶۶^\circ = P\hat{N}M = \frac{\overset{\frown}{PAM}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{AM}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{AM} = ۱۳۲^\circ$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲\overset{\frown}{AP}+۲\overset{\frown}{AM} = ۲۶۴^\circ$$

$$\xrightarrow[۲\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AC}]{۲\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{AB}} \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC} = ۲۶۴^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - (\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}) = ۳۶۰^\circ - ۲۶۴^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۹۶^\circ$$

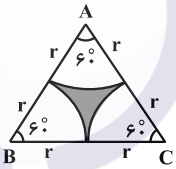
$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۴۸^\circ$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمد فندران)*

اگر طول شعاع قطاع دایره‌ها r باشد، طول هر سه ضلع مثلث برابر $۲r$ بوده و نوع مثلث، متساوی‌الاضلاع است.



مساحت ناحیهٔ رنگی برابر تفاضل مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه قطاع دایره با شعاع r و زاویه ۶۰ درجه است، بنابراین:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{ABC} - ۳S_{\text{قطاع دایره}} = \frac{(۲r)^۲\sqrt{۳}}{۴} - ۳(\frac{\pi r^۲ \times ۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ})$$

$$= r^۲\sqrt{۳} - \frac{\pi r^۲}{۲} = r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}) = ۴\sqrt{۳} - ۲\pi = ۴(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow r = ۲$$

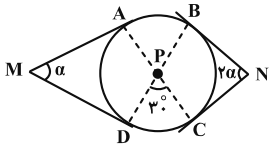
محیط ناحیهٔ رنگی برابر طول سه کمان دایره به شعاع ۲ و زاویهٔ ۶۰ درجه است.

$$\text{محیط ناحیهٔ رنگی} = ۳(\frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha) = ۳(\frac{\pi \times ۲ \times ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}) = ۲\pi$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ و ۲۰)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمد فندران)*

طبق رابطهٔ زاویهٔ بین دو وتر درون دایره داریم:



$$C\hat{P}D = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$$

حال طبق رابطهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر خارج دایره داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \hat{N} = ۲\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BC}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$۳\alpha = \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۷)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

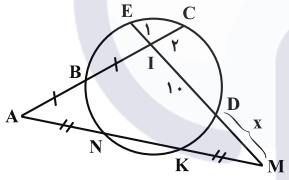
در گزینهٔ «۳» به ازای $x = ۳$، مقدار شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز دایره از خط با هم برابرند یعنی خط و دایره مماس هستند. در گزینهٔ «۱» برای $x = \frac{۳}{۲}$ خط و دایره متقاطع‌اند زیرا خط از مرکز دایره می‌گذرد، در گزینهٔ «۲» برای $x = ۲$ خط و دایره متقاطع‌اند، در گزینهٔ «۴» برای $x = \frac{۷}{۲}$ خط و دایره بیرون از هم هستند.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمد فندران)*

طبق رابطهٔ طولی درون دایره داریم:

$$BI \times CI = EI \times DI \Rightarrow BI \times ۲ = ۱ \times ۱۰ \Rightarrow BI = AB = ۵$$



حال طبق رابطهٔ طولی برای امتداد وترها در خارج دایره داریم:

$$\begin{cases} AB \times AC = AN \times AK \\ MD \times ME = MK \times MN \end{cases}$$

طبق فرض $AN = MK$، پس $AK = MN$ و در نتیجه طرف راست تساوی‌های بالا با هم برابرند و داریم:

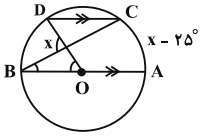
$$AB \times AC = MD \times ME \Rightarrow ۵ \times (۵+۷) = x(x+۱۱)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^۲ + ۱۱x - ۶۰}_{(x+۱۵)(x-۴)} = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۴$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۱۸)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

کمان‌های محصور بین وترهای موازی دو دایره، با هم برابرند، پس:



$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = x - ۲۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{O} = x - ۲۵^\circ \\ \hat{B} = \dfrac{x-۲۵^\circ}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویهٔ خارجی در مثلث}} x=\hat{B}+\hat{O}\Rightarrow x=x-25^\circ+\frac{x-25^\circ}{2}$$

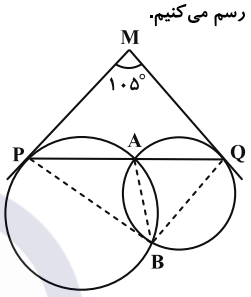
$$\Rightarrow 25^\circ=\frac{x-25^\circ}{2}\Rightarrow x=75^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}=50^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۷)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

وتر مشترک AB را رسم می‌کنیم.



زوایای ظلّی $A\hat{P}M$ و $A\hat{Q}M$ به ترتیب با زوایای محاطی $A\hat{B}P$ و $A\hat{B}Q$ برابر است (چرا؟)، لذا داریم:

$$P\hat{B}Q=A\hat{B}P+A\hat{B}Q=A\hat{P}M+A\hat{Q}M \qquad (1)$$

در مثلث PMQ این‌طور می‌نویسیم که:

$$A\hat{P}M+A\hat{Q}M=180^\circ-105^\circ=75^\circ$$

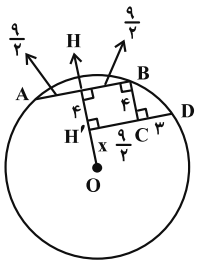
در نتیجه از رابطهٔ (۱) داریم: $P\hat{B}Q=75^\circ$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

از O بر وتر AB، عمود OH را رسم می‌کنیم که آن را نصف می‌کند، یعنی:

$$AH=HB=\frac{9}{2}$$



همچنین CD را امتداد می‌دهیم تا OH را در H' قطع کند. فرض می‌کنیم $OH'=x$، لذا با توجه به این‌که $H'HBC$ مستطیل است، داریم:

$$\begin{cases}HH'=BC=4\\ CH'=BH=\frac{9}{2}\end{cases}$$

چنانچه قضیهٔ فیثاغورس را در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $OH'D$ و OHB بنویسیم، آن‌گاه:

$$x^2+(\frac{9}{2}+3)^2=(x+4)^2+(\frac{9}{2})^2=R^2$$

$$\Rightarrow x^2+(\frac{15}{2})^2=(x+4)^2+(\frac{9}{2})^2\xrightarrow{\text{نهایتاً}}x=\frac{5}{2}$$

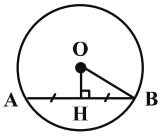
حال با جای‌گذاری x داریم:

$$R^2=(\frac{5}{2})^2+(\frac{15}{2})^2=(\frac{5}{2})^2(1+9)\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۸)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

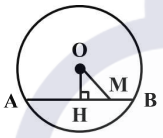
ابتدا مطابق شکل زیر، طول وتر AB را می‌یابیم:



$$\begin{cases}OB=R=3\sqrt{17}\\ OH=4\sqrt{2}\end{cases}\xrightarrow[\text{در }\triangle BOH]{\text{فیثاغورس}}BH=\sqrt{153-32}=11$$

در نتیجه $AB=2BH=22$.

طبق فرض، نقطهٔ M به فاصلهٔ ۹ واحد از مرکز دایره قرار دارد، پس مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases}OH=4\sqrt{2}\\ OM=9\end{cases}\xrightarrow[\text{در }\triangle OHM]{\text{فیثاغورس}}HM=\sqrt{81-32}=7$$

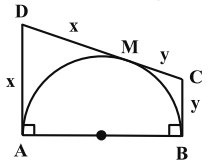
لذا با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}AM=AH+HM=11+7=18\\ BM=BH-HM=11-7=4\end{cases}\Rightarrow\frac{AM}{BM}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره، از نقطه‌ای خارج آن، با هم برابرند، پس مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases}AD=DM=x\\ BC=CM=y\end{cases}$$

طبق فرض داریم:

$$\text{محیط ذوزنقهٔ }ABCD=AB+2x+2y=50$$

$$\xrightarrow{AB=16}2(x+y)=34\Rightarrow x+y=17$$

مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ برابر می‌شود با:

$$S=\frac{(AD+BC)\times AB}{2}=\frac{17\times16}{2}=17\times8=136$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

دایره‌ها چهار مماس مشترک دارند یعنی متخارج هستند، پس:

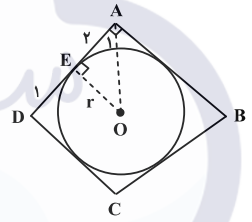
$$OO' > R + R' \Rightarrow 2n + 5 > n + 2n + 1 \Rightarrow 4 > n$$
$$\Rightarrow n = 1, 2, 3$$

مجموع مقادیر طبیعی n برابر ۶ است.

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(حامد قاسمیان)*

از نقطهٔ O مرکز دایره، به نقطهٔ E (نقطهٔ تماس ضلع AD و دایره) وصل کرده و مثلث OEA را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم مرکز دایرهٔ محاطی یک چندضلعی، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی آن چندضلعی است، پس AO نیمساز زاویهٔ A است و در نتیجه $\hat{A}_1 = 45^\circ$ و مثلث OAE قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین است، پس: $r = AE = 2$



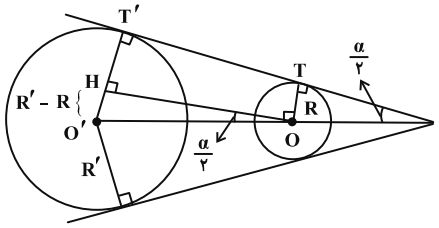
داریم: $r = \frac{S}{p} \xrightarrow[r=2]{S=20} p = 10$: شعاع دایرهٔ محاطی داخلی

$$\Rightarrow 2p = AB + BC + CD + DA = 2(AD + BC)$$
$$\Rightarrow p = AD + BC \Rightarrow 10 = 3 + BC \Rightarrow BC = 7$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

با رسم شکل داریم:



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R' - R)^2} \Rightarrow 3\sqrt{6} = \sqrt{d^2 - (5\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2}$$
$$\Rightarrow 54 = d^2 - 18 \Rightarrow d^2 = 72 \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$$

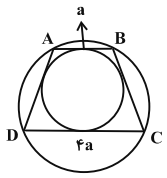
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R' - R}{OO'} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق تمرین ۴ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی، اگر ذوزنقه هم محیطی و هم محاطی باشد آن گاه مساحت ذوزنقه برابر حاصل‌ضرب میانگین حسابی و میانگین هندسی دو قاعده است، پس با فرض $AB = a$ داریم:



$$S_{ABCD} = \left(\frac{4a + a}{2}\right).\sqrt{4a.a} = \left(\frac{5}{2}a\right)(2a) = 5a^2 = 10$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{2}$$

از طرفی: $S = \frac{(4a + a)h}{2} = 10 \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}h}{2} = 10$

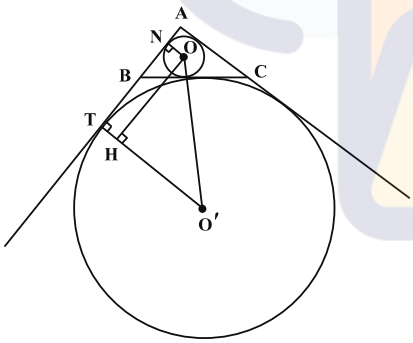
$$\Rightarrow h = \frac{20}{5\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

در مثلث ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ فیثاغورس}} \hat{A} = 90^\circ$$



بنابراین: $\overset{\Delta}{ABC}$ مساحت : $S = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$

$\overset{\Delta}{ABC}$ نصف محیط : $p = \frac{8 + 15 + 17}{2} = 20$

$$\Rightarrow \begin{cases} NO = r = \frac{S}{p} = \frac{60}{20} = 3 \\ O'T = r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{60}{20 - 17} = \frac{60}{3} = 20 \end{cases}$$

از طرفی: $AN = p - a = 3$ و $AT = p = 20$

پس: $NT = AT - AN = 20 - 3 = 17$

اکنون از O بر $O'T$ عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:

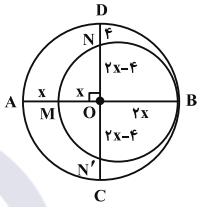
$$\begin{cases} OH = NT = ۱۷ \\ O'H = O'T - TH = O'T - ON = ۲۰ - ۳ = ۱۷ \end{cases}$$

بنابراین: $OO' = \sqrt{OH^۲ + O'H^۲} = \sqrt{۱۷^۲ + ۱۷^۲} = ۱۷\sqrt{۲}$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۳۰)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به معلومات مسئله می‌توان شکل داده شده را به صورت زیر کامل کرد:



حال طبق شکل و روابط طولی در دایرهٔ کوچک‌تر داریم:

$$x(۲x) = (۲x - ۴)^۲$$

$$۲x^۲ - ۱۶x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸ \pm ۴\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ - ۲\sqrt{۲} & \text{غ ق ق} \\ x = ۴ + ۲\sqrt{۲} & \text{ق ق} \end{cases}$$

اگر $x = ۴ - ۲\sqrt{۲}$ آن‌گاه طول ON منفی می‌شود.

از طرفی طول قطر دایرهٔ کوچک‌تر برابر $۳x$ است بنابراین شعاع دایرهٔ کوچک‌تر $\frac{۳x}{۲}$ و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر $۲x$ است و اختلاف آن‌ها برابر می‌شود با $\frac{x}{۲} = ۲ + \sqrt{۲}$.

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

در صورتی که h_a، h_b و h_c ارتفاع‌های مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷/۵} + \frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۱۵} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۶+۴+۳}{۳۰} = \frac{۱۳}{۳۰} \Rightarrow r = \frac{۳۰}{۱۳}$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

می‌دانیم طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم محیط بر دایره با شعاع r برابر $۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۸}$ و طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره با شعاع r برابر $۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۸}$ است. چون این دو هشت‌ضلعی منتظم متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است و داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{۲r\tan ۲۲/۵^\circ}{۲r\sin ۲۲/۵^\circ}\right)^۲ = \left(\frac{\tan ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ}\right)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲ ۲۲/۵^\circ}$$

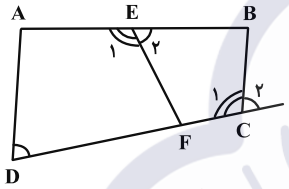
از طرفی: $\cos^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{۱+\cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$، پس:

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴}{۲+\sqrt{۲}} \times \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}} = \frac{۴(۲-\sqrt{۲})}{۲} = ۲(۲-\sqrt{۲}) = ۴ - ۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۳۰)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

یک چهارضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دو زاویه روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند. بنابراین با توجه به این‌که $AEFD$ و $EBCF$ محاطی هستند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{(محاطی)} \quad AEFD \Rightarrow \hat{D} + \hat{E}_۱ = ۱۸۰^\circ \\ \text{(محاطی)} \quad EBCF \Rightarrow \hat{E}_۲ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{C}_۱ + \hat{D} + \underbrace{\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲}_{۱۸۰^\circ} = ۳۶۰^\circ$$

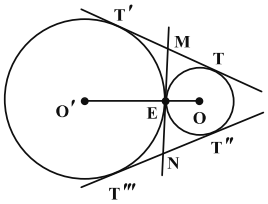
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}_۲$$

طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌گیریم $AD \parallel BC$ است.

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۷)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

مطابق کتاب درسی طول مماس مشترک خارجی در دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' برابر $TT' = ۲\sqrt{RR'}$ است.



با توجه به شکل از نقطهٔ M بر دو دایره مماس رسم شده است. پس:

$$\begin{cases} ME = MT \\ ME = MT' \end{cases} \Rightarrow ME = \frac{TT'}{۲} = \sqrt{RR'}$$

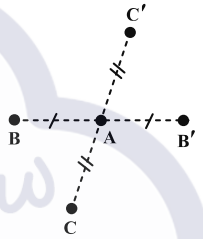
به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$$NE = \frac{T''T'''}{۲} = \sqrt{RR'} \Rightarrow MN = ME + NE = ۲\sqrt{RR'}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱- **گزینهٔ «۳»** (محمد خندان)

مطابق شکل این تناظر هر نقطه را به یک نقطه تصویر می‌کند و برعکس. پس M یک تبدیل است. با توجه به این‌که A همواره وسط پاره‌خط واصل بین هر نقطه و تصویرش است، پس این تبدیل همواره اندازه پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند و طولپا است. نقطهٔ ثابت این تبدیل فقط نقطهٔ A است که تصویرش بر خودش منطبق می‌باشد.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** (حامد قاسمیان)

بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط با محور بازتاب موازی یا بر محور عمود باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۳- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

می‌دانیم در تبدیل دوران، اندازهٔ زاویه ثابت می‌ماند پس زوایای نظیر با هم برابرند:

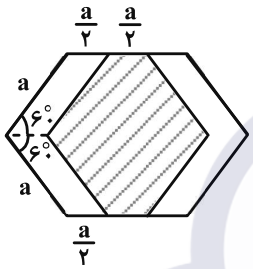
$$A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \Rightarrow \alpha + ۲۰^\circ = ۳\alpha - ۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

$$\text{زاویهٔ دوران} = A\hat{O}A' = \alpha + ۲۰^\circ + \alpha = ۸۰^\circ$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** (محمد خندان)

اگر شش‌ضلعی منتظم را با طول ضلع a فرض کنیم، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر تفاضل مساحت شش‌ضلعی منتظم از مساحت دو متوازی‌الاضلاع یکسان با طول اضلاع a و $\frac{a}{۲}$ و زاویهٔ بین ۶۰ درجه است، بنابراین:



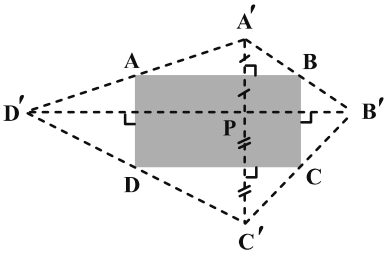
$$\begin{cases} S_{\text{شش‌ضلعی منتظم}} = ۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} \\ S_{\text{ناحیهٔ رنگی}} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} - ۲S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} \\ = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} - ۲(a \times \frac{a}{۲} \times \sin ۶۰^\circ) = a^۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{ناحیهٔ رنگی}}}{S_{\text{شش‌ضلعی منتظم}}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۵- **گزینهٔ «۴»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

مطابق شکل، در چهارضلعی $A'B'C'D'$ قطرها بر هم عمودند و داریم:



$$\begin{cases} A'C' = 2AD = 4 \\ B'D' = 2AB = 6 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} A'C'.B'D' = \frac{1}{2}(4)(6) = 12$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۶- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

می‌دانیم مرکز دوران روی عمودمنصف پاره‌خط‌های AA' و BB' است.

بنابراین معادلهٔ عمودمنصف‌های این دو پاره‌خط را می‌نویسیم، محل برخورد این دو خط مرکز دوران است.

$$AA' \text{ وسط } M \begin{cases} x_M = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

$$, \quad m_{AA'} = \frac{2-0}{3-(-2)} = \frac{2}{5} \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{2}$$

معادلهٔ عمودمنصف AA' : $y - 1 = -\frac{5}{2}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{4}$

$$BB' \text{ وسط } N \begin{cases} x_N = \frac{6+(-6)}{2} = 0 \\ y_N = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$, \quad m_{BB'} = \frac{6-3}{6-(-6)} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_2 = -4$$

معادلهٔ عمودمنصف BB' : $y - \frac{9}{2} = -4(x-0) \Rightarrow y = -4x + \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{4} \\ y = -4x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{2}x + \frac{9}{4} = -4x + \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

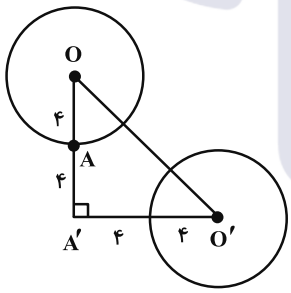
پس $O(1/5, -1/5)$ مرکز دوران است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۴۲)

۷- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

طبق فرض $OA' = 2OA = 8$ است. طبق تعریف دوران اگر O' مرکز دایرهٔ C' باشد، آن‌گاه $OA' = O'A' = 8$ است و در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $OA'O'$ داریم:



$$OO'^2 = OA'^2 + O'A'^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2 \Rightarrow OO' = 8\sqrt{2}$$

طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:

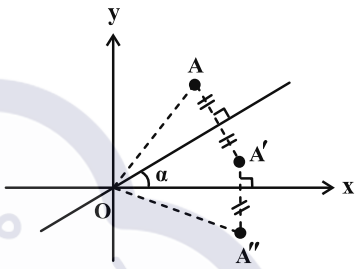
$$\sqrt{OO'^2 - (R+R')^2} = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 - (4+4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

شیب خط به معادلهٔ $x-\sqrt{۳}y=۰$ برابر $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است. اگر زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد را α بنامیم داریم $\tan\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$.

پس: $\alpha=۳۰^\circ$.



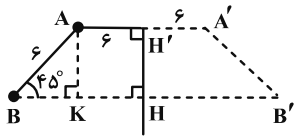
بنابه تمرین صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی $A\hat{O}A''=۲\alpha=۶۰^\circ$ و چون $AO=A''O$ پس مثلث AOA'' متساوی‌الاضلاع است. بنابراین:

$$AA''=AO=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۵-۰)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

ابتدا شکل مورد نظر صورت سوال را رسم می‌کنیم:



از نقطهٔ A، عمود AK را بر BB' رسم می‌کنیم. می‌دانیم طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۴۵° در یک مثلث قائم‌الزاویه، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ طول وتر است، پس:

$$HH'=AK=۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

پس:

$$BK=AK=۳\sqrt{۲}\Rightarrow BH=۶+۳\sqrt{۲}$$

$$S_{ABB'A}=\frac{(AA'+BB')}{۲}\times HH'=\frac{(۲AH'+۲BH)}{۲}\times HH'$$

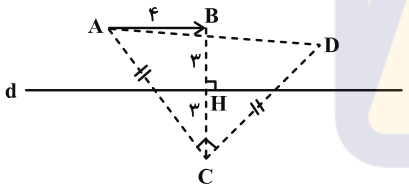
$$=(AH'+BH)\times HH'=(۶+۳\sqrt{۲}+۶)\times۳\sqrt{۲}$$

$$=۳(۴+\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲})=۳۶\sqrt{۲}+۱۸=۱۸(۲\sqrt{۲}+۱)$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

با توجه به داده‌های مسئله $AB=۴$ و $BC=۲BH$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بنابه قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۴^۲+۶^۲=۱۶+۳۶=۵۲$$

اما چون $CD=AC$ پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD داریم:

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲=۵۲+۵۲=۱۰۴$$

$$AD=\sqrt{۱۰۴}=۲\sqrt{۲۶}$$

پس:

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۴۳)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(ایمان ساریخانی)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ چون در تبدیل همانی، تصویر هر نقطهٔ خود آن نقطه است، پس طول پاره‌خط حفظ می‌شود.

ب) نادرست؛ در حالتی که $k=\pm 1$ باشد تجانس طولپا است.

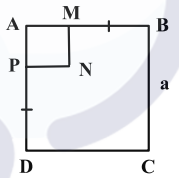
ج) درست؛ در انتقال غیرهمانی، نقطه جابه‌جا می‌شود پس نقطه ثابت تبدیل نداریم.

د) نادرست؛ تنها در حالتی که $k=1$ باشد تجانس همانی است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

مطابق شکل، طول ضلع مربع حاصل، $\frac{1}{3}$ طول ضلع مربع اولیه است و داریم:



$$\text{مساحت بین دو مربع} = S_{ABCD} - S_{AMNP} = ۳۲$$

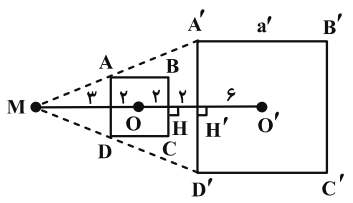
$$= a^۲ - \frac{۱}{۹}a^۲ = \frac{۸}{۹}a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

در نتیجه محیط مربع اولیه برابر می‌شود با: $۴\times ۶ = ۲۴$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

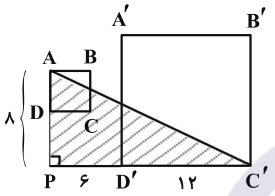
O' را مرکز مربع متجانس یافته می‌گیریم. مطابق شکل داریم:



$$\frac{MO'}{MO} = k = ۳ \Rightarrow \frac{MO'}{۵} = ۳ \Rightarrow MO' = ۱۵$$

$$\frac{a'}{a} = ۳ \Rightarrow a' = ۳\times ۴ = ۱۲$$

مطابق شکل، $HH' = ۲$ است و بیشترین فاصلهٔ نقاط مربع اولیه تا نقاط روی مربع حاصل از تجانس، همان فاصلهٔ نقاط A و C' از هم می‌باشد:



$$\overset{\Delta}{APC'} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC'^۲ = AP^۲ + PC'^۲$$

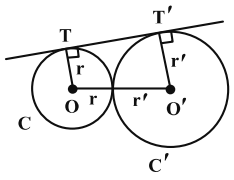
$$\Rightarrow AC'^۲ = ۸^۲ + ۱۸^۲ = ۲^۲(۴^۲ + ۹^۲)$$

$$\Rightarrow AC' = ۲\sqrt{۱۶+۸۱} = ۲\sqrt{۹۷}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(نرگس کارگر)*

طبق فرض و شکل زیر داریم:



نسبت تجانس: $k = \frac{r'}{r} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow r' = \frac{۳}{۲}r$

$$OO' = r + r' = \frac{۵}{۲}r = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} r = ۴ \\ r' = ۶ \end{cases}$$

طول مماس مشترک خارجی این دو دایرهٔ مماس خارج برابر است با:

$$TT' = ۲\sqrt{rr'} = ۲\sqrt{۴\times ۶} = ۴\sqrt{۶}$$

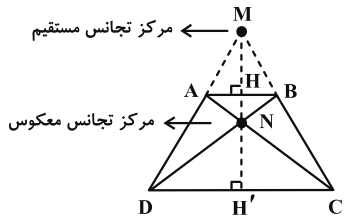
چهارضلعی $TOO'T'$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر می‌شود با:

$$S_{TOO'T'} = \frac{۱}{۲}(۴+۶)\times ۴\sqrt{۶} = ۲۰\sqrt{۶}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

ابتدا شکل متناسب با مسئله را رسم می‌کنیم:



از این که $AB \parallel CD$، نتیجه می‌شود مثلث‌های ABN و NDC متشابه‌اند، پس:

$$\frac{AN}{CN}=\frac{BN}{DN}=\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی نسبت ارتفاع‌ها نیز برابر نسبت تشابه است: **(I)**

$$\frac{NH}{NH'}=\frac{۱}{۳}$$

همچنین مثلث‌های MAB و MDC نیز متشابه‌اند، پس:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی نسبت ارتفاع‌ها نیز برابر نسبت تشابه است: **(II)**

$$\frac{MH}{MH'}=\frac{۱}{۳}$$

پس با توجه به **(I)** اگر فرض کنیم $NH=x$، آنگاه $HH'=۴x$ و با توجه به **(II)** اگر فرض کنیم $MH=y$، آنگاه $MH'=۳y$ و داریم:

$$HH'=MH'-MH=۲y$$

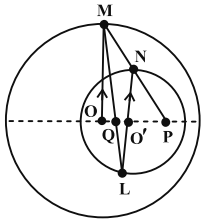
در نتیجه $۲y=۴x=۶$، پس $y=۳$ و $x=\frac{۳}{۲}$ و داریم:

$$MN=MH+NH=y+x=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(نرگس کارگر)*

در شکل زیر، نقاط P و Q به ترتیب مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایرهٔ C و C' هستند که روی خط گذرنده از مرکزهای دو دایره قرار دارند. دو شعاع موازی $O'N$ و OM را رسم می‌کنیم و شعاع $O'N$ از دایرهٔ کوچک‌تر را (از طرف O') امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ L قطع کند. فرض می‌کنیم $O'P=x$ و $O'Q=y$، در این صورت $OP=x+۱$ و $OQ=۱-y$ و داریم:



$$\overset{\Delta}{OMP}:O'N \parallel OM \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{x}{x+۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=x+۱\Rightarrow x=۱$$

$$\overset{\Delta}{OMQ}\sim\overset{\Delta}{O'LQ}\Rightarrow \frac{y}{۱-y}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}\Rightarrow \frac{y}{۱-y}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲y=۱-y\Rightarrow ۳y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

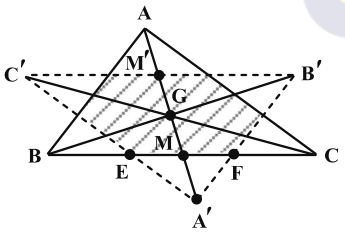
در نتیجه:

$$PQ=x+y=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

چون ضریب تجانس $k=-۱$ است، پس مثلث $A'B'C'$ همنهشت با مثلث ABC بوده و اضلاع متناظر آن‌ها با هم موازی است.



طبق خاصیت مرکز ثقل، داریم $AG=۲GM$؛ از طرفی $AG=A'G=GM+A'M$، پس $A'M=GM=\frac{۱}{۳}AM$. لذا مثلث $A'EF$ متشابه با مثلث ABC بوده و نسبت تشابه آن‌ها برابر نسبت میانه‌های متناظر $A'M$ و AM است، یعنی:

$$k_۱=\frac{A'M}{AM}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه مساحت مثلث $A'EF$ برابر $k_1^2 = \frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است. به طریق مشابه، مساحت هر یک از مثلث‌های گوشه‌ای نیز $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC می‌باشد. پس نسبت مساحت ناحیهٔ مشترک بین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC برابر می‌شود با:

$$\frac{S_{A'B'C'} - ۳(\frac{1}{9}S_{A'B'C'})}{S_{ABC}} = \frac{\frac{2}{3}S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}$$

توجه: چون دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم همنهشت‌اند، پس مساحت آن‌ها یکی است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۵۴)

۸- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

طول هر ضلع شکل را برابر a در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

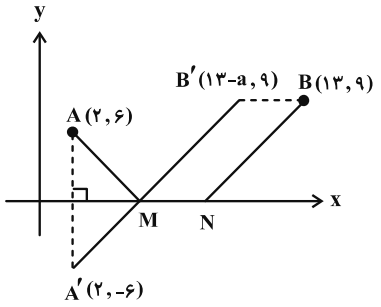
$$\underbrace{۲(\frac{1}{2}a.a.\sin ۱۵۰^\circ)}_{\text{مساحت اضافه‌شده}} = ۵a \Rightarrow \frac{a^2}{2} = ۵a$$

$$\Rightarrow a^2 = ۱۰a \xrightarrow{a \neq ۰} a = ۱۰$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۹- **گزینهٔ «۳»** (اسماق اسفندیار)

B را به اندازهٔ a در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ B' به دست آید. بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور طول‌ها را A' می‌نامیم و A' را به B' وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد $A'B'$ با محور طول‌ها، نقطهٔ M است که به ازای آن کوتاه‌ترین مسیر $AMNB$ حاصل می‌شود.



طول مسیر $AMNB$ برابر است با:

$$AM + MN + NB = A'M + MN + MB'$$

$$= A'B' + \underbrace{MN}_{a} = ۲۰ \Rightarrow A'B' = ۲۰ - a$$

$$A' = (۲, -۶) \quad , \quad B' = (۱۳ - a\ , ۹)$$

$$A'B' = \sqrt{(۲ - ۱۳ + a)^2 + (-۶ - ۹)^2} = \sqrt{(a-۱۱)^2 + ۲۲۵} = ۲۰ - a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2 - ۲۲a + ۱۲۱ + ۲۲۵ = ۴۰۰ - ۴۰a + a^2$$

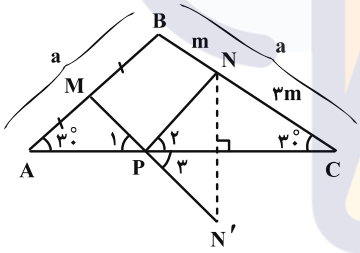
$$\Rightarrow ۱۸a = ۵۴ \Rightarrow a = ۳$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

با توجه به این‌که نقاط M و N ثابت هستند، برای حداقل شدن محیط مثلث MNP، کافی است $MP + NP$ کمترین مقدار ممکن باشد.

بازتاب نقطهٔ N نسبت به ضلع AC را N' می‌نامیم. حال نقطهٔ N' را به M وصل می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ P قطع کند.



طبق روش هرون، نقطهٔ P مطلوب سوال است و داریم $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}_3$. دو مثلث AMP و PNC به حالت (ز ز) با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AM}{NC} = \frac{AP}{PC} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{4}a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AP = ۲k \\ PC = ۳k \end{cases}$$

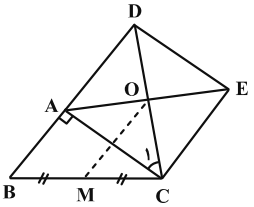
$$AC = AP + PC = ۱۰ \Rightarrow ۵k = ۱۰ \Rightarrow k = ۲$$

در نتیجه $AP = ۴$ و $PC = ۶$ و اختلاف طول آن‌ها برابر ۲ می‌شود.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۲)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

روش اول: در مثلث ABC چون رابطهٔ $AB^2+AC^2=BC^2$ برقرار است، پس مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است. بنابراین:



$$\cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\quad,\quad \text{Sin}\,\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

همچنین در مربع $ADEC$ طول قطر DC برابر است با:

$$DC=AC\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}\Rightarrow OC=\frac{DC}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

از طرفی $\hat{C}_۱=۴۵^\circ$ می‌باشد. اکنون در مثلث OMC بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$OM^2=OC^2+MC^2-۲OC.MC\cos(\hat{C}_۱+\hat{C})$$

از طرفی:

$$\cos(۴۵^\circ+\hat{C})=\cos ۴۵^\circ\cos\hat{C}-\sin ۴۵^\circ\sin\hat{C}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۴}{۵}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۳}{۵}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$OM^2=(۴\sqrt{۲})^2+۵^2-۲\times۴\sqrt{۲}\times۵\times(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})$$

$$=۳۲+۲۵-۸=۴۹\Rightarrow OM=۷$$

روش دوم: (با استفاده از مطالب کتاب درسی هندسهٔ (۱))

می‌دانیم: $\begin{cases}AM=CM\\AO=CO\end{cases}\Rightarrow$ OM روی عمودمنصف AC قرارداد

پس $OM\perp AC$ خواهد بود. از طرفی:

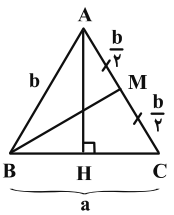
$$\begin{cases}BD\perp AC\\BD=AB+AD=۶+۸=۱۴\end{cases}$$

پس OM موازی BD است؛ حال در مثلث BCD طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OM}{BD}=\frac{CM}{CB}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{BD=۱۴}OM=۷$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد هنران)*



روش اول: مطابق شکل بنابر قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC و همچنین قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\begin{cases}a^2+b^2=\frac{b^2}{۲}+۲m_b^2\\b^2=\frac{a^2}{۴}+h_a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+\frac{b^2}{۲}=۲\times۲^2=۸\\b^2-\frac{a^2}{۴}=۳^2=۹\end{cases}$$

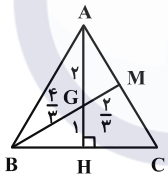
$$\begin{cases}\xrightarrow{\times۲}۲a^2+b^2=۱۶\\b^2-\frac{a^2}{۴}=۹\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}\frac{۹a^2}{۴}=۷$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{۲۸}{۹}\Rightarrow a=\frac{۲\sqrt{۷}}{۳}$$

مساحت مثلث ABC از رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}a\times h_a$ به دست می‌آید، پس:

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲\sqrt{۷}}{۳}\times۳=\sqrt{۷}$$

روش دوم: (با استفاده از مطالب کتاب درسی هندسه (۱)) در مثلث ABC، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین:



$$\begin{cases}AH=۳\\BM=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}GH=۱\\BG=\frac{۴}{۳}\end{cases}\xrightarrow[\text{در }BGH]{\text{فیثاغورس}}BH=\frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

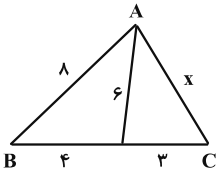
$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times(۲BH)\times AH$$

$$=\frac{\sqrt{۷}}{۳}\times۳=\sqrt{۷}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۷)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(نرگس کارگر)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث مذکور داریم:



$$8^2\times3+x^2\times4=7(6^2+4\times3)\Rightarrow64\times3+4x^2=7\times48$$

$$\xrightarrow{+4}48+x^2=84\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۷)

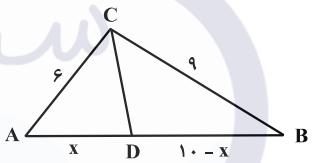
۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

طبق فرض: $2\sin\hat{A}=3\sin\hat{B}\Rightarrow\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{3}{2}$

طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}\Rightarrow BC=AC\times\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=6\times\frac{3}{2}=9$$

بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث روبه‌روی بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، پس $\hat{C}$ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC است و طبق قضیهٔ نیمسازها برای نیمساز زاویهٔ C داریم:



$$\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{x}{10-x}=\frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow9x=60-6x\Rightarrow x=\frac{60}{15}=4$$

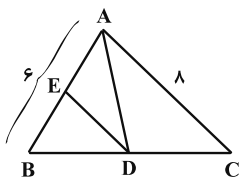
طول نیمساز CD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$CD^2=CA.CB-DA.DB=6\times9-4\times6=54-24=30$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{30}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۲، ۶۸ و ۶۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(اسماق اسفندیار)*



AD نیمساز زاویهٔ A است، لذا طبق قضیهٔ نیمسازها داریم:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{BD}{\underbrace{BD+DC}_{7}}=\frac{6}{6+8}$$

$$\Rightarrow BD=3\quad,\quad DC=4$$

همچنین طول نیمساز AD به صورت زیر به دست می‌آید:

$$AD^2=AB\times AC-BD\times DC=6\times8-3\times4=48-12=36$$

$$\Rightarrow AD=6$$

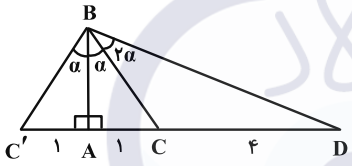
قضیهٔ نیمسازها را برای نیمساز DE در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{\overbrace{AD}^{6}}{\underbrace{DB}_{3}}\Rightarrow\frac{AE}{\underbrace{BE+AE}_{6}}=\frac{6}{9}\Rightarrow AE=4$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

داریم: $CD=4\quad,\quad AC=1$



مطابق شکل AD را از طرف رأس A به اندازهٔ AC تا نقطهٔ C' امتداد می‌دهیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ABC' بنابر حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند، بنابراین:

$$\begin{cases}A\hat{B}C=A\hat{B}C'=\alpha\\C\hat{B}D=2\alpha\end{cases}\Rightarrow C'\hat{B}C=A\hat{B}C+A\hat{B}C'=2\alpha$$

در نتیجه BC نیمساز زاویهٔ $C'\hat{B}D$ است. حال با توجه به قضیهٔ نیمسازها خواهیم داشت:

$$\frac{BC'}{BD}=\frac{CC'}{CD}=\frac{2}{4}\Rightarrow BD=2BC'$$

در نهایت با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC'}:BC'^2=AB^2+AC'^2\\\overset{\Delta}{ABD}:BD^2=AB^2+AD^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}BC'^2=AB^2+1\\4BC'^2=AB^2+25\end{cases}\Rightarrow3BC'^2=24\Rightarrow BC'^2=8$$

$$\Rightarrow BC'=2\sqrt{2}\Rightarrow BC=2\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۷- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملونری)

توسط دستور هرون، مساحت مثلث ABC را می‌یابیم:

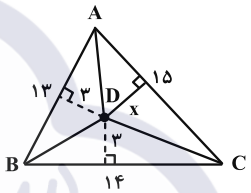
$$\text{نصف محیط}: p=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$

$$=\sqrt{۲۱\times۸\times۷\times۶}=۷\times۳\times۴=۸۴$$

مطابق شکل، مساحت مثلث ABC با جمع مساحت‌های سه مثلث ABD، ACD و BDC برابر است:



$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}$$

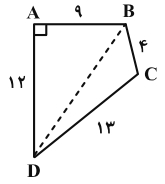
$$\Rightarrow ۸۴=\frac{۱۳\times۳}{۲}+\frac{۱۵\times x}{۲}+\frac{۱۴\times۳}{۲}=\frac{۲۷\times۳}{۲}+\frac{۱۵x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶۸=۸۱+۱۵x\Rightarrow x=\frac{۸۷}{۱۵}=\frac{۲۹}{۵}=۵/۸$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ D از ضلع AC برابر $x=۵/۸$ است.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۷۱)

۸- **گزینهٔ «۴»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)



به کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول قطر BD را محاسبه می‌کنیم:

$$BD=\sqrt{۹^۲+۱۲^۲}=۱۵\Rightarrow S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB.AD=۵۴$$

برای مساحت $\overset{\Delta}{BCD}$ از رابطهٔ هرون استفاده می‌کنیم:

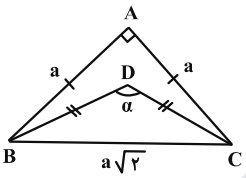
$$p=\frac{۴+۱۳+۱۵}{۲}=۱۶\ (\text{نصف محیط مثلث } BCD)$$

$$\Rightarrow S_{BCD}=\sqrt{۱۶(۱۶-۱۵)(۱۶-۱۳)(۱۶-۴)}=۲۴$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=۵۴+۲۴=۷۸$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)



رأس B را به C وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $AB=a$، در این صورت داریم:

$$BC=a\sqrt{۲}\ ,\ BD^۲=\frac{a^۲}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲a^۲}{۲+\sqrt{۳}}$$

اکنون رابطهٔ کسینوس‌ها را در مثلث BCD می‌نویسیم:

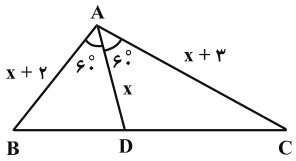
$$BC^۲=۲BD^۲-۲BD^۲\cos\alpha\Rightarrow ۲a^۲=۲(\frac{۲a^۲}{۲+\sqrt{۳}})(۱-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow ۱-\cos\alpha=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\alpha=۱-\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}=۱-۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\alpha=۱۵۰^\circ$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۷۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (ایمان ساریخانی)



مطابق شکل، طول نیمساز داخلی زاویهٔ A با داشتن زاویه A برابر است با:

$$AD=\frac{۲AB.AC.\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{AB+AC}\Rightarrow x=\frac{۲(x+۲)(x+۳)\cos۶۰^\circ}{x+۳+x+۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۵x=x^۲+۵x+۶\Rightarrow x^۲=۶\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{۶}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

با فرض $\widehat{M}=x$ داریم:

$$\overset{\Delta}{BMT}: BT=BM \Rightarrow B\hat{T}M=\widehat{M}=x$$

$$B\hat{T}M=\frac{\overset{\frown}{BT}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BT}=2x \quad \text{(زاویهٔ ظلی)}$$

$$\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{2} \Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AT}-2x}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=4x$$

می‌دانیم کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، برابر یکدیگرند، بنابراین $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AT}=4x$ است و در نتیجه داریم:

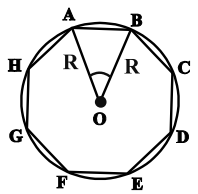
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{BT}=360^\circ \Rightarrow 4x+4x+2x=360^\circ$$
$$\Rightarrow 10x=360^\circ \Rightarrow x=36^\circ$$

$$\begin{cases}\hat{M}=x=36^\circ\\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{2}=x=36^\circ\end{cases} \xrightarrow{\overset{\Delta}{ATM}} A\hat{T}M=180^\circ-2\times 36^\circ=108^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق شکل داریم:



$$A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\times OB\times \sin(A\hat{O}B)=\frac{1}{2}R^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\text{هشت‌ضلعی}}=8\,S_{AOB}=2\sqrt{2}R^2$$

طبق فرض داریم: $2\sqrt{2}R^2=4 \Rightarrow R^2=\sqrt{2} \Rightarrow R=\sqrt[4]{2}$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۷۲)

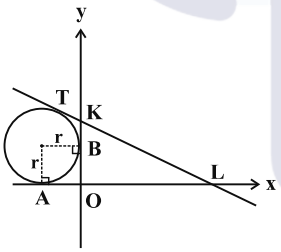
۳- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*

مطابق شکل، دایرهٔ مورد نظر دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع OK در مثلث OKL است. داریم:

$$KL^2=OK^2+OL^2=25+144=169 \Rightarrow KL=13$$

$$p=\frac{5+12+13}{2}=15$$

$$S=\frac{1}{2}\times 5\times 12=30$$



شعاع دایرهٔ محاطی خارجی: $r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{30}{15-5}=\frac{30}{10}=3$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

نقطهٔ M وسط مماس مشترک TT' قرار دارد، زیرا طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$\left.\begin{aligned} MT^{۲} = MA.MB = ۳(۳+۶) = ۲۷ \\ MT'^{۲} = MA.MB = ۳(۳+۶) = ۲۷ \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow MT = MT' = \sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳}$$

بنابراین طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $TT' = ۶\sqrt{۳}$ است و داریم:

$$TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R-R')^{۲}} \Rightarrow ۶\sqrt{۳} = \sqrt{۱۲^{۲} - (R-R')^{۲}}$$

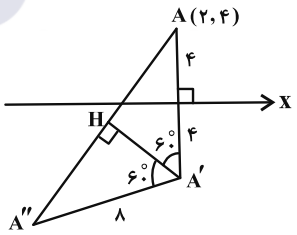
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۰۸ = ۱۴۴ - (R-R')^{۲} \Rightarrow (R-R')^{۲} = ۳۶$$

$$\Rightarrow |R-R'| = ۶$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۵- **گزینهٔ «۱»** (اسحاق اسفندیار)

فاصلهٔ نقطهٔ A تا محور xها برابر با ۴ است. بنابراین اندازهٔ پاره خط‌های $A'A$ و $A'A''$ (شعاع دوران) برابر با ۸ خواهد بود. با توجه به شکل خواهیم داشت:



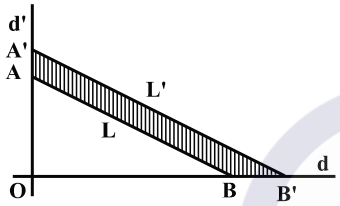
$$\overset{\Delta}{A'HA''}: \sin ۶۰^\circ = \frac{A''H}{۸} \Rightarrow A''H = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$AA'' = AH + A''H = ۲A''H = ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۶- **گزینهٔ «۲»** (سینا محمدپور)

در تجانس به مرکز O (مبدأ مختصات) و نسبت تجانس k، اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث $OA'B'$ برابر $k^{۲}S$ خواهد بود. (دو شکل متجانس، همواره متشابه‌اند.)



$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲}OA \times OB = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳۶}$$

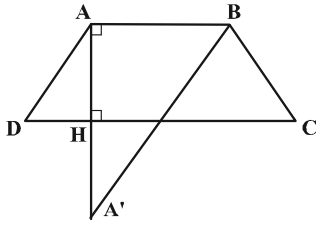
$$S_{AA'B'B} = S_{OA'B'} - S_{OAB} = k^{۲}S - S = \left(k^{۲} - ۱\right)S$$

$$\xrightarrow{k=۷} S_{AA'B'B} = (۴۹-۱) \times \frac{۱}{۳۶} = \frac{۴}{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

برای پیدا کردن کم‌ترین مقدار $MA + MB$ به گونه‌ای که M روی قاعدهٔ CD باشد، کافی است بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط CD یافته و آن را A' بنامیم و سپس مقدار $A'B$ را به‌دست آوریم (این مقدار دقیقاً برابر با کم‌ترین مقدار $MA + MB$ است.)



با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AB+CD)\Rightarrow ۳۵=\frac{۱}{۲}AH(۴+۱۰)\Rightarrow AH=۵$$

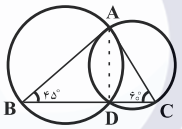
$$\Rightarrow AA'=۱۰$$

$$\overset{\Delta}{A'AB}: A'B^{۲}=AA'^{۲}+AB^{۲}=۱۰۰+۱۶=۱۱۶\Rightarrow A'B=۲\sqrt{۲۹}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمد هنران)*

وتر مشترک AD را رسم می‌کنیم. اگر R و R' شعاع‌های دایره‌های بزرگ و کوچک باشند، با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث ABD و ACD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{AD}{\sin ۴۵^\circ}=۲R\Rightarrow R=\frac{AD}{۲\sin ۴۵^\circ}=\frac{AD}{\sqrt{۲}}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{AD}{\sin ۶۰^\circ}=۲R'\Rightarrow R'=\frac{AD}{۲\sin ۶۰^\circ}=\frac{AD}{\sqrt{۳}}$$

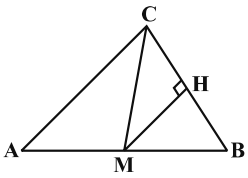
در نتیجه:

$$\frac{R}{R'}=\frac{\frac{AD}{\sqrt{۲}}}{\frac{AD}{\sqrt{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

(هندسهٔ ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

اگر S و p به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشد، طبق قضیهٔ هرون داریم:



$$p=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۴+۷+۹}{۲}=۱۰$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۰\times ۶\times ۳\times ۱}=۶\sqrt{۵}$$

CM میانهٔ نظیر ضلع AB است، پس داریم:

$$S_{BMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=۳\sqrt{۵}$$

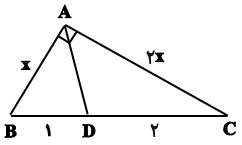
$$S_{BMC}=\frac{۱}{۲}MH\times BC\Rightarrow ۳\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\times MH\times ۴$$

$$\Rightarrow MH=\frac{۶\sqrt{۵}}{۴}=۱/۵\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق قضیهٔ نیمسازها $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۲}$. حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^{۲}+۴x^{۲}=۹\Rightarrow x^{۲}=\frac{۹}{۵}\Rightarrow x=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

حال طبق قضیهٔ طول نیمساز داخلی داریم:

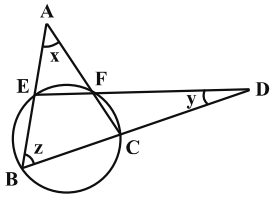
$$d^{۲}=(\frac{۳}{\sqrt{۵}})(\frac{۶}{\sqrt{۵}})-۱\times ۲=\frac{۱۸}{۵}-۲=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{\frac{۸}{۵}}=۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}=\frac{۲}{۵}\sqrt{۱۰}=۰/۴\sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

می‌دانیم زاویهٔ بین امتداد دو وتر، برابر با نصف اختلاف کمان‌های نظیرش است. پس:



$$x=\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{EF}}{۲}\quad,\quad y=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{FC}}{۲}$$

از طرفی برای زاویهٔ محاطی B داریم:

$$z=\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC}=۲z$$

بنابراین:

$$x+y=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{EF}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{FC}}{۲}$$

$$=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}-(\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC})}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}-۲z}{۲}$$

از طرفی چون $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC}=۳۶۰^\circ$، لذا داریم:

$$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}+۲z=۳۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}=۳۶۰^\circ-۲z$$

بنابراین:

$$x+y=\frac{۳۶۰^\circ-۲z-۲z}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ-۴z}{۲}=۱۸۰^\circ-۲z$$

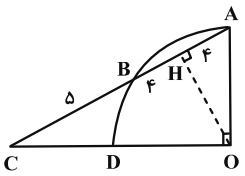
$$\xrightarrow{x+y=۶۳^\circ} ۶۳^\circ=۱۸۰^\circ-۲z\Rightarrow ۲z=۱۱۷^\circ$$

$$\Rightarrow z=۵۸/۵^\circ$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(ابوذر منتظری)*

مطابق شکل، پاره‌خط OH، عمودمنصف AB می‌باشد (چرا؟). طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\begin{cases}CO^۲=CH\times CA=(۵+۴)\times ۱۳\Rightarrow CO=۳\sqrt{۱۳}\\ OA^۲=AH\times AC=۴\times ۱۳\Rightarrow OA=۲\sqrt{۱۳}\end{cases}$$

توجه کنید $DO=OA=۲\sqrt{۱۳}$، پس:

$$CD=CO-DO=۳\sqrt{۱۳}-۲\sqrt{۱۳}=\sqrt{۱۳}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۱۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسماق اسفندیار)*

با توجه به فرض داریم:

$$AC\parallel DE\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}=x$$

$$EF\parallel BC\Rightarrow \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BF}=x$$

$$AB\parallel GF\Rightarrow \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AG}=x$$

همچنین: $\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}\xrightarrow{\hat{A}=۳۰^\circ}\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ$: زاویهٔ محاطی

$\overset{\frown}{DE}=۸۰^\circ\quad,\quad \overset{\frown}{FG}=۱۲۰^\circ$: طبق فرض

جمع کمان‌های روی دایره برابر است با:

$$۴x+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{FG}=۳۶۰^\circ\Rightarrow ۴x+۸۰^\circ+۶۰^\circ+۱۲۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=۲۵^\circ$$

در نتیجه: $\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{DE}+2x}{2}=\frac{80^\circ+50^\circ}{2}=65^\circ$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۴- **گزینهٔ «۳»** (روح‌اله حسنی)

می‌دانیم اندازهٔ کمان نظیر وتری که با شعاع دایره برابر می‌باشد برابر 60° است. پس $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=60^\circ$؛ از طرفی چون اندازهٔ کمان‌های متناظر وترهای برابر با هم، مساوی یکدیگرند، پس:

$$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FG}=\overset{\frown}{GH}=\overset{\frown}{HA}=x$$

بنابراین: $6x+2\times60^\circ=360^\circ\Rightarrow 6x=240^\circ\Rightarrow x=40^\circ$

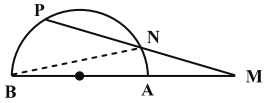
پس: $\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EG}}{2}=\frac{60^\circ+2\times40^\circ}{2}=\frac{140^\circ}{2}=70^\circ$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶)

۵- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

قطر نیم‌دایره را $AB=2r$ در نظر می‌گیریم، پس $PN=r\sqrt{2}$ خواهد بود، یعنی کمان نظیر این وتر باید 90° باشد، لذا داریم:

$$\overset{\frown}{PN}=90^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BP}+\overset{\frown}{AN}=90^\circ$$



از طرفی $BN=MN$ بنابراین $\hat{M}=M\hat{B}N=x$ و داریم:

زاویهٔ محاطی: $M\hat{B}N=\frac{\overset{\frown}{AN}}{2}=x\Rightarrow\overset{\frown}{AN}=2x$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BP}-\overset{\frown}{AN}}{2}=x\xrightarrow{\overset{\frown}{AN}=2x}\overset{\frown}{BP}=4x$$

در نتیجه: $\overset{\frown}{BP}+\overset{\frown}{AN}=6x=90^\circ\Rightarrow x=15^\circ$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶)

۶- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

مطابق شکل داریم: $\frac{\overset{\frown}{PN}+\overset{\frown}{QM}}{2}=\alpha\Rightarrow\overset{\frown}{PN}+\overset{\frown}{QM}=2\alpha$

از طرفی طبق فرض:

$$\hat{B}=2\hat{C}\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{MN}+2\alpha-\overset{\frown}{PQ}}{2}=2\left(\frac{\overset{\frown}{PQ}+2\alpha-\overset{\frown}{MN}}{2}\right)$$

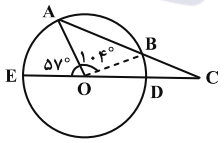
$$\Rightarrow\overset{\frown}{MN}+2\alpha-\overset{\frown}{PQ}=2\overset{\frown}{PQ}+4\alpha-2\overset{\frown}{MN}$$

$$\Rightarrow 2\alpha=3(\overset{\frown}{MN}-\overset{\frown}{PQ})\Rightarrow\overset{\frown}{MN}-\overset{\frown}{PQ}=\frac{2}{3}\alpha$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۷- **گزینهٔ «۳»** (ابوذر منتظری)

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر ۱۰۴ درجه است. مثلث OAB متساوی‌الساقین است، پس: $O\hat{A}B=O\hat{B}A=\frac{180^\circ-104^\circ}{2}=38^\circ$



از طرفی: $\overset{\frown}{BD}=180^\circ-(57^\circ+104^\circ)=19^\circ$

در نتیجه زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}D$ مساوی 19° است. زاویهٔ $O\hat{B}A$، زاویهٔ خارجی مثلث BOC است و داریم:

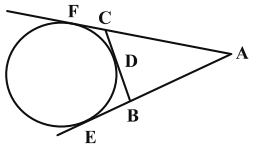
$$\hat{C}=O\hat{B}A-B\hat{O}D=38^\circ-19^\circ=19^\circ$$

بنابراین مثلث BOC نیز متساوی‌الساقین بوده و BC برابر شعاع دایره است و لذا: $\frac{BC}{ED}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$

(هندسه ۲- دایره: مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمد ناری‌ابیانه)*

می‌دانیم: $\begin{cases} FC = CD \\ BD = BE \\ AF = AE \end{cases}$



همچنین طبق فرض داریم: $AE = \frac{۴}{\frac{۲}{۵}} = ۱۰$ و $BC = ۴$

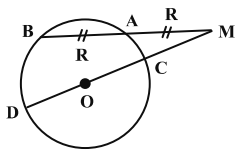
پس: $\overset{\Delta}{ABC}$ محیط $= \underbrace{AC + CD}_{AF} + \underbrace{DB + AB}_{AE} = ۲۰$

توجه: اندازهٔ محیط مثلث ABC مستقل از فرض $BC = ۴$ محاسبه شده است.

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

نقطهٔ M را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. طول پاره‌خط MD بیشترین فاصلهٔ M تا نقاط دایره و طول پاره‌خط MC کمترین فاصلهٔ این نقطه تا نقاط دایره است.



فرض کنیم $MO = d$، بنابراین: $\begin{cases} MD = MO + OD = d + R \\ MC = MO - OC = d - R \end{cases}$

اکنون بنابر رابطه‌های طولی در دایره داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow R(۲R) = (d - R)(d + R)$$

$$\Rightarrow ۲R^۲ = d^۲ - R^۲ \Rightarrow d^۲ = ۳R^۲ \Rightarrow d = R\sqrt{۳}$$

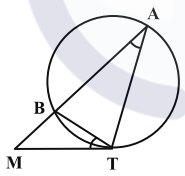
پس: $\frac{MD}{MC} = \frac{d + R}{d - R} = \frac{R\sqrt{۳} + R}{R\sqrt{۳} - R} = \frac{R(\sqrt{۳} + ۱)}{R(\sqrt{۳} - ۱)}$

$$= \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} - ۱} \times \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} + ۱} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ + \sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

با توجه به شکل، زوایای محاطی A و ظلّی MTB هر دو روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BT}$ هستند و با هم برابرند. از طرفی با توجه به مشترک بودن زاویهٔ M در دو مثلث MBT و MAT، این دو مثلث با هم متشابه‌اند. پس:



$$\overset{\Delta}{MBT} \sim \overset{\Delta}{MTA} \Rightarrow \frac{MB}{MT} = \frac{MT}{MA} = \frac{BT}{AT} = \frac{۲}{۳}$$

پس نسبت تشابه دو مثلث برابر $\frac{۲}{۳}$ و در نتیجه نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\frac{۴}{۹} = (\frac{۲}{۳})^۲$ می‌باشد. پس: $\frac{S_{MBT}}{S_{MAT}} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۳۰}{S_{MAT}} = \frac{۴}{۹}$

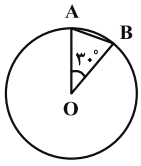
$$\Rightarrow S_{MAT} = \frac{۲۷۰}{۴} = ۶۷/۵$$

در نتیجه مساحت مثلث ABT برابر می‌شود با:

$$S_{ABT} = S_{MAT} - S_{MBT} = ۶۷/۵ - ۳۰ = ۳۷/۵$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵، ۱۸ و ۱۹)

۱- **گزینهٔ «۲»** (محمد فندان)



فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی و A و B دو رأس متوالی این دوازده ضلعی منتظم باشند. با فرض $OA = r$ داریم:

$$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = ۳۰^\circ$$

$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲}OA \times OB \times \sin(A\hat{O}B) = \frac{۱}{۲} \times r \times r \times \frac{۱}{۲} = \frac{r^۲}{۴}$$

این دوازده ضلعی منتظم از ۱۲ مثلث هم‌نهشت با مثلث AOB تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۱۲ \times \frac{r^۲}{۴} = ۳r^۲ = ۱۲ \Rightarrow r = ۲$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۸ و ۲۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

طول مماس مشترک خارجی TT' برای این دو دایرهٔ مماس بیرون برابر است با:

$$TT' = ۲\sqrt{rr'} = ۲\sqrt{۸} = ۴\sqrt{۲}$$

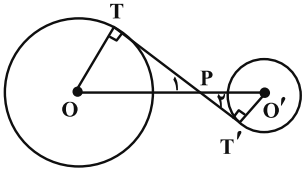
مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر که قائم‌الزاویه نیز هست، برابر می‌شود با:

$$S = \frac{(۲+۴) \times ۴\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** (محمد ناری‌ابیانه)

با توجه به شکل و فرض سوال داریم:



$$\left.\begin{matrix}\hat{P}_۱ = \hat{P}_۲ \\ \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OPT} \sim \overset{\Delta}{O'PT'}$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{O'P} = \frac{OT}{O'T'} = \frac{۸}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OP}{OO'} = \frac{۸}{۱۱}$$

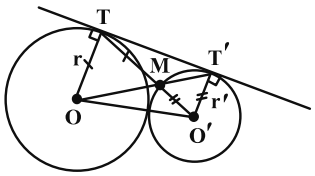
$$\xrightarrow{OO'=۲۲} \frac{OP}{۲۲} = \frac{۸}{۱۱} \Rightarrow OP = ۱۶$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی این دو دایرهٔ مماس بیرون برابر است با:

$$TT' = ۲\sqrt{rr'}$$



چون نقطهٔ M (محل برخورد $O'T$ و OT') روی دایرهٔ کوچک‌تر است پس $MO' = r'$. از طرفی چون $OT \parallel O'T'$ پس دو مثلث MOT و $MO'T'$ متشابه‌اند و بنابراین:

$$\frac{MO'}{MT} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{r'}{MT} = \frac{r'}{r} \Rightarrow MT = r$$

در نتیجه داریم:

$$O'T = MT + MO' = r + r' \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'TT'$ داریم:

$$O'T^۲ = TT'^۲ + O'T'^۲ = (۲\sqrt{rr'})^۲ + r'^۲$$

$$\Rightarrow O'T^۲ = ۴rr' + r'^۲ \quad (۲)$$

اکنون از روابط (۱) و (۲) داریم:

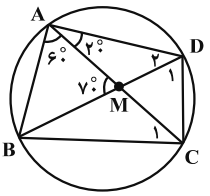
$$(r+r')^۲ = ۴rr' + r'^۲ \Rightarrow r^۲ + ۲rr' + r'^۲ = ۴rr' + r'^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ = ۲rr' \Rightarrow r = ۲r' \Rightarrow \frac{r}{r'} = ۲$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۵- **گزینهٔ «۲»** (محمد ناری‌ابیانه)

دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. داریم:



$$\hat{D}_۱ = B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMD} \text{ (زاویهٔ خارجی)} \quad ۷۰^\circ = \hat{D}_۲ + ۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}_۲ = ۷۰^\circ - ۲۰^\circ = ۵۰^\circ$$

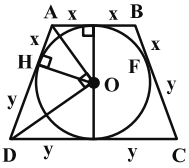
$$\Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{D}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}_۱ + \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحهٔ ۲۷)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

هرگاه نیمسازهای زوایای داخلی یک چندضلعی در یک نقطه همرس باشند، آن چندضلعی محیطی است.



بنابراین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ محیط بر یک دایره است و نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی آن، مرکز دایرهٔ محاطی ذوزنقه است و در نتیجه فاصلهٔ آن از اضلاع ذوزنقه یکسان است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مجاور به ساق مکمل یکدیگرند، پس نیمسازهای آنها بر هم عمود و در نتیجه مثلث OAD قائم‌الزاویه است.

مجموع فواصل $= ۴OH = ۱۲ \Rightarrow OH = r = ۳$

طبق روابط طولی در مثلث OAD داریم: $OH^۲ = x \times y = ۹$

$\Rightarrow$ واسطهٔ هندسی دو قاعده $= \sqrt{AB \times CD} = \sqrt{۲x \times ۲y}$

$= ۲\sqrt{xy} = ۲\sqrt{۹} = ۶$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(حامد قاسمیان)*

نکته: اگر a، b، c و d، طول اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند، آن‌گاه:

$$a + c = b + d$$

با توجه به فرض داریم: $(x+۳)+(۳x-۲) = (۲x+۳)+(x+۱)$

$$\Rightarrow ۴x + ۱ = ۳x + ۴ \Rightarrow x = ۳$$

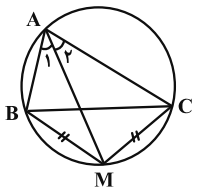
در نتیجه طول اضلاع این چهارضلعی، برابر ۶، ۹، ۷ و ۴ بوده و محیط آن برابر است با:

$$۶ + ۹ + ۷ + ۴ = ۲۶$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

چون $BM = MC$ است پس M روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. بنابراین نقطهٔ M محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC است و لذا M روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد.



از طرفی مطابق شکل داریم: $B\hat{C}M = \frac{\overset{\frown}{BM}}{۲} = \hat{A}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲}$

طبق فرض داریم $\hat{A} + B\hat{C}M = ۸۷^\circ$، پس:

$$\hat{A} + \frac{\hat{A}}{۲} = ۸۷^\circ \Rightarrow \frac{۳\hat{A}}{۲} = ۸۷^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۵۸^\circ$$

از آنجا که چهارضلعی $ACMB$ محاطی است، در نتیجه:

$$\hat{A} + B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - ۵۸^\circ = ۱۲۲^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: برگرفته از تمرین ۳ صفحهٔ ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و h_a، h_b و h_c طول ارتفاع‌های این مثلث باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۴/۸} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{r} \Rightarrow r = ۲$$

اگر r_a، r_b و r_c شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشند، آن‌گاه داریم:

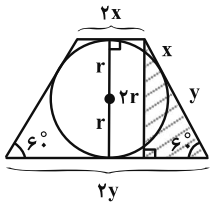
$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{۶-۳-۲}{۱۲} \Rightarrow r_a = ۱۲$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(ابوذر منتظری)*

با توجه به شرط مسئله، ذوزنقه باید متساوی‌الساقین باشد و زوایای آن ۶۰° و ۱۲۰° هستند. با توجه به شکل، در مثلث هاشورخورده داریم:



$$(x+y) \times \sin ۶۰^\circ = ۲r \Rightarrow (x+y) = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} r$$

در نتیجه مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times (۲x + ۲y) \times ۲r = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} r^۲$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمد قندران)*

هیچ کدام از موارد گفته شده قضیهٔ دو شرطی نیستند!

بررسی موارد:

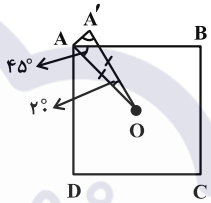
مورد اول: تبدیل بازتاب طولپا است ولی جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.

مورد دوم: قضیه درست است؛ اما به دلیل این‌که تبدیل بازتاب بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد ولی تصویر هر نقطه بر خودش منطبق نمی‌شود، عکس قضیه درست نیست.

مورد سوم: قضیه درست است؛ اما اگر T تبدیل دوران با زاویهٔ ۱۸۰ درجه باشد، آنگاه $T(T(A))=A$ می‌شود و لزوماً T تبدیل بازتاب نمی‌باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*



دوران تبدیل طولپاست، پس $OA=OA'$ و در نتیجه $O\hat{A}A'=O\hat{A}'A$ است، با توجه به این‌که AO نیمساز زاویهٔ BAD است، پس $O\hat{A}B=۴۵^\circ$ می‌باشد. در نهایت داریم:

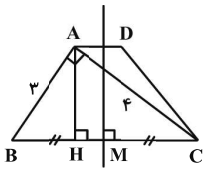
$$\begin{cases} A\hat{O}A'=۲۰^\circ \Rightarrow O\hat{A}A'=O\hat{A}'A=\dfrac{۱۸۰^\circ-۲۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ \\ O\hat{A}B=۴۵^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'\hat{A}B=O\hat{A}A'-O\hat{A}B=۸۰^\circ-۴۵^\circ=۳۵^\circ$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر ارتفاع وارد بر BC را رسم کنیم:



$$BC=۵\ ,\ AB^۲=BH.BC$$

$$\Rightarrow BH=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow HM=\frac{BC}{۲}-BH=\frac{۵}{۲}-\frac{۹}{۵}=\frac{۷}{۱۰}$$

$$\Rightarrow AD=۲HM=\frac{۷}{۵}$$

همچنین ارتفاع ذوزنقه با ارتفاع مثلث ABC برابر است با:

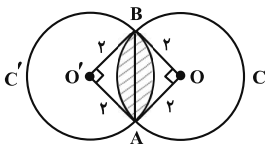
$$AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH(AD+BC)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲}{۵}\times(۵+\frac{۷}{۵})=\frac{۱۹۲}{۲۵}=۷/۶۸$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل، از دوران دایرهٔ $C(O,۲)$ به مرکز A و زاویهٔ ۹۰°، دایرهٔ $C'(O',۲)$ حاصل می‌شود که در نقاط A و B، دایرهٔ C را قطع می‌کند.



مطابق شکل اضلاع چهارضلعی $AOBO'$ برابر ۲ (شعاع دایره‌های C و C') و $O\hat{A}O'=۹۰^\circ$ است، پس این چهارضلعی مربع بوده و $A\hat{O}B=A\hat{O}'B=۹۰^\circ$ است.

ناحیهٔ محدود به دو دایره از دو قطعه تشکیل شده که مساحت هر قطعه برابر است با:

$$\text{مساحت قطاع } AOB - \text{مساحت } \overset{\Delta}{AOB}=\frac{۱}{۴}\times\pi\times۲^۲-\frac{۱}{۲}\times۲^۲=\pi-۲$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود به دو دایره برابر است با:

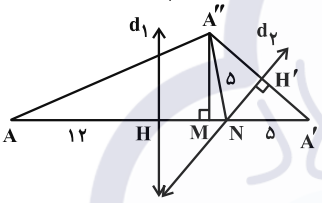
$$۲(\pi-۲)=۲\pi-۴$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(حامد معنوی)*

توجه کنید که فاصلهٔ A تا محور بازتاب $d_۱$ برابر با فاصلهٔ A' تا این محور است بنابراین: $HN=۱۲-۵=۷$

از طرفی محور بازتاب $d_۲$ عمودمنصف پاره خط $A'A''$ است پس فاصلهٔ نقطهٔ N تا A'' برابر با فاصلهٔ این نقطه تا A' است. از N به A'' وصل می‌کنیم و عمود $A''M$ را بر AA' وارد می‌کنیم. از آنجا که زاویهٔ حادهٔ $A'\hat{N}H'$ بیشتر از ۴۵° است، نتیجه می‌شود که نقطهٔ M سمت چپ N قرار می‌گیرد (چرا؟) و داریم:



$$NA''=NA'=۵$$

$$S_{A'H'N}=۵\Rightarrow S_{A'A''N}=۱۰\Rightarrow ۱۰=\frac{۱}{۲}\times NA'\times A''M$$

$$\Rightarrow ۱۰=\frac{۱}{۲}\times۵\times A''M\Rightarrow A''M=۴$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A''MN$ داریم:

$$۵^۲=۴^۲+MN^۲\Rightarrow MN=۳$$: قضیهٔ فیثاغورس

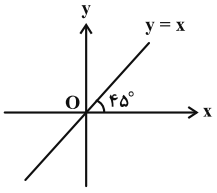
در مثلث قائم‌الزاویه $A''AM$ داریم: $HM=۷-۳=۴$

$$\overset{\Delta}{A''AM}\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}AA''^۲=۱۶^۲+۴^۲=۴^۲(\underbrace{۴^۲+۱}_{۱۷})$$

$$\Rightarrow AA''=۴\sqrt{۱۷}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع که با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، دورانی است به مرکز نقطهٔ تقاطع دو محور و با زاویهٔ ۲θ.

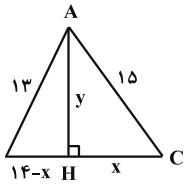
مطابق شکل، محور xها و نیمساز ربع اول و سوم با یکدیگر زاویهٔ ۴۵° می‌سازند و در نقطهٔ O (مبدأ مختصات) متقاطع‌اند، بنابراین تبدیل T، دوران به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° است. این تبدیل طولپاست، شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند و تنها یک نقطهٔ ثابت تبدیل دارد، ولی دوران جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

در مثلث ABC، $AB=۱۳$ با اضلاع $BC=۱۴$ و $AC=۱۵$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. فرض کنید $AH=y$ و $HC=x$، بنابراین:

$$BH=BC-HC=۱۴-x$$



اکنون در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC و AHB بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۵^۲ \\ (۱۴-x)^۲+y^۲=۱۳^۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲-(۱۴-x)^۲=۱۵^۲-۱۳^۲$$

$$\Rightarrow (x-۱۴+x)(x+۱۴-x)=(۱۵-۱۳)(۱۵+۱۳)$$

$$\Rightarrow ۱۴(۲x-۱۴)=۲\times ۲۸ \Rightarrow ۲x-۱۴=۴ \Rightarrow ۲x=۱۸$$

$$\Rightarrow x=۹ \Rightarrow y^۲=۱۵^۲-x^۲=۱۵^۲-۹^۲=۱۲^۲ \Rightarrow y=۱۲$$

بنابراین اگر مثلث ABC را نسبت به AH بازتاب دهیم، تصویر آن مثلث $AB'C'$ است و ناحیهٔ محصور بین مثلث ABC و تصویرش مثلث ABB' است، چون $B'H=BH$

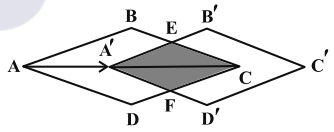
پس $BB'=۲BH=۱۰$ و بنابراین:

$$S_{ABB'}=\frac{AH\times BB'}{۲}=\frac{۱۲\times ۱۰}{۲}=۶۰$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

مطابق شکل لوزی $ABCD$ با بردار $\overrightarrow{AA'}$ بر لوزی $A'B'C'D'$ تصویر شده است. با توجه به این‌که انتقال شیب خطوط را حفظ می‌کند، داریم:



$$AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{A'E}{AB}=\frac{A'C}{AC}=\frac{CE}{BC}$$

$$\xrightarrow[AB=BC=a]{A'C=۲AA'} A'E=CE=\frac{۲}{۳}a$$

دو مثلث $A'EC$ و ABC با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$ متشابه‌اند، بنابراین:

$$S_{A'EC}=\frac{۴}{۹}S_{ABC} \Rightarrow S_{A'ECF}=\frac{۴}{۹}S_{ABCD}=۲ \Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۹}{۲}$$

مساحت لوزی به طول ضلع a و با زاویهٔ θ برابر $a^۲\sin\theta$ است، پس:

$$S_{ABCD}=a^۲\sin ۳۰^\circ=\frac{۹}{۲} \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=۳$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

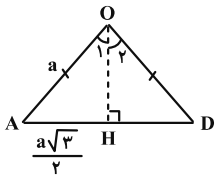
بنابر تعریف دوران

$$OA=OB=OC=OD.$$

پس مثلث AOD متساوی‌الساقین است.

اگر قرار دهیم $OD=OA=a$

آنگاه $AD=a\sqrt{۳}$.



اگر ارتفاع OH را رسم کنیم، چون $AH=\frac{AD}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$،

پس $\sin\hat{O}_۱=\frac{AH}{OA}=\frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، بنابراین $\hat{O}_۱=۶۰^\circ$

پس $A\hat{O}D=۲\hat{O}_۱=۱۲۰^\circ$. در نتیجه: $۳\alpha=۱۲۰^\circ \Rightarrow \alpha=۴۰^\circ$

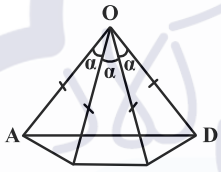
از طرفی چون مثلث OCD متساوی‌الساقین است پس:

$$O\hat{C}D=O\hat{D}C=\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$

به‌طور مشابه $B\hat{C}O=۷۰^\circ$. بنابراین:

$$B\hat{C}D=B\hat{C}O+O\hat{C}D$$

$$=۷۰^\circ+۷۰^\circ=۱۴۰^\circ=\frac{۷\pi}{۹}\text{rad}$$



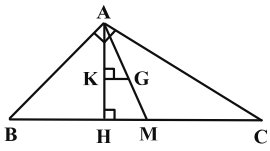
پس $(m,n)=(۷,۹)$ و بنابراین $m+n=۱۶$.

توجه: چنانچه شرط $\alpha<۶۰^\circ$ در صورت سوال نبود، زاویهٔ $\alpha=۸۰^\circ$ هم برای این سوال قابل قبول بود. (بررسی کنید.)

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمد خندان)*

با توجه به عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه است $(۱۵^۲=۱۲^۲+۹^۲)$. نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث، محل همرسی میانه‌های مثلث است.



کوتاه‌ترین بردار انتقال $\overrightarrow{GK}$ است، به‌طوری که $GK\perp AH$.

می‌دانیم میانه‌های اضلاع مثلث به نسبت ۲ به ۱ همدیگر را قطع می‌کنند، لذا طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AHM داریم:

$$GK \parallel HM \Rightarrow \frac{GK}{HM}=\frac{AG}{AM}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow GK=\frac{۲}{۳}HM \quad (*)$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\begin{cases} AB^۲=BH\times BC \Rightarrow ۹^۲=BH\times ۱۵ \Rightarrow BH=\frac{۲۷}{۵} \\ BM=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow HM=BM-BH=\frac{۲۱}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{(*)} GK=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۱}{۱۰}=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

پاسخ هندسه دهم خیلی سبز 25 مهر

1 **دو نقطهٔ متمایز P و Q را در صفحه در نظر بگیرید. اگر تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از P به فاصلهٔ ۳ و از Q به فاصلهٔ ۴ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای طول پاره‌خط PQ کدام است؟**

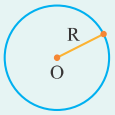
۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint دو دایرهٔ $C(P,3)$ و $C'(Q,4)$، باید تنها یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

درس Box

۱) همهٔ نقاطی از صفحه که از نقطهٔ معلوم O به فاصلهٔ معلوم R هستند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R واقع‌اند.



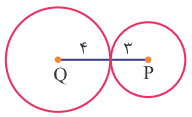
۲) دو دایره، تنها زمانی دارای دقیقاً یک نقطهٔ مشترک هستند که بر هم مماس باشند. توجه کنید که مماس‌بودن دو دایره دو حالت دارد: مماس خارج یا مماس داخل.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

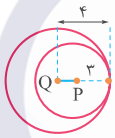
گام اول: تمام نقاطی که از P به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳ واقع‌اند و به همین ترتیب، تمام نقاطی که از Q به فاصلهٔ ۴ هستند، روی دایره‌ای به مرکز Q و شعاع ۴ واقع‌اند.

گام دوم: دو دایره‌ای که در گام اول به آن‌ها اشاره کردیم، باید دارای دقیقاً یک نقطهٔ مشترک باشند، یعنی باید این دو دایره بر هم مماس باشند.

گام سوم: با توجه به گام قبل، باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد.



(الف)



(ب)

در حالت (الف)، $PQ = ۴ + ۳ = ۷$ و در حالت (ب)، $PQ = ۴ - ۳ = ۱$، پس خواستهٔ سؤال برابر است با $۸ = ۷ + ۱$.

2 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A} = ۹۰^\circ$، نقطهٔ P واقع بر ضلع AB از وتر و رأس زاویهٔ قائمه به یک فاصله است. اگر در این مثلث $\hat{B} = ۴\hat{C}$، آن‌گاه زاویهٔ حادهٔ بین CP و ضلع AB چند درجه است؟

۱) ۸۱ ۲) ۷۲

۳) ۷۵ ۴) ۶۷ / ۵

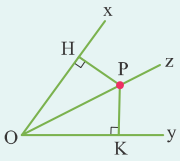
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint شکل مناسب را رسم کنید، نقطهٔ P بر نیمساز زاویهٔ C واقع است.

درس Box

۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، ۱۸۰° است.

۲) یک نقطه، از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله است، اگر و فقط اگر روی نیمساز آن زاویه واقع باشد.



یعنی در شکل بالا، داریم:

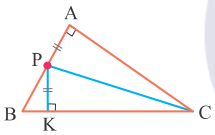
Oz نیمساز $x\hat{O}y$ است. $\Leftrightarrow PH = PK$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در مثلث ABC، داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{B}=۴\hat{C}]{\hat{A}=۹۰^\circ} ۹۰^\circ+۴\hat{C}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۸^\circ$$

گام دوم: شکل مناسب را رسم می‌کنیم.

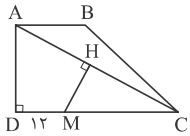


همان‌طور که می‌بینید، نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ C به یک فاصله است، پس CP نیمساز زاویهٔ C است.

گام سوم: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ACP را برابر با ۱۸۰° قرار می‌دهیم:

$$۹۰^\circ+\frac{۱۸^\circ}{۲}+A\hat{P}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{P}C=۸۱^\circ$$

3 در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، عمودمنصف قطر AC ، قاعدهٔ CD را در نقطهٔ M قطع کرده است. اگر $DM = ۱۲$ و $AD = \frac{۱}{۳}CD$ باشد، اندازهٔ قطر AC کدام است؟



۱) ۳۶
۲) $۱۸\sqrt{۳}$
۳) ۲۷
۴) $۹\sqrt{۱۰}$

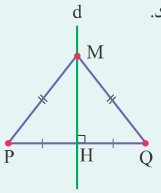
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

از M به A وصل کنید.

درس Box

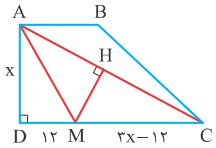
یک نقطه، از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است، اگر و فقط اگر روی عمودمنصف آن پاره‌خط واقع باشد.



$d \Leftrightarrow MP = MQ$ عمودمنصف PQ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق شکل از A به M وصل می‌کنیم. فرض کنید $AD = x$ باشد. در این صورت $CD = ۳x$ و در نتیجه $CM = ۳x - ۱۲$ است. از طرفی M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس $AM = CM = ۳x - ۱۲$.



گام دوم: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMD داریم:

$$AM^۲ = AD^۲ + DM^۲ \Rightarrow (۳x-۱۲)^۲ = x^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow ۹x^۲ - ۷۲x + ۱۴۴ = x^۲ + ۱۴۴ \Rightarrow ۸x^۲ - ۷۲x = ۰$$

$$\Rightarrow ۸x(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ‌ق‌ق} \\ x = ۹ \Rightarrow AD = ۹ , CD = ۲۷ \end{cases}$$

گام سوم: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADC داریم:

$$AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ = ۹^۲ + ۲۷^۲ = ۹^۲(۱+۳^۲) = ۹^۲ \times ۱۰ \Rightarrow AC = ۹\sqrt{۱۰}$$

4 در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز خارجی زاویهٔ C، امتداد ضلع AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $BC = CD$، آن‌گاه زاویهٔ BAC چند درجه است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۷۲

۳) ۷۵ ۴) ۱۰۵

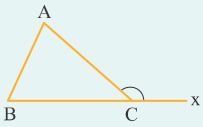
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌روی ساق‌ها با هم برابرند.

۲) هر زاویهٔ خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.

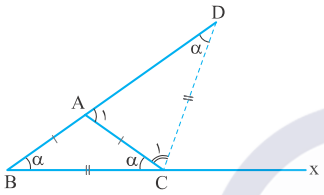
مثلاً در شکل مقابل، داریم:



$$A\hat{C}x = \hat{A} + \hat{B}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، در نظر می‌گیریم $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$ و شکل مناسب را رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، مثلث CBD هم متساوی‌الساقین است، در نتیجه $\hat{D} = \hat{B} = \alpha$.



گام دوم: زاویهٔ A_1 برای مثلث ABC، زاویهٔ خارجی است، پس $\hat{A}_1 = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

از طرفی CD، نیمساز زاویهٔ $A\hat{C}x$ است، پس:

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2}A\hat{C}x = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

گام سوم: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ACD را برابر با 180° قرار می‌دهیم:

$$\hat{A}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

پس:

$$B\hat{A}C = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - (2\times 36^\circ) = 108^\circ$$

5 **از هر رأس مثلث ABC، خطی موازی با ضلع مقابل به همان رأس رسم می‌کنیم. از تقاطع این سه خط، مثلث MNP تشکیل می‌شود، کدام گزینه درست است؟**

۱) ارتفاع‌های مثلث MNP، عمودمنصف‌های مثلث ABC هستند.

۲) ارتفاع‌های مثلث MNP، نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC هستند.

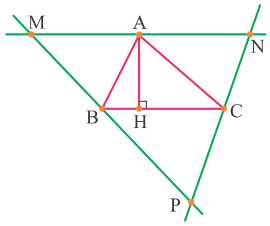
۳) ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث MNP هستند.

۴) ارتفاع‌های مثلث ABC، میانه‌های مثلث MNP هستند.

مشاوره این سؤال، از اثبات قضیهٔ «همرسی ارتفاع‌های مثلث» طرح شده است، پس علاوه بر آزمون‌های تشریحی، برای موفقیت در آزمون‌های تستی هم لازم است با اثبات قضایا آشنایی داشته باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: چهارضلعی ABCN، متوازی‌الاضلاع است (اضلاع روبه‌روی آن، با هم موازی‌اند)، پس $AN = BC$ و چهارضلعی ACBM نیز متوازی‌الاضلاع است، پس $AM = BC$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $AM = AN$؛ یعنی A وسط MN است.

گام دوم: فرض کنید AH ارتفاع نظیر ضلع BC باشد. پاره‌خط MN مطابق فرض موازی BC است، چون AH بر BC عمود است، پس بر MN نیز در نقطهٔ A عمود است؛ یعنی AH عمودمنصف MN است؛ بنابراین اگر نظیر همین استدلال را برای سایر ارتفاع‌های مثلث ABC نیز انجام دهیم، نتیجه می‌گیریم ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های مثلث MNP هستند.

6 طول اضلاع یک مثلث n، $n-1$ و n^2-1 است. حدود مقادیر n کدام است؟

۱) $n > \sqrt{2}$

۲) $1 < n < \sqrt{3}$

۳) $1 < n < \sqrt{2}$

۴) $\sqrt{2} < n < 2$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در مثلثی به طول اضلاع a، b و c، سه نامساوی زیر برقرار است:

$$a < b+c \ , \ b < c+a \ , \ c < a+b$$

به بیان دیگر در هر مثلث طول هر ضلع، از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کم‌تر است.

می‌توانیم سه نامساوی بالا را با هم تلفیق و به صورت $|b-c| < a < b+c$ بیان کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در نظر می‌گیریم $a = n^2-1$، $b = n$ و $c = n-1$، بنا به آن‌چه در درس‌باکس گفتیم، باید:

$$|b-c| < a < b+c \Rightarrow 1 < n^2-1 < 2n-1 \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به $(*)$ از اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $\begin{cases} 1 < n^2-1 \\ n^2-1 < 2n-1 \end{cases}$ به دست می‌آید.

گام سوم: دو نامعادله‌ای را که در گام قبل به آن‌ها اشاره کردیم، حل می‌کنیم:

$$1 < n^2-1 \Rightarrow 2 < n^2 \xrightarrow{n>0} n > \sqrt{2} \quad (1)$$

$$n^2-1 < 2n-1 \Rightarrow n^2-2n < 0 \Rightarrow n(n-2) < 0 \Rightarrow 0 < n < 2 \quad (2)$$

از اشتراک نامعادله‌های (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم $\sqrt{2} < n < 2$.

1 در مثلث ABC با اضلاع $a=3$ و $b=6$، اگر $2h_a+h_b=3h_c$ باشد، آن‌گاه محیط مثلث کدام است؟ (h_a ارتفاع وارد بر ضلع $BC=a$ است.)

۱) ۱۱/۸ ۲) ۱۲/۶

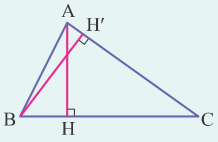
۳) ۱۲/۸ ۴) ۱۳/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اندازهٔ ارتفاع‌ها را برحسب اندازهٔ اضلاع بنویسید.

درس Box در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}BH'\times AC \Rightarrow AH\times BC=BH'\times AC \Rightarrow \frac{AH}{BH'}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}$$



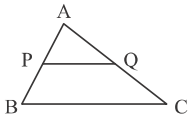
پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال را نوشته و طرفین رابطه را بر h_c تقسیم می‌کنیم.

$$2h_a+h_b=3h_c \Rightarrow \frac{2h_a}{h_c}+\frac{h_b}{h_c}=\frac{3h_c}{h_c} \Rightarrow \frac{2c}{a}+\frac{c}{b}=3 \Rightarrow \frac{2c}{3}+\frac{c}{6}=3 \xrightarrow{\times 6} 4c+c=18 \Rightarrow 5c=18$$
$$\Rightarrow c=3/6$$

گام دوم: محیط مثلث ABC برابر است با:

$$a+b+c=3+6+3/6=12/6$$

2 در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. حاصل $\frac{3BP-2CQ}{3AP-2AQ}$ کدام است؟



۱) $\frac{BC}{PQ}$
۲) $\frac{PQ}{BC}$
۳) $\frac{3PQ}{2BC}$
۴) $\frac{BC}{PQ}-1$

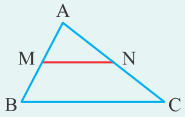
مشاوره با یک سؤال ترکیبی از «قضیهٔ تالس» و «خواص تناسب» مواجهیم.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) قضیهٔ تالس و تعمیم آن

مطابق شکل، در مثلث ABC ، پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است، داریم:



$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ (قضیهٔ تالس)

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ (تعمیم قضیهٔ تالس)

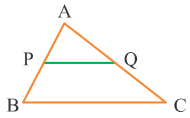
۲) برخی از خواص تناسب

الف) اگر $\frac{a}{b}=k$ ، آن‌گاه $\frac{ma}{mb}=k$.

ب) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$.

پ) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ، آن‌گاه $\frac{ma+nc}{mb+nd}=k$.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: بنا به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC، داریم $\underbrace{\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}}_{(*)}$

گام دوم: بنا به خواص تناسب از تساوی (*)، داریم:

$$\frac{AP}{AB-AP}=\frac{AQ}{AC-AQ}=\frac{PQ}{BC-PQ}\Rightarrow\underbrace{\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}=\frac{PQ}{BC-PQ}}_{(**)}$$

گام سوم: در (**)، کسرها را معکوس می‌کنیم، داریم:

$$\frac{BP}{AP}=\frac{CQ}{AQ}=\frac{BC-PQ}{PQ}$$

در نتیجه:

$$\frac{3BP-2CQ}{3AP-2AQ}=\frac{BC-PQ}{PQ}=\frac{BC}{PQ}-\frac{PQ}{PQ}=\frac{BC}{PQ}-1$$

3 در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{A}=\hat{A}'$ ، $\hat{B}=\hat{B}'$ و $AB<A'B'$ و نسبت مساحت آن‌ها $\frac{۲۵}{۶۴}$ است. اگر M و M' به ترتیب وسط‌های BC و $B'C'$ باشند، نسبت $\frac{A'M'}{AM}$ کدام است؟

۱) $۱/۶$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $۳/۲$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های نظیر و هم‌چنین نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

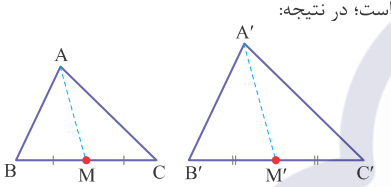
۲) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها، برابر با مجذور نسبت تشابه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون دو مثلث، دو زاویهٔ برابر دارند، پس متشابه‌اند و $AB<A'B'$ ، نتیجه می‌گیریم مثلث ABC کوچک‌تر از مثلث $A'B'C'$ است. در نتیجه داریم:

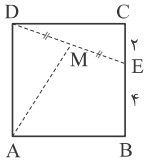
$$k^۲=\frac{S}{S'}=\frac{۲۵}{۶۴}\Rightarrow k=\frac{۵}{۸}$$

گام دوم: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر، برابر با نسبت تشابه است؛ در نتیجه:



$$\frac{AM}{A'M'}=k=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{A'M'}{AM}=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

4 در شکل مقابل چهارضلعی **ABCD** مربع و **M** وسط **DE** است. طول **AM** کدام است؟



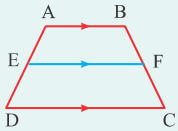
۱) $\sqrt{۳۴}$
۲) $\sqrt{۳۰}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از M به اضلاع مربع عمود کنید.

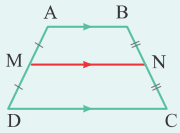
درس Box

۱) قضیهٔ تالس در ذوزنقه: در شکل زیر EF با قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD موازی است، داریم:



$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

۲) اگر وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل با ساق‌های ذوزنقه موازی و طول آن برابر است با میانگین طول‌های قاعده‌ها:



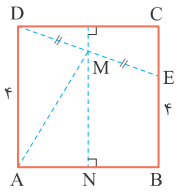
$$MN=\frac{AB+CD}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از نقطهٔ M عمود MN را بر ضلع AB رسم می‌کنیم. واضح است که $MN \parallel AD \parallel BE$، پس طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{DM}{ME}=۱ \Rightarrow AN=NB=۳$$

گام دوم: MN پاره‌خطی است که وسط‌های ساق‌های ذوزنقهٔ ABED را به هم وصل کرده است، پس:

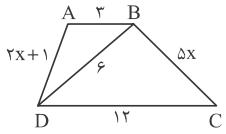


$$MN=\frac{BE+AD}{۲}=\frac{۴+۶}{۲}=۵$$

گام سوم: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AMN، داریم:

$$AM=\sqrt{AN^{۲}+MN^{۲}}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

5 محیط ذوزنقه در شکل مقابل کدام است؟

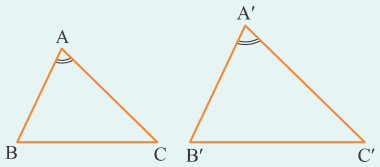


۱) ۱۸
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

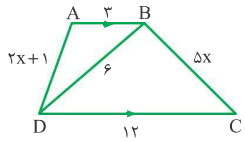
اگر دو مثلث، یک زاویهٔ برابر داشته باشند و دو ضلع این زاویهٔ برابر در این دو مثلث با هم متناسب باشند، آن‌گاه این دو مثلث متشابه هستند.



$$\hat{A}=\hat{A}' \ , \ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو مثلث ABD و BCD، بنا به حالت تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن متشابه‌اند، زیرا بنا به قضیهٔ موازی ـ مورب $A\hat{B}D = B\hat{D}C$، ضمن آن‌که:



$$\begin{cases}\frac{AB}{BD}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{BD}{DC}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{BDC}$$

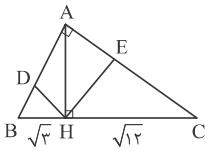
گام دوم: بنا به گام قبل، نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ است، پس داریم:

$$\frac{AD}{BC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲x+۱}{۵x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۲$$

گام سوم: با معلوم‌بودن x، می‌توانیم خواستهٔ سؤال را به دست آوریم:

$$\text{محیط ذوزنقه} = AB+BC+CD+AD = ۳+۱۰+۱۲+۵ = ۳۰$$

6 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل، AH ارتفاع وارد بر وتر، DH نیمساز زاویهٔ $\overset{\frown}{AHB}$ و EH نیمساز زاویهٔ AHC است. نسبت $\frac{EH}{DH}$ برابر با کدام است؟



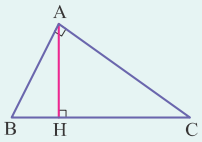
۱) ۲
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

۲) مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:



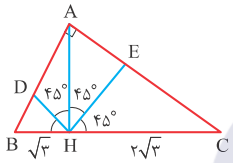
$$AH^۲ = BH \times CH$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بنا به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AH^۲ = BH \times CH = \sqrt{۳} \times ۲\sqrt{۳} = ۶ \Rightarrow AH = \sqrt{۶}$$

گام دوم: با توجه به شکل، داریم:



$$\begin{cases} A\hat{B}H + B\hat{A}H = ۹۰^\circ \\ C\hat{A}H + B\hat{A}H = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\hat{B}H + B\hat{A}H = C\hat{A}H + B\hat{A}H \Rightarrow A\hat{B}H = C\hat{A}H$$

گام سوم: می‌دانیم نسبت نیمسازهای متناظر در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه دو مثلث است، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} A\hat{H}B = A\hat{H}C = ۹۰^\circ \\ A\hat{B}H = C\hat{A}H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{CHA} \Rightarrow \frac{EH}{DH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۲}$$

سنجش کلاد

1 **تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای، چهار برابر تعداد نقاط درونی آن است. مساحت این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۲

۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای i و تعداد نقاط مرزی آن b باشد، مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم $S=\frac{b}{۲}+i-۱$ و طبق فرض $b=۴i$، پس:

$$S=\frac{۴i}{۲}+i-۱ \Rightarrow S=۳i-۱ \quad (*)$$

گام دوم: از تساوی $(*)$ نتیجه می‌گیریم $i=\frac{S+۱}{۳}$. از آن‌جا که i باید عددی صحیح باشد، گزینه‌ای جواب سؤال است که در آن $S+۱$ مضرب ۳ باشد که فقط در گزینهٔ (۳) این اتفاق می‌افتد.

2 **تعداد قطرهایی که از سه رأس متوالی یک چندضلعی محدّب می‌گذرد ۲۶تا است. تعداد کل قطرهای این چندضلعی کدام است؟**

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

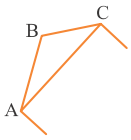
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

از هر رأس یک nضلعی محدب، $(n-۳)$ قطر می‌گذرد و تعداد کل قطرهای آن برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از رأس A، $(n-۳)$ قطر، از رأس B، $(n-۳)$ قطر و از رأس C نیز $(n-۳)$ قطر می‌گذرد، اما قطر AC را هم در میان قطرهای گذرنده از A و هم در میان قطرهای گذرنده از C شمرده‌ایم، پس بنا به فرض سؤال، باید:



$$۳(n-۳)-۱=۲۶ \Rightarrow ۳(n-۳)=۲۷ \Rightarrow n-۳=۹ \Rightarrow n=۱۲$$

گام دوم: تعداد کل قطرهای ۱۲ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{۱۲\times(۱۲-۳)}{۲}=۵۴$$

3 در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول ساق ۵ و قاعده‌های ۳ و ۹، فاصلهٔ هر رأس قاعدهٔ بزرگ، از ساق مقابل آن، کدام است؟

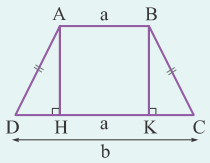
۱) ۸/۴ ۲) ۱۰/۲ ۳) ۷/۲ ۴) ۹/۶

مشاوره در حل سؤال‌های ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، رسم دو ارتفاع ذوزنقه را امتحان کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

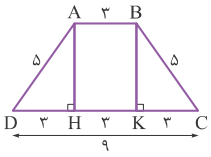
مطابق شکل، اگر از دو سر قاعدهٔ کوچک یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ارتفاع‌های آن را رسم کنیم، داریم:



$$DH = CK = \frac{b-a}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

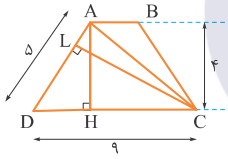
گام اول: ارتفاع‌های ذوزنقه را از دو سر قاعدهٔ کوچک آن رسم می‌کنیم، داریم:



$$DH = CK = \frac{۹-۳}{۲} = ۳$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADH داریم $AH = ۴$.

گام دوم: با توجه به شکل، طول CL مد نظر سؤال است. اگر از A به C وصل کنیم، داریم:

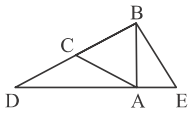


$$S_{ACD} = \frac{۱}{۲}AH.CD = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۹ = ۱۸$$

گام سوم: از طرفی داریم $S_{ACD} = \frac{۱}{۲}CL.AD$، پس:

$$۱۸ = \frac{۱}{۲}CL\times ۵ \Rightarrow CL = \frac{۲\times ۱۸}{۵} = \frac{۳۶}{۵} = ۷/۲$$

4 در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و مثلث ACD متساوی‌الساقین است. اگر $BE = \frac{۲}{۳}AD$، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث BDE به مساحت ABC کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) ۳
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

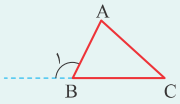
مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۲۸ کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴، البته با سطح دشواری آسان‌تر از آن طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint چرا مثلث BDE در رأس B قائم‌الزاویه است؟

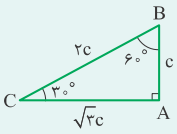
درس Box

۱) در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.



$\hat{B}_۱ = \hat{A} + \hat{C}$

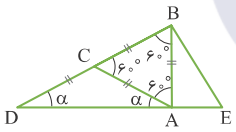
۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حادهٔ آن ۳۰° و ۶۰° هستند، ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است.



۳) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع x برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است.

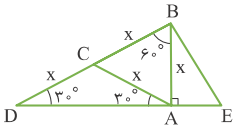
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: وقتی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، هر سه زاویهٔ آن ۶۰° هستند و وقتی مثلث ACD متساوی‌الساقین است، زاویه‌های مجاور AD با هم برابرند که آن‌ها را α در نظر گرفته‌ایم. زاویهٔ ACB برای مثلث ACD زاویهٔ خارجی است، پس:



$۶۰^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$

گام دوم: از آن‌جا که $B\hat{A}D = ۹۰^\circ$، پس BA بر DE عمود است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، AD ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° است، پس: $AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲x = \sqrt{۳}x$



گام سوم: طبق فرض، داریم $BE = \frac{۲}{۳}AD$، یعنی:

$$BE = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BE \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BE$$

پس زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE، ۳۰° و ۶۰° هستند، پس $D\hat{B}E = ۶۰^\circ + ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$، یعنی مثلث BDE در رأس B قائم‌الزاویه است.

گام چهارم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD.BE}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲x)(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x)}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲} = \frac{۸}{۳}$$

کنکور در مثلث شکل زیر، اگر مثلث DEF متساوی‌الاضلاع و مثلث‌های ADE و CFD متساوی‌الساقین باشند، آن‌گاه $\frac{AD}{BD}$ کدام است؟ (سؤال ۲۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) ۲
۲) ۱/۵

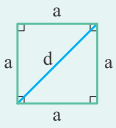
5 از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک چهارضلعی پدید می‌آید. اگر محیط این چهارضلعی دو برابر طول قطر مستطیل باشد، آن‌گاه نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

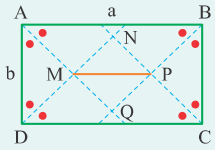
درس Box

۱) طول قطر هر مربع، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است.



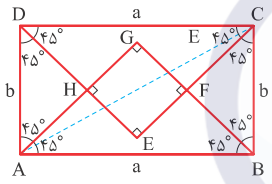
$d = a\sqrt{۲}$

۲) از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیلی به طول a و عرض b، مربعی به طول قطر $a-b$ پدید می‌آید.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم. می‌دانیم از برخورد نیمسازهای زوایای یک مستطیل، مربعی پدید می‌آید که طول قطر آن برابر تفاضل طول اضلاع مستطیل است؛ بنابراین اندازهٔ ضلع این مربع $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر قطر آن است. مطابق شکل، داریم:



$$EH = \frac{AB-AD}{\sqrt{۲}} = \frac{a-b}{\sqrt{۲}} \quad (\text{ضلع مربع})$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع } EFGH = ۴EH = \frac{۴(a-b)}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}(a-b)$$

گام دوم: طبق فرض سؤال، داریم:

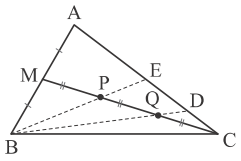
$$\text{محیط } EFGH = ۲AC \Rightarrow ۲\sqrt{۲}(a-b) = ۲\sqrt{a^۲+b^۲} \Rightarrow ۲a^۲+۲b^۲-۴ab = a^۲+b^۲ \Rightarrow a^۲-۴ab+b^۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div b^۲} (\frac{a}{b})^۲ - ۴(\frac{a}{b}) + ۱ = ۰ \quad (*)$$

گام سوم: فرض کنیم $\frac{a}{b} = t$؛ در این صورت از معادلهٔ $(*)$ داریم:

$$t^۲-۴t+۱=۰ \xrightarrow[\text{با روش } \Delta]{\text{حل معادله}} t = ۲ \pm \sqrt{۴-۱} \xrightarrow{t>۱} t = ۲+\sqrt{۳}$$

6 مطابق شکل، نقاط P و Q میانهٔ CM را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند، نسبت $\frac{DE}{AC}$ برابر با کدام است؟



۱) ۰/۳

۲) ۰/۲۵

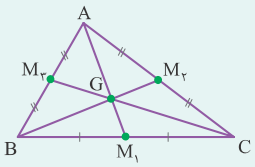
۳) ۰/۲

۴) ۰/۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

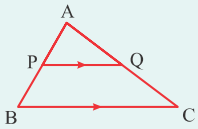
درس Box

۱) میانه‌های هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی میانه‌ها، هر کدام از میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{AG}{GM_1}=\frac{BG}{GM_2}=\frac{CG}{GM_3}=\frac{2}{1}$$

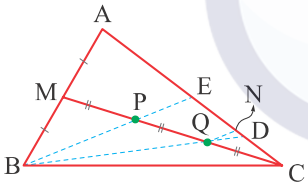
۲) تعمیم قضیهٔ تالس: در شکل زیر، اگر PQ با BC موازی باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که CM میانه و $\frac{CP}{PM}=2$، نقطهٔ P محل همرسی میانه‌های ABC است، پس BE هم میانه و E وسط AC است و $BP=2PE$.



گام دوم: از Q خطی موازی با BE رسم می‌کنیم، بنا به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CPE داریم:

$$QN \parallel PE \Rightarrow \frac{QN}{PE}=\frac{CN}{CE}=\frac{CQ}{CP}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} QN=\frac{1}{2}PE \Rightarrow QN=\frac{1}{6}BE \\ CN=\frac{1}{2}CE \Rightarrow CN=NE=\frac{1}{4}AC \end{cases}$$

گام سوم: بنا به تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BDE داریم:

$$QN \parallel BE \Rightarrow \frac{ND}{DE}=\frac{QN}{BE}=\frac{1}{6} \Rightarrow \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{NE}{DE}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}AC}{DE}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{DE}{AC}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

آزمون هندسه دهم خیلی سبز 28 آذر

1 **کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟**

۱) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که با هر دو خط متنافر d و d' موازی باشد.

۲) اگر دو خط d و d' موازی صفحهٔ P باشند، آن‌گاه d و d' موازی هستند.

۳) اگر دو صفحهٔ P و P' موازی خط d باشند، آن‌گاه دارای فصل مشترکی موازی با d هستند.

۴) تمام صفحاتی که از نقطهٔ A خارج خط d ، موازی با این خط رسم می‌شوند، از خطی موازی با d عبور می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

صفحه‌ای شامل دو خط متنافر وجود ندارد.

درس Box

۱) از یک نقطه خارج یک صفحه، بی‌شمار خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد که تمامی این خطوط دوبه‌دو متقاطع‌اند؛ بنابراین دو خط موازی با یک صفحه لزوماً موازی یکدیگر نیستند.

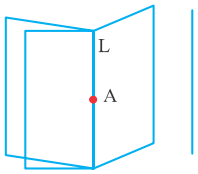
۲) اگر خط d با دو صفحهٔ متقاطع P و P' موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

گام اول: هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که شامل هر دو خط متنافر d و d' باشد، ولی بی‌شمار صفحه وجود دارد که با هر دو خط متنافر d و d' موازی هستند. به عنوان مثال کافی است از نقطهٔ دلخواه A در فضا، دو خط d_1 و d'_1 را به ترتیب موازی d و d' رسم کنیم. صفحهٔ گذرنده بر دو خط d_1 و d'_1 با هر دو خط d و d' موازی است؛ بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

گام دوم: طبق مورد ۱ درس‌باکس، دو خط d و d' که موازی صفحهٔ P هستند، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند. این دو خط می‌توانند نسبت به یکدیگر موازی، متقاطع یا متنافر باشند؛ بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.

گام سوم: دو صفحهٔ P و P' که موازی با خط d هستند، ممکن است با یکدیگر موازی بوده و فاقد فصل مشترک باشند و تنها در صورتی که P و P' متقاطع باشند، فصل مشترکی موازی با d دارند؛ بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.



گام چهارم: اگر نقطهٔ A خارج خط d باشد، تمام صفحاتی که از A گذشته و موازی خط d هستند همگی از خطی مانند L عبور می‌کنند که شامل نقطهٔ A بوده و با خط d موازی است؛ بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

2 کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در نقطهٔ تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه، عمود است.

۲) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، خطی در صفحهٔ اول وجود دارد که بر صفحهٔ دوم عمود است.

۳) اگر در فضا دو خط، بر خط سومی عمود باشند، دلیلی ندارد که آن دو خط با هم موازی باشند.

۴) در فضا، اگر خطی، یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

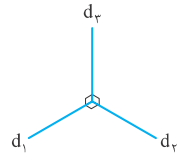
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

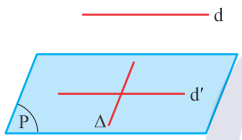
گزینهٔ (۱): مطابق تعریف خط عمود بر صفحه در کتاب درسی این گزاره درست است.

گزینهٔ (۲): نتیجه‌ای است که از تعریف دو صفحهٔ عمود بر هم حاصل می‌شود.

گزینهٔ (۳): درستی این گزاره، در شکل مقابل مشهود است.



گزینهٔ (۴): نادرستی این گزاره در شکل مقابل مشهود است:



خط d غیرواقع بر صفحهٔ P با خط d' واقع بر صفحهٔ P موازی است و خط Δ واقع بر صفحهٔ P، با d' متقاطع است، اما با d متقاطع نیست.

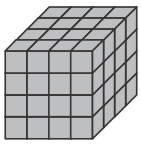
3 **تمام وجه‌های مکعب به ابعاد ۴×۴×۴ در شکل زیر رنگ‌آمیزی شده است. تعداد مکعب‌های کوچکی که حداقل دو وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی شده است، کدام است؟**

۱) ۲۴

۲) ۲۸

۳) ۳۰

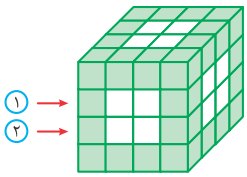
۴) ۳۲



مشاوره این سؤال که مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیر ماه ۱۴۰۴ است، با ایده‌گرفتن از کتاب درس هندسه (۱) طراحی شده است، پس بررسی کتاب درسی را جدی بگیرید!

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی در شکل مقابل، مکعب‌های کوچکی که حداقل دو وجه رنگی دارند، مشخص شده‌اند:



۱۲ مکعب کوچک در بالای شکل، ۱۲ مکعب کوچک در پایین شکل و $۸ = ۲ \times ۴$ مکعب کوچک دور شکل (مانند مکعب‌های ۱ و ۲)، پس در مجموع $۳۲ = ۸ + ۱۲ + ۱۲$ مکعب کوچک داریم که حداقل دو وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی شده است.

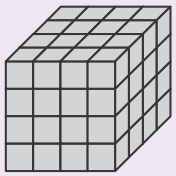
کنکور **تمام وجه‌های مکعب به ابعاد ۴×۴×۴ شکل زیر، رنگ‌آمیزی شده است. چند مکعب به ابعاد ۱×۱×۱ وجود دارد که فقط یک وجه‌شان رنگ شده است؟** *(سؤال ۲۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) ۸

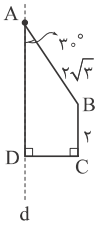
۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۲۴



4 مطابق شکل، قاعدهٔ بزرگ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD بر خط d واقع است. اگر این ذوزنقه را حول خط d دوران کامل دهیم، حجم شکل فضایی حاصل کدام است؟



۱) ۶π

۲) ۷π

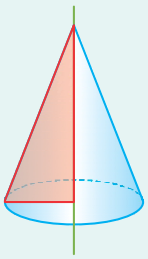
۳) ۸π

۴) ۹π

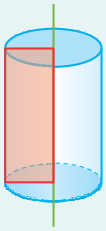
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) از دوران هر مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن، یک مخروط ایجاد می‌شود:



۲) از دوران هر مستطیل حول یکی از اضلاع آن، یک استوانه ایجاد می‌شود:



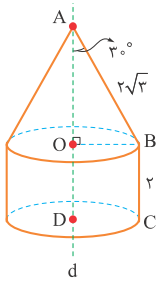
۳) حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر است با $\pi r^۲h$.

۴) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق شکل، حجم حاصل از دوران، شامل یک مخروط و یک استوانه است که قاعدهٔ مشترک دارند.

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB ضلع OB روبه‌روی زاویهٔ ۳۰° است، پس:



$$OB = \frac{۱}{۲}AB = \sqrt{۳} \quad , \quad AO = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = ۳$$

گام سوم:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi \times OB^۲ \times OA = \frac{۱}{۳}\pi \times ۳ \times ۳ = ۳\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi \times OB^۲ \times OD = \pi \times ۳ \times ۲ = ۶\pi$$

$$\text{حجم جسم} = \text{حجم مخروط} + \text{حجم استوانه} = ۳\pi + ۶\pi = ۹\pi$$

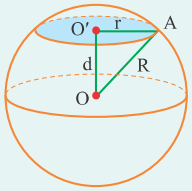
5 دو صفحهٔ موازی، کره‌ای به شعاع ۷ را قطع کرده‌اند. اگر مساحت مقطع‌های ایجادشده 24π و 48π باشد، بیشترین مقدار ممکن برای فاصلهٔ بین این دو صفحه کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر صفحه‌ای یک کره را قطع کند، مقطع حاصل، یک دایره خواهد بود. اگر شعاع کره R، فاصلهٔ صفحه از مرکز کره، d و شعاع دایرهٔ مقطع، r باشد، بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AOO' داریم:



$$R^2 = d^2 + r^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

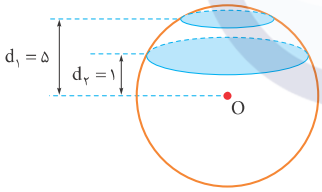
گام اول: همان‌طورکه در درس‌باکس گفتیم، مقطع‌های ایجادشده دایره هستند. اگر شعاع این دایره‌ها را r_1 و r_2 در نظر بگیریم، بنا به فرض، داریم:

$$\begin{cases} \pi r_1^2 = 24\pi \Rightarrow r_1^2 = 24 \\ \pi r_2^2 = 48\pi \Rightarrow r_2^2 = 48 \end{cases}$$

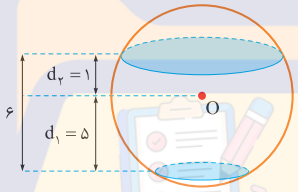
گام دوم: فاصلهٔ صفحه‌های ایجادکنندهٔ مقطع را از مرکز دایره‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} R^2 = d_1^2 + r_1^2 \Rightarrow 49 = d_1^2 + 24 \Rightarrow d_1^2 = 25 \Rightarrow d_1 = 5 \\ R^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow 49 = d_2^2 + 48 \Rightarrow d_2^2 = 1 \Rightarrow d_2 = 1 \end{cases}$$

گام سوم: یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است که فاصلهٔ بیشتر دو صفحهٔ ایجادکنندهٔ مقطع، در حالت دوم به دست می‌آید.

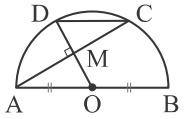


حالت اول



حالت دوم

1 در نیم‌دایرهٔ شکل زیر، **CD** موازی با قطر **AB = ۶** رسم شده است. **طول کمان CD** کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۳}$

۲) $\frac{۲\pi}{۳}$

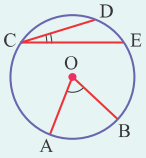
۳) π

۴) ۲π

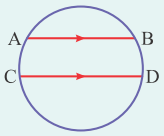
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) در هر دایره، اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن برابر است و اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن، مثلاً در شکل روبه‌رو داریم $\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$ و $\hat{C} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DE}$.



۲) در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی هستند. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



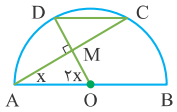
$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

۳) در دایره‌ای به شعاع R، طول کمانی با اندازهٔ α° برابر است با:

$\frac{\alpha^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر در نظر بگیریم $B\hat{A}C = x$، پس:



کمان روبه‌روی زاویهٔ محاطی: $\overset{\frown}{BC} = ۲x \xrightarrow{\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}} \overset{\frown}{AD} = ۲x$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D = \overset{\frown}{AD} = ۲x$

گام دوم: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث MAO را برابر با ۱۸۰° قرار می‌دهیم:

$۹۰^\circ + x + ۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$

گام سوم: از $x = ۳۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ$، پس:

$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + ۶۰^\circ + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$

گام چهارم: طول کمان CD برابر است با:

$\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi \times ۳) = \pi$

2 مستطیلی به طول اضلاع ۵ و ۱۳ را در نظر بگیرید. طول قطر دایره‌ای که از دو سر یک ضلع بزرگ این مستطیل گذشته و بر دیگر ضلع بزرگ آن مماس است، کدام است؟

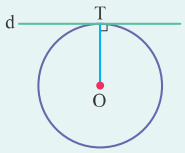
۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۳ / ۵ ۴) ۱۳ / ۴۵

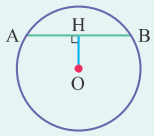
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره‌ای به مرکز O مماس باشد، OT در نقطهٔ T بر d عمود است.



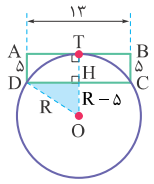
۲) اگر از مرکز یک دایره، به وتری از آن عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می‌کند و بالعکس.



$OH \perp AB \Leftrightarrow AH = BH$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم. مطابق شکل ABCD مستطیلی به اضلاع $AB = CD = ۱۳$ و $AD = BC = ۵$ است و دایرهٔ گذرنده از C و D در نقطهٔ T بر AB مماس است.



گام دوم: از نقطهٔ O (مرکز دایره) به نقطهٔ T وصل می‌کنیم، OT بر AB عمود است و به دلیل موازی‌بودن AB و CD، OT بر CD نیز عمود است؛ بنابراین نقطهٔ H وسط CD است.

گام سوم: بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث HOD، داریم:

$$OD^۲ = DH^۲ + OH^۲ \Rightarrow R^۲ = (\frac{۱۳}{۲})^۲ + (R-۵)^۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{۱۶۹}{۴} + R^۲ - ۱۰R + ۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۰R = \frac{۱۶۹}{۴} + ۲۵ \Rightarrow ۱۰R = \frac{۱۶۹+۱۰۰}{۴} \Rightarrow ۱۰R = \frac{۲۶۹}{۴} \Rightarrow ۲R = \frac{۲۶۹}{۲۰} = ۱۳/۴۵$$

3 در مثلثی به طول اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷، مجموع قطر دایرهٔ محاطی داخلی و قطر دایرهٔ محیطی کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۰ ۳) ۲۳ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مثلث، قائم‌الزاویه است.

درس Box

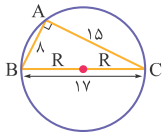
۱) در مثلثی به محیط $2P$ و مساحت S، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر است با $r = \frac{S}{P}$.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه، وتر مثلث، یکی از قطرهای دایرهٔ محیطی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که بین طول اضلاع مثلث رابطهٔ $۸^۲ + ۱۵^۲ = ۱۷^۲$ برقرار است، بنا به عکس قضیهٔ فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه است.

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویه، قطر دایرهٔ محیطی همان وتر است، پس:



$$۲R = ۱۷$$

گام سوم: برای شعاع دایرهٔ محاطی داخلی داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{۸\times ۱۵}{۲}}{\frac{۸+۱۵+۱۷}{۲}} = ۳ \Rightarrow ۲r = ۶$$

$$\Rightarrow ۲R + ۲r = ۱۷ + ۶ = ۲۳$$

سنجش کلاد

4 در چهارضلعی محاطی ABCD، اگر $\hat{C} = ۸۰^\circ$ باشد، زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مقابل B و D کدام است؟

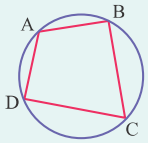
۱) ۱۵۰° ۲) ۱۶۰°

۳) ۱۷۰° ۴) ۱۴۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

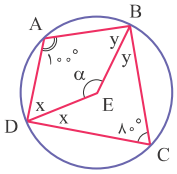
در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل، مکمل هستند، به عنوان مثال در شکل روبه‌رو داریم:



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم. با توجه به گزینه‌ها، زاویهٔ منفرجهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ B و D را می‌خواهیم که آن را α نامیده‌ایم.



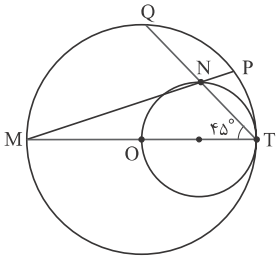
گام دوم: چهارضلعی ABCD، محاطی است و طبق فرض $\hat{C} = ۸۰^\circ$. اگر در نظر بگیریم $\hat{B} = ۲y$ و $\hat{D} = ۲x$، داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۰۰^\circ \\ \hat{D} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = ۹۰^\circ \end{cases}$$

گام سوم: مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABED را برابر با ۳۶۰° قرار می‌دهیم:

$$۱۰۰^\circ + x + y + \alpha = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{x+y=۹۰^\circ} ۱۹۰^\circ + \alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۷۰^\circ$$

5 مطابق شکل، دو دایره در نقطهٔ T بر هم مماس‌اند و دایرهٔ کوچک‌تر، از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر می‌گذرد. اگر شعاع دایرهٔ کوچک ۵ باشد، طول NP کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) $\sqrt{۱۰}$

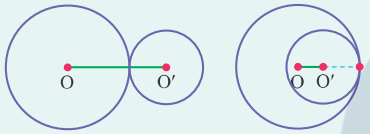
مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی خارج کشور ۱۴۰۰ طرح شده است، البته ایدهٔ حل آن چند بار در کنکورهای قبل از آن هم مورد پرسش بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از O به N و از M به Q وصل کنید.

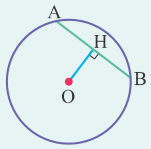
درس Box

۱) اگر دو دایره بر هم مماس باشند، نقطهٔ تماس آن‌ها بر خط گذرنده از مرکزهای آن‌ها واقع است.



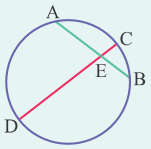
۲) در هر دایره، اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است، پس اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر، ۹۰° است.

۳) اگر از مرکز هر دایره، به وتری از آن عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می‌کند و برعکس.



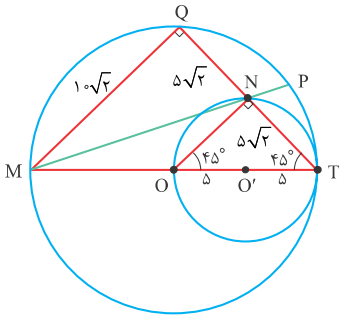
$OH \perp AB \Leftrightarrow AH = BH$

۴) مطابق شکل، اگر در یک دایره، دو وتر AB و CD، همدیگر را در نقطهٔ E درون دایره قطع کنند، آن‌گاه $EA.EB = EC.ED$.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ O' (مرکز دایرهٔ کوچک) بر پاره‌خط OT واقع است؛ بنابراین OT قطر دایرهٔ کوچک است. اگر از O به N وصل کنیم، داریم $O\hat{N}T = ۹۰^\circ$، زیرا این زاویه، در دایرهٔ کوچک، یک زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر است؛ بنابراین $\overset{\Delta}{NOT}$ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول وتر ۱۰ است که طول هر ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۰ = ۵\sqrt{۲}$ است.



گام دوم: در دایرهٔ بزرگ، از مرکز دایره (نقطهٔ O) به وتر TQ عمود کرده‌ایم، پس $QN = TN = ۵\sqrt{۲}$.

گام سوم: در دایرهٔ بزرگ، داریم $M\hat{Q}T = ۹۰^\circ$، زیرا این زاویه، در این دایره، یک زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر است، پس $\overset{\Delta}{QMT}$ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه $QM = QT = ۱۰\sqrt{۲}$.

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ QMN بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

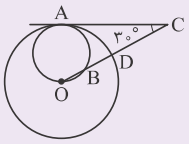
$$MN = \sqrt{QM^2 + QN^2} = \sqrt{200 + 50} = \sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10} = 5\sqrt{10}$$

گام پنجم: در نهایت، در دایرهٔ بزرگ، برای دو وتر MP و QT که در نقطهٔ N متقاطع‌اند، داریم:

$$NP.NM = NT.NQ \Rightarrow NP = \frac{NT.NQ}{NM} = \frac{(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})}{5\sqrt{10}} = \frac{5 \times 2}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

کنکور

در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایرهٔ کوچک، در نقطهٔ A بر دایرهٔ بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایرهٔ کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD کدام است؟ (سؤال ۱۵۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۰ (خارج از کشور))



۱) ۴

۲) ۳

۳) $\sqrt{6}$

۴) ۲

سنجش کلاد

1 **کدام تبدیل می‌تواند همانی باشد؟**

۱) انتقال با بردار غیرصفر
۲) دوران با زاویهٔ غیرصفر
۳) تجانس معکوس
۴) بازتاب

مشاوره این سؤال براساس قسمت (الف) فعالیت صفحه‌های ۴۷ و ۴۸ کتاب درسی طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint به ازای هر عدد طبیعی n ، زاویهٔ $\alpha + n \times 360^\circ$ بر زاویهٔ α منطبق است.

درس Box **تبدیل همانی**: تبدیل T را همانی می‌گوییم، هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم: $T(A) = A$. به عبارت دیگر تبدیل همانی، هر نقطهٔ صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): انتقال، تنها در صورتی همانی است که بردار انتقال، بردار صفر باشد.

گزینهٔ (۲): در صورتی که زاویهٔ دوران، مضربی از 360° باشد، تمام نقاط صفحه بر خودشان منطبق می‌شوند؛ بنابراین دوران با زاویهٔ غیرصفر نیز می‌تواند تبدیل همانی باشد.

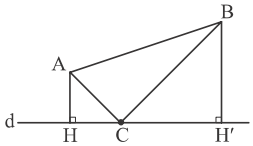
گزینهٔ (۳): تجانس، تنها در صورتی همانی است که نسبت تجانس $k = 1$ باشد که در این صورت تجانس مستقیم است و تجانس معکوس هیچ‌گاه تبدیل همانی نیست.

گزینهٔ (۴): در بازتاب به‌جز نقاطی که روی محور بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مانند A ، نقطه‌ای مانند A' است که در طرف دیگر محور بازتاب قرار دارد؛ بنابراین بازتاب، هیچ‌گاه تبدیل همانی نیست.

کتاب درسی **در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟**

(هندسه (۲) ـ فعالیت (قسمت الف) صفحهٔ ۴۷ و ۴۸ کتاب درسی)

2 در شکل زیر فاصلهٔ نقاط A و B از خط d به ترتیب ۸ و ۲۰ است و نقطهٔ C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد. اگر $HH' = ۳۵$ باشد، مساحت مثلث ACH کدام است؟



۱) ۶۴
۲) ۵۶
۳) ۴۸
۴) ۴۰

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۲ کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴ طراحی شده است.

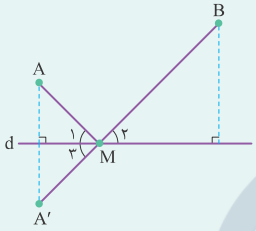
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

دو مثلث ACH و BCH′ متشابه‌اند.

درس Box

مسئلهٔ هرون: فرض کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d باشند و بخواهیم از نقطهٔ A به نقطه‌ای مانند M روی خط d رفته و از آن‌جا به نقطهٔ B برویم. برای پیداکردن کوتاه‌ترین طول ممکن برای خط شکستهٔ AMB، کافی است بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d پیدا کنیم و سپس از آن نقطه (نقطهٔ A′) به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. نقطهٔ M همان نقطهٔ مورد نظر مسئله است. در این صورت داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\text{طبق تعریف بازتاب: } \hat{M}_۱ = \hat{M}_۳ \\ \text{زوایای متقابل به رأس: } \hat{M}_۲ = \hat{M}_۳\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق مسئلهٔ هرون $A\hat{C}H = B\hat{C}H'$. از طرفی $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$، پس دو مثلث ACH و BCH′ به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و در نتیجه داریم:

$$\frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{CH}{\underbrace{CH + CH'}_{HH'}} = \frac{۲}{۲+۵} \Rightarrow \frac{CH}{۳۵} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow CH = ۱۰$$

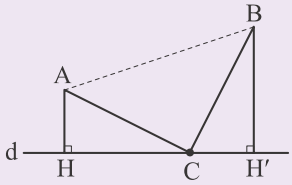
گام دوم: مساحت مثلث ACH برابر است با:

$$S_{ACH} = \frac{۱}{۲} AH \times CH = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۰ = ۴۰$$

کنکور

در شکل زیر، فاصلهٔ نقاط A و B از خط d، به ترتیب $۲\sqrt{۳}$ و $۵\sqrt{۳}$ واحد است و نقطهٔ C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کم‌ترین باشد. اگر مساحت مثلث ACH برابر $۶\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ HH′ کدام است؟

(سؤال ۳۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))



۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۱
۴) ۲۴

3 در مستطیل $ABCD$، ضلع AB از ضلع $AD = ۴$ بزرگ‌تر است. نقطهٔ M روی ضلع CD قرار دارد و در انتقالی با بردار $\overrightarrow{CM}$، ناحیهٔ مشترک بین مستطیل و تصویرش یک مربع است. اگر $BM = ۵$، آن‌گاه مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با رسم شکل، طول بردار $\overrightarrow{CM}$ را محاسبه کنید.

درس Box

ویژگی‌های انتقال:

۱) انتقال، تبدیل طولپا است.

۲) انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.

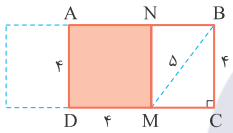
۳) انتقال، اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۴) انتقال، جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

۵) بردارهایی که هر نقطه از شکل را به تصویر آن تحت انتقال وصل می‌کنند، همگی با هم برابرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق شکل $\overrightarrow{CM}$ بردار انتقال است و چهارضلعی $ADMN$ مربع است، پس داریم:



$$DM = AD = ۴$$

گام دوم: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BCM داریم:

$$BM^۲ = BC^۲ + CM^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۴^۲ + CM^۲ \Rightarrow CM^۲ = ۹ \Rightarrow CM = ۳$$

بنابراین در مستطیل $ABCD$ می‌توان نوشت:

$$CD = CM + DM = ۳ + ۴ = ۷$$

گام سوم: مساحت مستطیل $ABCD$ برابر است با:

$$S_{ABCD} = AD \times CD = ۴ \times ۷ = ۲۸$$

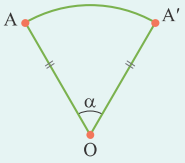
4 مثلث ABC را که در آن $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است. حول رأس A با زاویهٔ ۴۰° دوران می‌دهیم تا مثلث $AB'C'$ ایجاد شود. زاویهٔ بین خطوط BB' و CC' کدام است؟

۱) ۲۰° ۲) ۵۰° ۳) ۶۰° ۴) ۸۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳

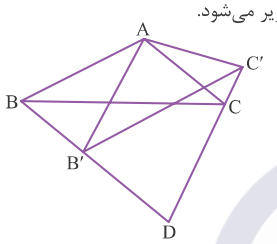
Hint مثلث‌های متساوی‌الساقین را مشخص کرده و زوایای مورد نیاز را به کمک آن محاسبه کنید.

درس Box **دوران**: دوران به مرکز O و زاویهٔ α تبدیلی است که در آن نقطهٔ A بر نقطهٔ A' تصویر می‌شود به طوری که:



$$\begin{cases} OA = OA' \\ A\hat{O}A' = \alpha \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: مطابق شکل، تحت دوران ۴۰° به مرکز A، نقطهٔ B بر B' و نقطهٔ C بر C' تصویر می‌شود.



گام دوم: طبق تعریف دوران $AB = AB'$ و $AC = AC'$ است. پس مثلث‌های ABB' و ACC' متساوی‌الساقین هستند و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABB'}: A\hat{B}B' = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ACC'}: A\hat{C}'C = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

گام سوم: مجموع زوایای هر چهارضلعی، برابر ۳۶۰° است، پس در چهارضلعی $ABDC'$ داریم:

$$B\hat{A}C' + A\hat{B}B' + \hat{D} + A\hat{C}'C = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱۶۰^\circ + ۷۰^\circ + \hat{D} + ۷۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = ۶۰^\circ$$

پس زاویهٔ بین خطوط CC' و BB' برابر ۶۰° است.

سنجش کلاد

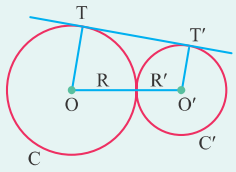
5 دایره‌ای را در تجانس به مرکز نقطه‌ای واقع بر آن تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس‌مشترک دایرهٔ اولیه و تصویرش در این تجانس، برابر با شعاع دایرهٔ تصویر باشد، نسبت تجانس کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

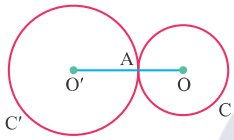
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint دقت کنید که مرکز تجانس در این تجانس ثابت می‌ماند، پس دو دایره در یک نقطه مشترک‌اند.

درس Box اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس‌خارج باشند، طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره از رابطهٔ $TT'=۲\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** فرض کنید A نقطه‌ای روی دایرهٔ C باشد. اگر A مرکز تجانسی باشد که دایرهٔ C را بر روی دایرهٔ C' تصویر می‌کند، آن‌گاه دو دایره، مماس‌خارج هستند و چون مراکز دو دایره در دو طرف نقطهٔ A قرار دارند، پس نسبت تجانس منفی است:



گام دوم: مطابق فرض، طول مماس‌مشترک دو دایره، برابر با شعاع دایرهٔ تصویر است، پس داریم:

$$TT'=۲\sqrt{RR'} \Rightarrow R'=۲\sqrt{RR'} \xrightarrow{\text{توان ۲}} R'^{۲}=۴RR' \Rightarrow R'=۴R \Rightarrow \frac{R'}{R}=۴$$

بنابراین نسبت تجانس برابر $k=-۴$ است.

توجه اگر $k>۰$، آن‌گاه دو دایره مماس‌درون بوده و طول مماس‌مشترک آن‌ها صفر خواهد بود، پس $k<۰$.

۱- در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطه دورترین فاصله را از ساحل دارد؟

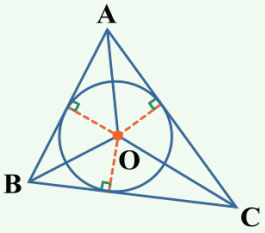
۱) محل همرسی عمودمنصف‌ها
۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع‌ها
۴) محل همرسی میانه‌ها

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۹)

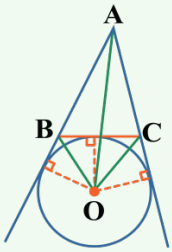
واضح است که فاصله یعنی فاصلهٔ نقطه تا نزدیک‌ترین ساحل (ضلع). اما مرکز دایرهٔ محاطی که محل همرسی نیمسازها است، از هر ۳ ضلع به یک فاصله است و مینیمم فاصله از ساحل عملاً با فاصلهٔ این نقطه از هر ۳ ساحل برابر است؛ اما به راحتی می‌توانید نشان دهید سایر نقاط به یکی از اضلاع نزدیک‌ترند.

همرسی‌های معروف

۱) محل برخورد نیمسازهای زوایای درونی مثلث، نقطه‌ای است که از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله بوده و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث است.

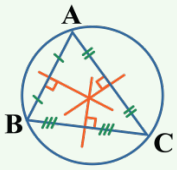


۲) محل برخورد دو نیمساز زوایای خارجی مثلث و نیمساز زاویهٔ داخلی دیگر مثلث، نقطه‌ای است که از یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر به یک فاصله بوده و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث است.



بنابراین در صفحهٔ یک مثلث **۴ نقطه** وجود دارد که از هر ۳ ضلع مثلث یا از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر به یک فاصله‌اند.

۳) محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع یک مثلث، از هر ۳ رأس مثلث به یک فاصله است و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.



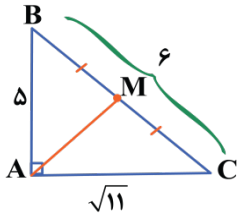
۲- در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و $\sqrt{11}$، فاصلهٔ محل همرسی ارتفاع‌ها از محل همرسی عمودمنصف‌ها چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
۳) ۳
۴) $\frac{11}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ

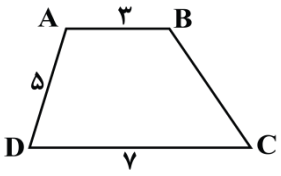
این مثلث قائم‌الزاویه است؛ زیرا بین اضلاع آن رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $۵^۲+(\sqrt{۱۱})^۲=۶^۲$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه محل همرسی ارتفاع‌ها بر رأس قائمه منطبق است، از طرفی محل همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر است. پس فاصله این دو نقطه از هم، اندازهٔ همان میانهٔ وارد بر وتر است که می‌دانیم برابر نصف وتر است. پس:



$$AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

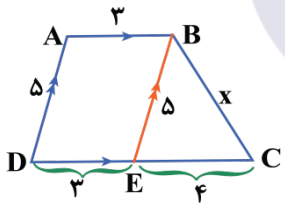
۳- در ذوزنقهٔ ABCD که $AB\parallel DC$، $AB=۳$، $AD=۵$ و $DC=۷$ است، اندازهٔ ضلع BC چند عدد طبیعی مختلف می‌تواند اختیار کند؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۱)

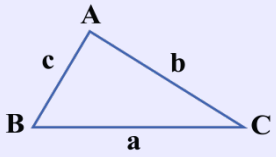
از B پاره‌خط BE را موازی ضلع AD رسم می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع ABED تشکیل شود، بنابراین در مثلث BEC از نامساوی مثلثی برای اندازهٔ ضلع BC استفاده می‌کنیم:



$$BE-EC<BC<BE+EC\Rightarrow ۱<BC<۹\Rightarrow \text{اعداد طبیعی قابل قبول}=۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸$$
$$\Rightarrow \text{تعداد}=۸-۲+۱=۷$$

نامساوی مثلث

در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.



$$|b-c|<a<b+c$$
$$|a-c|<b<a+c$$
$$|a-b|<c<a+b$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

مثلثی با اندازهٔ اضلاع ۳، ۲ و ۶ وجود ندارد؛ زیرا اضلاع در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کنند. $۳-۲<۶<۳+۲$ ×

قِلقِشو یاد بگیر!

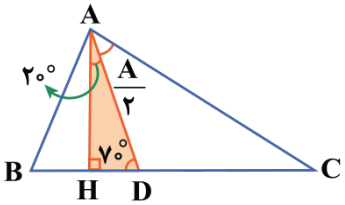
اگر تعدادی عدد متوالی داشته باشیم و بخواهیم تعداد آن‌ها را به‌دست آوریم، داریم:

$$\text{تعداد اعداد متوالی} = (\text{بزرگ‌ترین عدد} - \text{کوچک‌ترین عدد}) + ۱$$

۴- در مثلث ABC، زاویهٔ بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر ۲۰° است. اگر بین زوایای مثلث رابطهٔ $\hat{A}=۲\hat{B}+\hat{C}$ برقرار باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۰° ۲) ۱۱° ۳) ۱۲° ۴) ۱۳°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۸)



در مثلث $\overset{\triangle}{ADH}$، $\hat{D}$ متمم زاویهٔ ۲۰° است، بنابراین $\hat{D}=۷۰°$ می‌باشد. از طرفی $\hat{D}$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ است، بنابراین:

$$\hat{D}=\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C} \Rightarrow ۷۰°=\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C} \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{C}=۱۴۰°$$

بنابراین باید یک دستگاه ۳ معادله ۳ مجهولی حل کنیم.

$$\begin{cases} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰° & \text{(جمع زوایای مثلث)} \quad (۱) \\ \hat{A}+۲\hat{C}=۱۴۰° \Rightarrow \hat{A}=۱۴۰°-۲\hat{C} & (۲) \\ \hat{A}=۲\hat{B}+\hat{C} & \text{(فرض)} \quad (۳) \end{cases}$$

بنابراین با جای‌گذاری (۲) در (۱) و (۳) داریم:

$$\begin{cases} ۱۴۰°-۲\hat{C}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰° \\ ۱۴۰°-۲\hat{C}=۲\hat{B}+\hat{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}-\hat{C}=۴۰° \\ ۲\hat{B}+۳\hat{C}=۱۴۰° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲\hat{B}-۲\hat{C}=۸۰° \\ ۲\hat{B}+۳\hat{C}=۱۴۰° \end{cases} \Rightarrow ۵\hat{C}=۶۰° \Rightarrow \hat{C}=۱۲°$$

یادآوری!

اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی در مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.

نکته!

زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز رسم شده از یک رأس مثلث برابر نصف اختلاف ۲ زاویهٔ دیگر است. طبق این نکته می‌توانیم از این روش نیز به رابطهٔ $\hat{B}-\hat{C}=۴۰°$ برسیم:

$$۲۰°=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=۴۰°$$

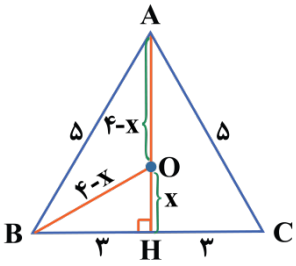
۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC=۵$ و $BC=۶$ می‌باشد، فاصلهٔ محل همرسی عمودمنصف‌ها از قاعده چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۶}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۸)

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ تمام زاویه‌ها حاده‌اند، پس محل تلاقی عمودمنصف‌ها داخل مثلث قرار دارد. از طرفی می‌دانیم این نقطه روی ارتفاع AH واقع است؛ زیرا مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و ارتفاع وارد بر BC بر عمودمنصف وارد بر BC منطبق است.

از طرفی با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس AH به سادگی به‌دست می‌آید:



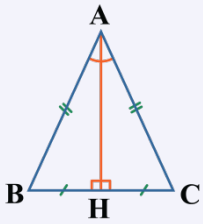
$$\begin{cases} AH = ۴ \\ OH = x \end{cases} \Rightarrow AO = ۴ - x$$

اما O از ۳ رأس به یک فاصله است، بنابراین فاصلهٔ B از O برابر با $۴ - x$ است. حال در مثلث BOH رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$۳^۲ + x^۲ = (۴ - x)^۲ \Rightarrow ۹ = -۸x + ۱۶ \Rightarrow x = \frac{۷}{۸}$$

یادت نره

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه، عمود منصف و نیمساز وارد بر قاعده، بر هم منطبق‌اند.



سنجش کلاد

آیا هر ماتریسی وارون‌پذیره؟! خیر!

شرط لازم و کافی برای آن‌که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، آن است که:

$$|A| = ad - bc \neq ۰$$

ماز

۱- در مثلث **ABC**، اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}$ و محیط مثلث ۱۸ باشد، حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟ (منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع **a** است.)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۶}$ ۳) $\frac{۱۹}{۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۲)

اگر فرض کنیم $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}=k$، آن‌گاه $a=۲k$، $b=۳k$ و $c=۴k$ خواهد بود و حال محیط مثلث برابر ۱۸ است، بنابراین:

$$a+b+c=۱۸ \Rightarrow ۲k+۳k+۴k=۱۸ \Rightarrow ۹k=۱۸ \Rightarrow k=۲$$

بنابراین $a=۴$، $b=۶$ و $c=۸$ خواهد بود، حال می‌دانیم:

$$S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}=\frac{\frac{۲S}{a}}{\frac{۲S}{b}}+\frac{\frac{۲S}{b}}{\frac{۲S}{c}}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=\frac{۶}{۴}+\frac{۸}{۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۷}{۶}$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

۱) در تناسب‌هایی که صورت‌ها مجهول و مخرج‌ها معلوم است، تناسب داده شده را برابر k قرار دهید و همهٔ‌متغیرها را برحسب k به‌دست آورید.

۲) در هر مثلث، نسبت اضلاع با عکس نسبت ارتفاع‌های نظیر آن‌ها متناسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$$

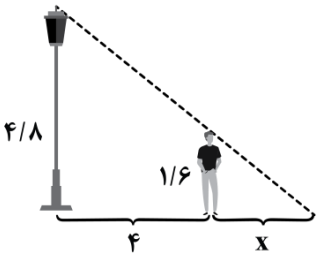
ماز

۲- شخصی با قد ۱۶۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۴ متری از تیر چراغ برق به ارتفاع ۴/۸ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص روی زمین چند سانتی‌متر از قد شخص بیش‌تر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

یک شکل فرضی به صورت زیر رسم می‌کنیم و همهٔ اندازه‌های داده شده را به متر روی آن می‌نویسیم و طول سایه را x فرض می‌کنیم:



حال طبق قضیهٔ تالس داریم:

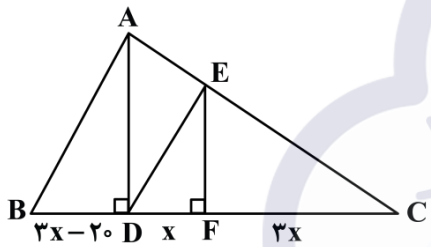
$$\frac{۱/۶}{۴/۸}=\frac{x}{x+۴}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x=x+۴\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲$$

بنابراین طول سایه ۲۰۰cm است؛ که ۴۰cm بلندتر از خود شخص است.

راز طراح!

حواست بود که باید واحدها یکی می‌شد؟ یا همه سانتی‌متر یا همه متر! 😉

۳- در مثلث ABC مطابق شکل AB||ED است، مساحت مثلث EFC چه کسری از مساحت مثلث ADC است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۹}{۱۶}$

۳) $\frac{۹}{۲۵}$

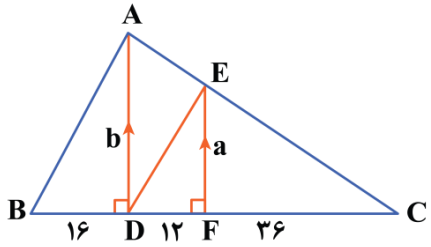
۴) $\frac{۱۶}{۲۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

طبق تمرین ۵ صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی داریم:

$$DC^۲=FC\times BC\Rightarrow(۴x)^۲=(۳x)(۷x-۲۰)\Rightarrow ۱۶x^۲=۲۱x^۲-۶۰x\Rightarrow ۵x^۲=۶۰x\xrightarrow{x\neq ۰}x=۱۲$$

حال طبق قضیهٔ تالس در مثلث ADC داریم:



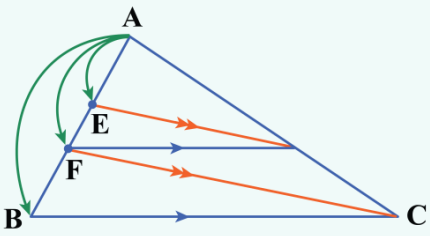
$$\frac{a}{b}=\frac{۳۶}{۳۶+۱۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}b$$

از طرفی دو مثلث EFC و ADC هر دو قائم‌الزاویه هستند، بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}a\times FC}{\frac{۱}{۲}b\times DC}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times(\frac{۳}{۴}\cancel{b})\times ۳۶}{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times\cancel{b}\times ۴۸}=\frac{۹}{۱۶}$$

جرقهٔ ذهنی!

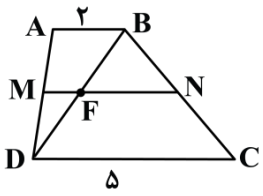
با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان ثابت کرد در شکل مقابل رابطهٔ زیر برقرار است:



$$AF^{۲} = AE \times AC$$

مثال

۴- در ذوزنقهٔ **ABCD** مطابق شکل پاره‌خط **MN** موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم شده است، به‌طوری‌که توسط قطر **DB** به دو قسمت نامساوی، طوری تقسیم شده است که قطعهٔ بزرگ‌تر سه برابر قطعهٔ کوچک‌تر است. اندازهٔ پاره‌خط **MN** کدام است؟ **(NF > MF)**



۱) $\frac{۴۰}{۱۱}$

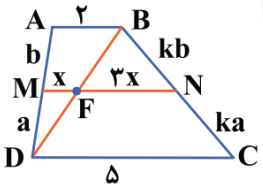
۲) $\frac{۳۹}{۱۱}$

۳) $\frac{۲۰}{۱۱}$

۴) $\frac{۳۰}{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

اگر فرض کنیم $AM = b$ ، $MD = a$ و همچنین $MF = x$ و $FN = ۳x$ باشد، آن‌گاه طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\overset{\triangle}{ABD}: \frac{x}{۲} = \frac{a}{a+b}$$

$$\overset{\triangle}{DBC}: \frac{۳x}{۵} = \frac{kb}{kb+ka} = \frac{b}{a+b} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{۵-۳x}{۵} = \frac{a}{a+b}$$

حال طرف دوم دو رابطه با هم یکسان است، پس باید طرف اول هم یکسان باشد:

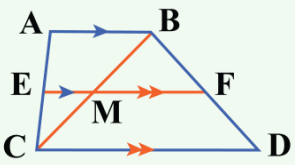
$$\frac{x}{۲} = \frac{۵-۳x}{۵} \Rightarrow ۵x = ۱۰ - ۶x \Rightarrow ۱۱x = ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۱۱}$$

حال طول پاره‌خط MN برابر است با:

$$MN = x + ۳x = ۴x = ۴ \times \frac{۱۰}{۱۱} = \frac{۴۰}{۱۱}$$

یه نکتهٔ طلایی!

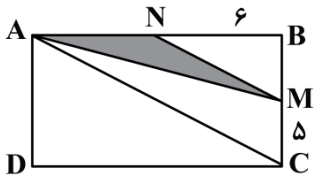
در ذوزنقهٔ مقابل، اگر $AB \| EF \| CD$ باشد، در این صورت به کمک قضیهٔ تالس در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC}: EM \| AB \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CM}{MB} & (۱) \\ \overset{\triangle}{BCD}: MF \| CD \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow{\text{معکوس کردن طرفین}} \frac{FD}{BF} = \frac{MC}{BM} & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{CE}{EA} = \frac{FD}{BF} \xrightarrow[CE=a, EA=b]{\text{فرض کنیم}} \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$$

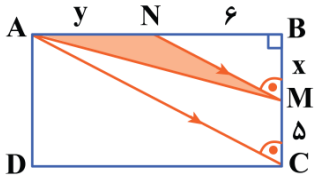
۵- در مستطیل $ABCD$ مطابق شکل $NB=۶$ و $MC=۵$، اگر $N\hat{M}B=A\hat{C}M$ باشد، مساحت مثلث رنگ شده کدام است؟



۱) ۷/۵
۲) ۳۰
۳) ۱۵
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به این‌که $N\hat{M}B=A\hat{C}M$ است، بنابراین $NM \parallel AC$ و حال در مثلث ABC طبق تالس داریم:



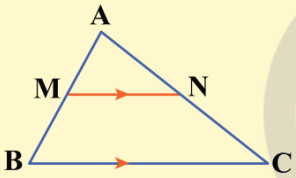
$$\frac{۶}{y}=\frac{x}{۵}\Rightarrow xy=۳۰$$

از طرفی مساحت مثلث AMN برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(x)(y)=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

قضیهٔ تالس

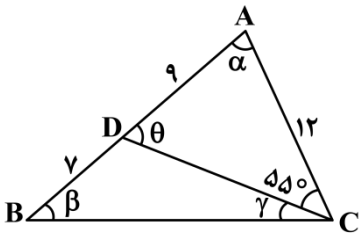
اگر در مثلث ABC پاره‌خط MN موازی قاعدهٔ BC باشد، آن‌گاه طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

پاسخ هندسه دهم ماز 15 آبان

۱- **با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه الزاماً درست است؟**



۱) $\gamma = ۲۵^\circ$

۲) $\theta = ۷۵^\circ$

۳) $\beta = ۵۵^\circ$

۴) $\alpha = ۶۵^\circ$

پاسخ : گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)

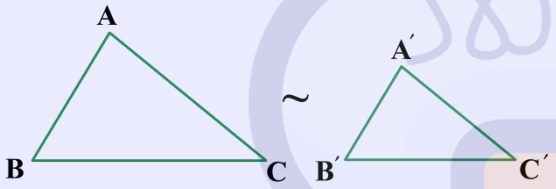
در دو مثلث ADC و ABC داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر}} \overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

حال چون دو مثلث ABC و ADC با داشتن یک زاویهٔ برابر و اضلاع متناسب متشابه هستند، بنابراین باید زوایای نظیر نیز برابر باشند، بنابراین $\beta = ۵۵^\circ$ است.

تشابه دو مثلث

دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه‌اند هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.

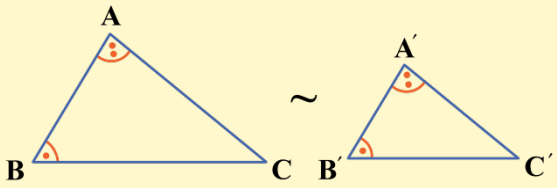


$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \hat{A} = \hat{A}' \ ,\ \hat{B} = \hat{B}' \ ,\ \hat{C} = \hat{C}' \\ ۲)\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \end{cases}$$

عدد k را در رابطهٔ فوق **نسبت تشابه** می‌نامند. حال اگر نسبت تشابه برابر با k باشد، می‌گویند مثلث ABC با نسبت k با مثلث $A'B'C'$ متشابه است. در این صورت مثلث $A'B'C'$ نیز با نسبت $\frac{۱}{k}$ با مثلث ABC متشابه است.

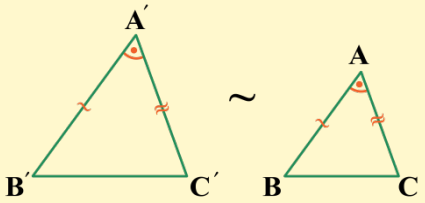
حالت‌های مختلف تشابه دو مثلث

۱) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



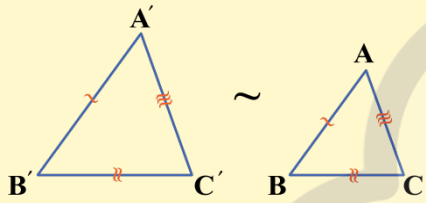
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۲) هرگاه یک زاویه از دو مثلث با هم برابر و اضلاع این دو زاویه در دو مثلث متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



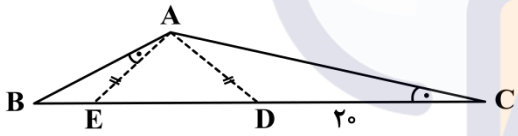
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$
$$\hat{A}=\hat{A}'$$

۳) هرگاه اندازه‌های سه ضلع یک مثلث با اندازه‌های سه ضلع مثلثی دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۲- در شکل مقابل، $AE=AD$ و $B\hat{A}E=A\hat{C}D$ و همچنین ضلع AC دو برابر ضلع AB است، اگر $DC=۲۰cm$ باشد، اختلاف اندازهٔ پاره‌خط‌های AE و BE کدام است؟



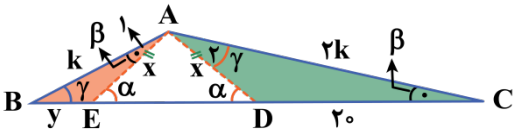
۱) $۵cm$
۲) $۴cm$
۳) $۶cm$
۴) $۱۰cm$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به این‌که $AE=AD$، پس $\hat{E}=\hat{D}=\alpha$ و مکمل این دو زاویه نیز با هم برابرند، یعنی $A\hat{E}B=A\hat{D}C$ حال چون $\hat{C}=\hat{A}_۱$ است؛ داریم:

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{A}_۱\\ A\hat{E}B=A\hat{D}C\end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویهٔ برابر}} \overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{ADC}$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ به حالت دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند. در نتیجه اضلاع نظیر متناسب‌اند و داریم:

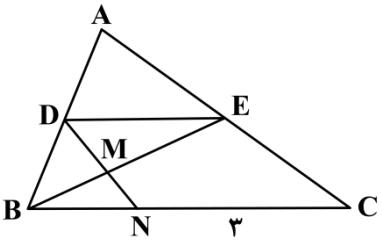


$$\frac{x}{y}=\frac{۲k}{k}=\frac{۲۰}{x} \Rightarrow \begin{cases}x=۱۰\\ \frac{۱۰}{y}=\frac{۲k}{k}\Rightarrow y=۵\end{cases}$$

بنابراین $AE=۱۰$ و $BE=۵$ و اختلاف اندازه‌های این دو پاره‌خط برابر است با:

$$AE-BE=۱۰-۵=۵$$

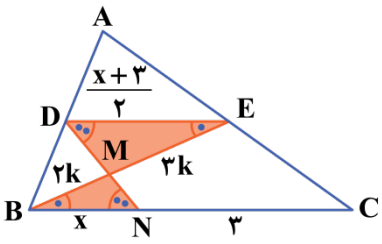
۳- مطابق شکل، نقاط D و E وسط اضلاع AB و AC بوده و $NC=۳$ است، اگر $۳BM=۲ME$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط DE کدام است؟



۱) ۲/۲۵
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۲)

چون $۳BM=۲ME$ است، اگر فرض کنیم $BM=۲k$ باشد، در این صورت $ME=۳k$ خواهد بود، یا به عبارتی:



$$\frac{BM}{ME}=\frac{۲}{۳}$$

حال با فرض $BN=x$ خواهیم داشت: $BC=x+۳$ و طبق تالس داریم:

$$\frac{DE}{x+۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow DE=\frac{x+۳}{۲}$$

حال از تشابه دو مثلث $\overset{\triangle}{MDE}$ و $\overset{\triangle}{BMN}$ داریم:

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{E}\\ \hat{N}=\hat{D}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو زاویهٔ برابر}}\overset{\triangle}{MDE}\sim\overset{\triangle}{BMN}\Rightarrow\text{اضلاع متناسب‌اند.}$$

پس با نوشتن نسبت اضلاع داریم:

$$\frac{ME}{BM}=\frac{DE}{BN}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{\frac{x+۳}{۲}}{x}\Rightarrow ۳x=x+۳\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

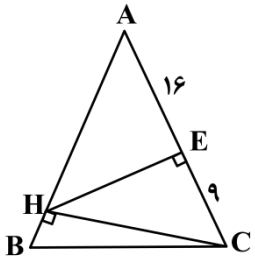
بنابراین اندازهٔ پاره‌خط DE برابر است با:

$$DE=\frac{x+۳}{۲}=\frac{\frac{۳}{۲}+۳}{۲}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

به خاطر بسپار...

خطی که وسط‌های دو ساق یک مثلث را به هم وصل می‌کند موازی قاعده و نصف آن است.

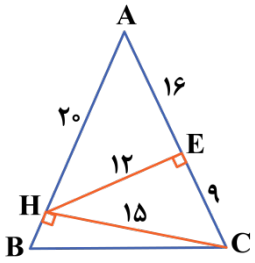
۴- مطابق شکل مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB=AC)$ و CH ارتفاع وارد بر ساق است. اگر $AE=۱۶$ و $EC=۹$ باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BHC است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۲)

مثلث AHC قائم‌الزاویه است و HE ارتفاع وارد بر وتر این مثلث است، بنابراین:



$$HE^۲ = AE \times EC \Rightarrow HE^۲ = ۱۶ \times ۹ \Rightarrow HE = ۱۲$$

حال در مثلث‌های $\overset{\triangle}{HEC}$ و $\overset{\triangle}{AHE}$ طبق فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲ = ۴^۲(۳^۲ + ۴^۲) \Rightarrow AH = ۲۰$$
$$HC^۲ = ۱۲^۲ + ۹^۲ = ۳^۲(۴^۲ + ۳^۲) \Rightarrow HC = ۱۵$$

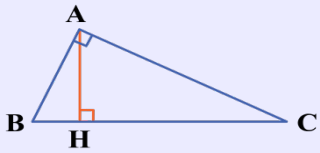
(میانبر سه‌تایی فیثاغورسی را در انتهای سؤال برای علاقه‌مندان آورده‌ایم.)

از طرفی $AC = ۱۶ + ۹ = ۲۵$، بنابراین $HB = ۲۵ - ۲۰ = ۵$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{BHC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times HC \times AB}{\frac{۱}{۲} \times HC \times HB} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۲۵}{\frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۵} = ۵$$

روابط طولی در مثلث

اگر ABC مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه:



۱) $AH^۲ = BH \times HC$
۲) $AB^۲ = BH \times BC$
۳) $AC^۲ = CH \times BC$
۴) $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

جرقهٔ ذهنی!

از ابتدای حل سؤال اگر به این دقت کنیم که CH ارتفاع مشترک هر دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{BHC}$ است؛ متوجه می‌شویم که برای یافتن نسبت مساحت این دو مثلث، کافی است، نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع یعنی $\frac{AB}{BH}$ را حساب کنیم.

میانبر سه‌تایی فیثاغورسی رو که بلدی نه؟

دو دسته عدد پرتکرار داریم که در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند و بهتر است همیشه آن‌ها را حفظ باشیم. این دو دسته عبارتند از:

$$۳, ۴, ۵ \longrightarrow ۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$

$$۵, ۱۲, ۱۳ \longrightarrow ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$$

این روش میانبر برای حذف محاسبات مربوط به رابطهٔ فیثاغورس و سرعت عمل بیش‌تر است. وقتی دو عدد از بین این ۳ تا را داشته باشیم می‌توانیم بدون محاسبه، سومی را به‌دست بیاوریم.

k برابر سه‌تایی‌های فیثاغورثی هم فیثاغورثی‌اند!

این نکتهٔ تکمیلی هم برای اونایی که دیگه خیلی می‌خوان خفن باشن بگیم. اگر k یک عدد صحیح باشه داریم:

$$(۳k)^۲ + (۴k)^۲ = (۵k)^۲$$

$$(۵k)^۲ + (۱۲k)^۲ = (۱۳k)^۲$$

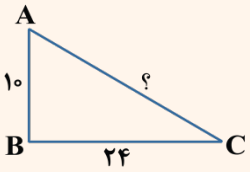
مثلا: $(۲\times ۳)^۲ + (۲\times ۴)^۲ = (۲\times ۵)^۲ \Rightarrow ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰^۲$

تذکر

توجه داشته باشید که هر ۳ عدد باید در یک ضریب یکسان ضرب شوند، تا همچنان رابطهٔ فیثاغورس برقرار باشد.

یه نمونهٔ باحال ببین!

برای به‌دست آوردن طول ضلع AC با دقت به طول دو ضلع دیگر می‌بینیم:

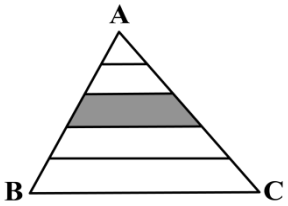


$$۱۰ = ۲\times ۵$$

$$۲۴ = ۲\times ۱۲$$

پس با سه‌تایی فیثاغورسی ۵، ۱۲ و ۱۳ سر و کار داریم که همگی دو برابر شده‌اند.در نتیجه عدد سوم برابر است با: $۲\times ۱۳ = ۲۶$

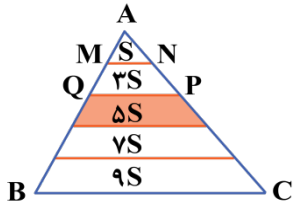
۵- در شکل مقابل، ضلع AB به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است و از هر یک خطوطی به موازات ضلع BC رسم شده است. اگر مساحت ذوزنقهٔ رنگ شده برابر $۲۰cm^۲$ باشد، مساحت کوچک‌ترین ذوزنقهٔ شکل کدام است؟



۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۰۰۲)

با کمک تشابه می‌توان ثابت کرد که مساحت‌های ایجاد شده تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲S می‌دهند، یعنی داریم:



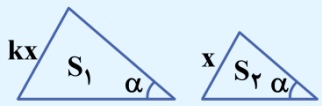
$$۵S = ۲۰ \Rightarrow S = ۴$$

حال کوچک‌ترین ذوزنقه MNPQ است که مساحت آن برابر است با:

$$۳S = ۳\times ۴ = ۱۲$$

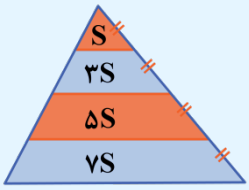
راهنمای زرنگ‌بازی!

۱) هرگاه دو مثلث (یا دو چندضلعی) متشابه باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با مربع نسبت تشابه یعنی:



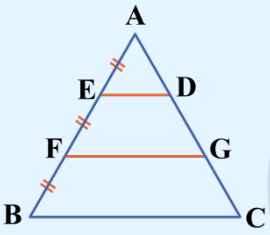
$$\frac{S_۱}{S_۲}=k^۲$$

۲) اگر یک ضلع مثلث به n قسمت مساوی تقسیم شود و از هر یک خطی به موازات قاعده رسم شود و مساحت کوچک‌ترین ناحیه برابر S باشد، مساحت محصور بین خطوط، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲S می‌دهند.



اثبات (۲):

برای $n=۳$ ثابت می‌کنیم و برای باقی nها نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.



ابتدا توجه کنید که هر ۳ مثلث (در حالت کلی n مثلث) به وجود آمده با هم متشابه‌اند:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}\\ \frac{AE}{AF}=\frac{AD}{AG}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر}}\overset{\triangle}{AED}\sim\overset{\triangle}{AFG}\xrightarrow{\text{نسبت مساحت‌ها}}\frac{S_{\overset{\triangle}{AED}}}{S_{\overset{\triangle}{AFG}}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

حال اگر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AED}$ را برابر S فرض کنیم، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AED}}}{S_{\overset{\triangle}{AFG}}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S}{S_{\overset{\triangle}{AFG}}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AFG}}=۴S$$

$$\Rightarrow S_{EDGF}=۴S-S=۳S$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\overset{\triangle}{AED}\sim\overset{\triangle}{ABC}$ و از آن‌جا:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AED}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲=\frac{۱}{۹}$$

و درنتیجه:

$$S_{FGCB}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{AFG}}=۹S-۴S=۵S$$

ماز

۱- **یک $n+1$ ضلعی محدب را در نظر بگیرید. اگر دو رأس از این $n+1$ ضلعی کم کنیم از تعداد قطرهای آن ۱۱ واحد کم می‌شود. چه تعداد از گزاره‌های زیر دربارهٔ این $n+1$ ضلعی درست است؟**

الف) از هر رأس آن ۵ قطر می‌گذرد.

ب) مجموع زوایای داخلی آن 1080° است.

ج) مجموع تعداد اضلاع و قطرهای آن ۲۸ است.

د) مجموع زوایای خارجی آن 270° است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم تعداد قطرهای n ضلعی از رابطهٔ $\frac{n(n-3)}{2}$ به‌دست می‌آید، همچنین اگر دو رأس از رأس‌های یک $n+1$ ضلعی کم کنیم، به یک $n-1$ ضلعی تبدیل خواهد شد؛ بنابراین:

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}-11 \Rightarrow n^2-5n+4=n^2-n-2-22 \Rightarrow 4n=28 \Rightarrow n=7$$

بنابراین $n+1$ ضلعی ما اکنون یک ۸ ضلعی است، حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

بررسی موارد:

الف

از هر رأس یک ۸ ضلعی $8-3=5$ قطر می‌گذرد. ✓

ب

مجموع زوایای داخلی یک ۸ ضلعی برابر است با: $(8-2)\times 180^\circ=1080^\circ$ ✓

ج

مجموع تعداد قطرها و اضلاع ۸ ضلعی برابر است با: $8+\frac{8\times 5}{2}=28$ ✓

د

مجموع زوایای خارجی یک n ضلعی محدب همواره برابر 360° است. ×

پس در مجموع ۳ گزاره درست است.

تعداد قطرهای یک n ضلعی

از هر رأس یک n ضلعی همواره $n-3$ قطر می‌گذرد و در نتیجه تعداد کل قطرهای یک n ضلعی برابر است با:

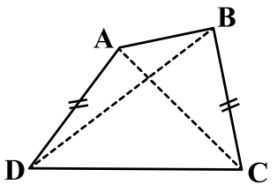
$$D_n=\frac{n(n-3)}{2}$$

مجموع زوایای داخلی و خارجی یک n ضلعی محدب

مجموع زوایای خارجی یک n ضلعی محدب همواره برابر 360° و مجموع زوایای داخلی آن برابر است با: $(n-2)\times 180^\circ$

نتیجهٔ مهم: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی همواره مضرب صحیحی از 180° است.

۲- در چهارضلعی ABCD مطابق شکل $AD=BC$ است. اگر وسط‌های دو قطر و وسط‌های اضلاع AB و DC را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی به‌دست آمده کدام ویژگی را حتماً دارد؟



۱) قطرهای برابر دارد.

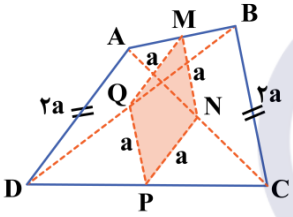
۲) اضلاع عمود بر هم دارد.

۳) قطرها عمودمنصف هم هستند.

۴) از برخورد نیمسازهای داخلی آن یک مربع ایجاد می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۰۰۳)

با چهار بار استفاده از حالت خاص تالس می‌توان نشان داد چهارضلعی به‌دست آمده لوزی است و قطرهای آن عمودمنصف هم هستند.



$\triangle ABD$ تالس در: $MQ=\frac{1}{2}AD$

$\triangle ADC$ تالس در: $NP=\frac{1}{2}AD$

$\triangle ABC$ تالس در: $MN=\frac{1}{2}BC$

$\triangle DBC$ تالس در: $PQ=\frac{1}{2}BC$

$\xrightarrow{BC=AD} MQ=NP=MN=PQ \Rightarrow$ $MNPQ$ لوزی است.

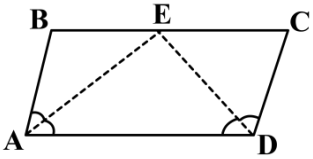
بدانید و آگاه باشید که...

از وصل کردن وسط‌های دو قطر و دو ضلع مقابل هر چهارضلعی محدب همواره یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که دو حالت خاص هم دارد:

۱) اگر دو ضلع مقابل دیگر برابر باشند چهارضلعی به‌دست آمده لوزی است.

۲) اگر امتداد دو ضلع مقابل دیگر بر هم عمود باشد، چهارضلعی به‌دست آمده مستطیل است.

۳- در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل AE و DE نیمساز هستند، اگر $AE=\sqrt{5}$ و $DE=\sqrt{11}$ باشد، محیط متوازی‌الاضلاع ABCD کدام است؟



۱) ۸

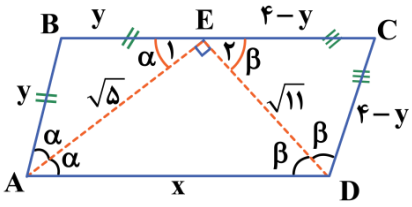
۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۰۰۳)

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $E_1=\alpha$ و $E_2=\beta$ خواهد بود و چون مجموع هر دو زاویهٔ مجاور در متوازی‌الاضلاع برابر 180° است، بنابراین:



$$2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$$

بنابراین $A\hat{E}D$ قائمه است؛ حال طبق فیثاغورس داریم:

$$x^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{11})^2=5+11=16 \Rightarrow x=4$$

حال با فرض $BE=y$ داریم: $EC=4-y$ و چون مثلث ABE و مثلث ECD هر دو متساوی‌الساقین هستند، داریم:

$$AB=y \text{ و } CD=4-y$$

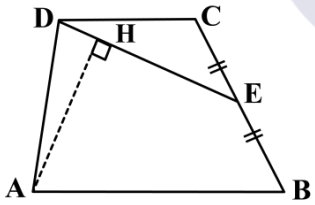
بنابراین محیط متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$(y)+(y)+(4-y)+(4-y)+x=8+4=12$$

دانستنی‌ها!

نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور در هر متوازی‌الاضلاع همواره بر هم عمودند. به همین خاطر از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع همواره یک مستطیل به‌دست می‌آید.

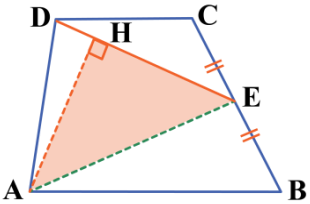
۴- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل، $AH \perp DE$ است. اگر $DE=6$ و مساحت ذوزنقه برابر ۴۸ باشد، طول پاره‌خط AH کدام ست؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۰۰۳)

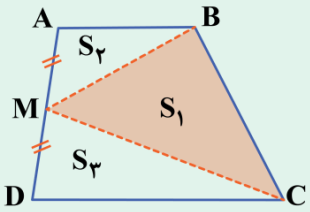
از E به A وصل می‌کنیم، در این صورت چون E وسط ساق BC است، مساحت مثلث ADE نصف مساحت ذوزنقه است، بنابراین:



$$S_{\triangle ADE}=\frac{48}{2}=24 \Rightarrow \frac{1}{2}AH\times DE=24 \Rightarrow \frac{1}{2}AH\times 6=24 \Rightarrow AH=8$$

قِلقِشو یاد بگیر!

به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر از وسط یک ساق به دو سر ساق دیگر ذوزنقه وصل کنیم مساحت مثلث به وجود آمده نصف مساحت ذوزنقه است.

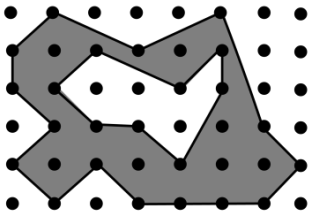


$$S_۱ = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

برای اثبات کافیست ارتفاع‌های دو مثلث ABM و MDC را رسم کنید و مجموع مساحت آن‌ها را پیدا کنید، این مجموع دقیقاً برابر با نصف مساحت ذوزنقه خواهد بود، پس مساحت مثلث رنگ شده نیز نصف دیگر خواهد بود.

مثال

۵- با توجه به مساحت چندضلعی شبکه‌ای، مساحت ناحیهٔ رنگ شده کدام است؟



۱) ۱۷
۲) ۱۷/۵
۳) ۱۸
۴) ۱۸/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای از رابطهٔ $S = \frac{b}{۲} + (i - ۱)$ به‌دست می‌آید که b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی است. حال باید مساحت چندضلعی بزرگ را به‌دست آوریم و مساحت چندضلعی درونی را از آن کم کنیم:

$$S_۱ = \frac{۱۵}{۲} + (۱۸ - ۱) = ۷/۵ + ۱۷ = ۲۴/۵$$

$$S_۲ = \frac{۸}{۲} + (۳ - ۱) = ۴ + ۲ = ۶$$

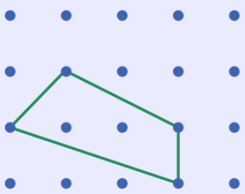
بنابراین مساحت قسمت رنگ شده برابر است با:

$$\Delta S = S_۱ - S_۲ = ۲۴/۵ - ۶ = ۱۸/۵$$

هر آنچه باید در مورد چندضلعی شبکه‌ای بدانید

مطابق شکل، نقطه‌هایی که روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند به طوری که فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی روی یک خط افقی یا خط عمودی برابر یک واحد باشد را **«نقاط شبکه‌ای»** می‌نامند.

اگر یک چندضلعی، تمام رأس‌هایش روی نقاط شبکه‌ای باشند، **«چندضلعی شبکه‌ای»** نامیده می‌شود. مانند:



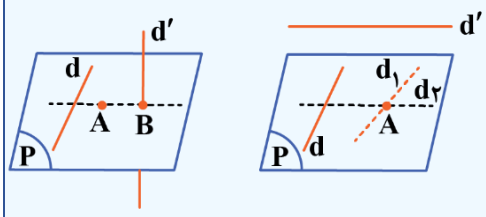
ماز

۱- نقطهٔ A خارج از دو خط متنافر d و d′ قرار دارد، چند خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d′ را قطع کند؟

۱) دقیقاً یک خط ۲) بی‌شمار خط ۳) حداکثر یک خط ۴) چنین خطی وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۸۱ ـ ۱۰۰۴)

بررسی سریع:

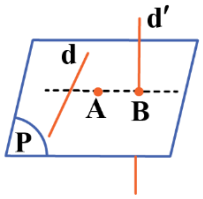


با توجه به دو حالت موجود در شکل‌ها حداکثر یک خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d′ را قطع کند.

یک صفحه بر نقطهٔ A و خط d عبور می‌دهیم که دو حالت ممکن است رخ دهد:

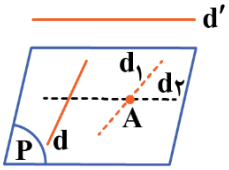
حالت اول

اگر صفحهٔ P خط d′ را در B قطع کند، خط گذرا از A و B جواب است. یعنی یک خط وجود دارد که از A می‌گذرد و d و d′ را قطع می‌کند.



حالت دوم

اگر صفحهٔ P موازی d′ باشد، هر خط که از A بگذرد و d را قطع کند با d′ موازی یا متنافر است. یعنی خطی وجود ندارد که از A بگذرد و d و d′ را قطع کند.



بنابراین صفر یا یک خط (حداکثر یک خط) وجود دارد که از A بگذرد و d و d′ را قطع کند.

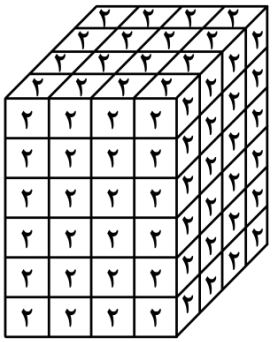
مشاوره‌نامه

حل مسائل هندسهٔ فضایی (مسائل مربوط به وضعیت نقطه، خط و صفحه) با فرمول یا قضیهٔ مشخصی حل نمی‌شود و صرفاً نیاز به دانستن تمامی مطالب و قضایای مربوط به آن‌ها و تجربه و تمرین و تصور درست دارد.

ماز

۲- **یک مکعب‌مستطیل به ابعاد ۴، ۴ و ۶ از مکعب‌های ۱×۱×۱ تشکیل شده است و روی هر ۶ وجه بیرونی مکعب‌مستطیل و روی هر کدام از مربع‌های کوچک عدد ۲ نوشته شده است. این مکعب‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم. در چند مکعب از ۹۶ مکعب کوچک مجموع اعداد روی وجوه بزرگ‌تر از ۲ و کم‌تر از ۶ است؟**

۱) ۱۶
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۲۸

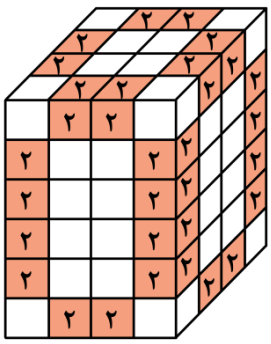


پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۹۰ ـ ۱۰۰۴)

بررسی سریع:

تعداد مکعب‌هایی را می‌خواهیم که مجموع اعداد روی وجه‌های آن‌ها از بین ۲یا ۴ یا ۶، ۴ باشد. این مکعب‌ها مکعب‌هایی هستند که فقط دو وجه رو به بیرون دارند که تعدادشان برابر است با:

$۸\times۲+۴\times۴=۳۲$



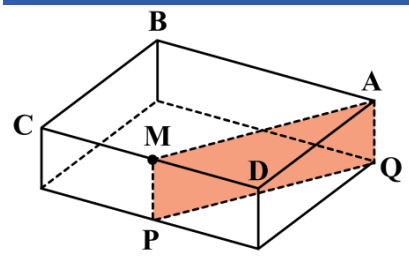
مجموع اعداد روی مکعب‌های کوچک یا ۲ است یا ۴ یا ۶. چون تعداد مکعب‌هایی را می‌خواهیم که مجموع اعداد روی آن‌ها بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۶ است، تنها مکعب‌هایی قابل قبول هستند که مجموع اعداد روی آن‌ها ۴ است و این مکعب‌ها مطابق شکل در قسمت میانی هر وجه واقع شده‌اند و حال مکعب ۱۲ یال دارد که روی ۴ یال بالا و ۴ یال پایین هر کدام ۲ تا از این مکعب‌ها و روی ۴ یال عمودی هر کدام ۴ تا از این مکعب‌ها قرار دارد، پس تعداد کل آن‌ها برابر است با:

$۸\times۲+۴\times۴=۳۲$

۳- **مکعب‌مستطیلی به ابعاد ۲، ۴ و ۶ را با صفحه‌ای که از کوچک‌ترین یال آن می‌گذرد طوری برش زده‌ایم که حجم مکعب‌مستطیل به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است. کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل از برش کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) $۴\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

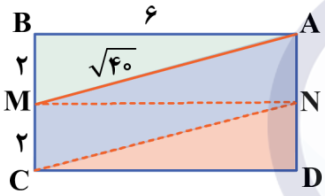
پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۹۲ ـ ۱۰۰۴)



کوچک‌ترین یال مکعب، یال به طول ۲ است، دو حجم به وجود آمده پس از برش، دو منشور با قاعده‌های متفاوت، اما با ارتفاع یکسان هستند، پس اگر حجم یکی سه برابر دیگری است، یعنی مساحت قاعده‌اش نیز سه برابر مساحت قاعدهٔ دیگری است، یعنی در مستطیل ABCD باید AM را به گونه‌ای از رأس A رسم کنیم که مساحت مستطیل ABCD را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کند که برای این کار دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول

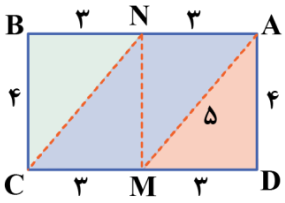
نقطهٔ M وسط ضلع BC باشد:



$$S_{AMPQ} = AQ \times AM = ۲ \times \sqrt{۴۰} = ۴\sqrt{۱۰}$$

حالت دوم

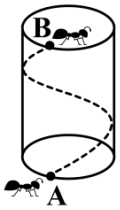
نقطهٔ M وسط ضلع CD باشد:



$$S_{AMPQ} = AQ \times AM = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

بنابراین کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل برابر ۱۰ است.

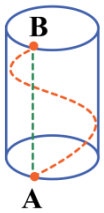
۴- استوانهٔ شکل مقابل را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از نقطهٔ A شروع به حرکت کند و پس از یک دور کامل دور استوانه، به نقطهٔ B دقیقاً در بالای نقطهٔ A برسد، اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه به ترتیب ۶ و ۵π باشند، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این مورچه چقدر است؟

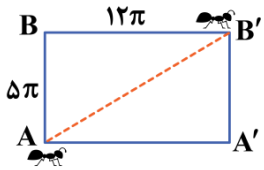


۱) ۱۲π
۲) ۱۳π
۳) ۵π
۴) ۶۰π

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

سطح جانبی استوانه را از روی پاره‌خط AB برش می‌زنیم و باز می‌کنیم.





مطابق شکل کوتاه‌ترین فاصلهٔ موردنظر قطر مستطیل $ABB'A'$ است که عرض آن همان ۵π یعنی ارتفاع استوانه و طول آن محیط قاعدهٔ استوانه است که برابر است با:

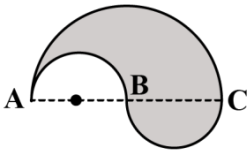
$$BB' = ۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi$$

حال باید اندازهٔ قطر AB' را پیدا کنیم که طبق فیثاغورس برابر است با:

$$AB' = \sqrt{(۵\pi)^۲ + (۱۲\pi)^۲} = ۱۳\pi$$

توجه کنید که نقاط A' و B' قبل از برش دقیقاً بر روی نقاط A و B قرار دارند!

۵- شکل مقابل، متشکل از ۳ نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ است. حجم حاصل از دوران این شکل هندسی حول محور AC کدام است؟

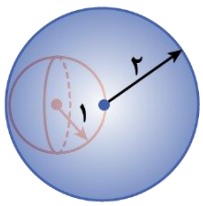


۱) $\frac{۲۸\pi}{۹}$
۲) $\frac{۸\pi}{۳}$
۳) $\frac{۳۲\pi}{۹}$
۴) $\frac{۲۸\pi}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۹۵ ـ ۱۰۰۴)

بررسی سریع:

$$v = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲^۳ - \frac{۴}{۳}\pi \times ۱^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۸-۱) = \frac{۲۸\pi}{۳}$$



حجم حاصل از دوران سطح داده شده یک کره به شعاع ۲ خواهد بود که کره‌ای به شعاع ۱ از درون آن برداشته شده است:

$$v = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲^۳ - \frac{۴}{۳}\pi \times ۱^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۸-۱) = \frac{۲۸\pi}{۳}$$

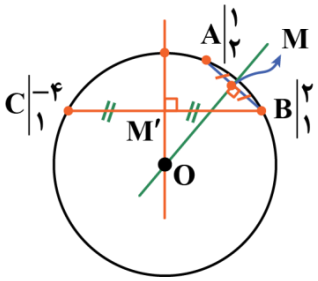
۱- اگر $A(۱,۲)$ ، $B(۲,۱)$ و $C(-۴,۱)$ مختصات رئوس مثلث $\hat{ABC}$ باشند، شعاع دایرهٔ محیطی آن چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

روش اول

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



چون پیدا کردن معادلهٔ عمودمنصف وتر AB و عمودمنصف وتر BC راحت‌تر است، ابتدا عمودمنصف‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{AB}=\frac{۲-۱}{۱-۲}=-۱ \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف AB}}=۱$$

$$\text{مختصات نقطهٔ وسط AB} \Rightarrow M\left|\begin{matrix}\frac{۱+۲}{۲}\\ \frac{۲+۱}{۲}\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow \text{معادلهٔ عمودمنصف AB} \Rightarrow y=x$$

معادلهٔ خط عمود بر آن به‌صورت $x=\alpha$ است. $m_{BC}=۰ \Rightarrow$

$$\text{مختصات نقطهٔ وسط BC} \Rightarrow M'\left|\begin{matrix}\frac{-۴+۲}{۲}\\ \frac{۱+۱}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow M'\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱\end{matrix}\right. \Rightarrow \text{معادلهٔ عمودمنصف BC} \Rightarrow x=-۱$$

برخورد دو عمودمنصف، نقطهٔ مرکز دایره را می‌دهد:

$$\begin{cases}x=-۱\\ y=x\end{cases} \Rightarrow y=x=-۱ \Rightarrow O(-۱,-۱)$$

بنابراین شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (-۱-۲)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

روش دوم

مساحت مثلث را طبق درسنامه، از دترمینان ماتریس محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$S_{\triangle ABC} = \left|\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{۱}{۲}\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}}_{-۶}\right| = ۳$$

از طرفی طول اضلاع مثلث برابر است با:

$$AB = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$AC = \sqrt{(۱-(-۴))^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۲۶}$$

$$BC = |۲-(-۴)| = ۶$$

از طرفی در مثلثی که طول اضلاع آن a، b و c و مساحت آن S باشد، شعاع دایرهٔ محیطی از رابطهٔ $R = \frac{abc}{۴S}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$R = \frac{abc}{۴S} = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲۶} \times ۶}{۴ \times ۳} = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \times \sqrt{۱۳} \times ۶}{۱۲} = \sqrt{۱۳}$$

راهنمای زرنگ بازی! (شعاع دایرهٔ محیطی مثلث)

در مثلث $\triangle ABC$ با طول اضلاع a، b و c و مساحت S، برای پیدا کردن شعاع دایرهٔ محیطی مثلث از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$R = \frac{abc}{۴S}$$

قِلقِشو یاد بگیر! (محاسبهٔ مساحت مثلث)

اگر نقاط $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} x_C \\ y_C \end{vmatrix}$ مختصات ۳ رأس مثلث $\triangle ABC$ باشند، مساحت مثلث $\triangle ABC$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABC} = \left|\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}\right|$$

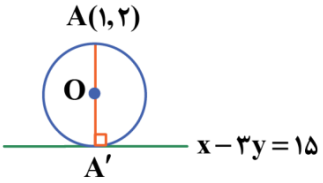
(قدرمطلق ← دترمینان)

۲- کوچک‌ترین دایره‌ای که از نقطهٔ $A(1,2)$ گذشته و بر خط $x-3y=15$ مماس باشد، از کدام نقطهٔ زیر عبور می‌کند؟

۱) $(5,0)$ ۲) $(0,5)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(1,-1)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

مطابق شکل فرضی زیر، کوچک‌ترین دایره، دایره‌ای است که قطر آن AA' باشد (A' نقطهٔ تماس دایره با خط $x-3y=15$، A همان نقطهٔ داده شده و AA' قطر دایره است)، بنابراین:



فاصلهٔ A تا خط داده شده، همان قطر دایره است.

$$AA'=\frac{|1-3(2)-15|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=\frac{20\sqrt{10}}{10}=2\sqrt{10}\Rightarrow R=\sqrt{10}$$

حال معادلهٔ AA' را می‌نویسیم:

$$m_{x-3y=15}=\frac{1}{3}\Rightarrow m_{AA'}=-3\Rightarrow y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-2=-3(x-1)\Rightarrow y=-3x+5$$

برخورد خط AA' با خط $x-3y=15$ مختصات نقطهٔ A' را می‌دهد.

$$\begin{cases}x-3y=15\\y=-3x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3y=15\\3y+9x=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-4\end{cases}\Rightarrow A'(3,-4)$$

نقطهٔ O (مرکز دایره) وسط A و A' می‌باشد، بنابراین:

$$O=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_O=\frac{1+3}{2}=2\\y_O=\frac{2-4}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow\text{مرکز دایره: }O(2,-1)$$

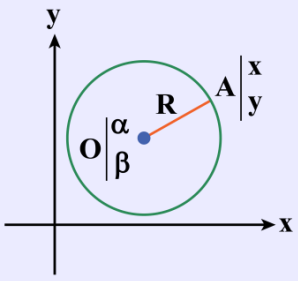
بنابراین معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-x_O)^2+(y-y_O)^2=R^2\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{10}^2$$

از بین گزینه‌ها، فقط مختصات نقطهٔ $(5,0)$ در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

دایره

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی به نام مرکز دایره برابر مقدار ثابتی به نام شعاع دایره می‌باشد. دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهند.



نوشتن معادلهٔ دایره با داشتن مرکز

اگر مرکز دایره $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ و شعاع دایره R باشد، معادلهٔ دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = R$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$ معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ و شعاع R $\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$

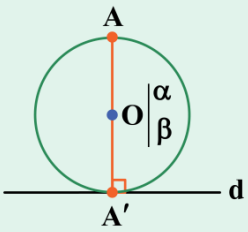
یه نمونهٔ باحال ببین!

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O\begin{vmatrix}-1\\ 2\end{vmatrix}$ و شعاع ۳ را بنویسید.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2+(y-2)^2 = 3^2}_{\text{معادلهٔ استاندارد}} \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2+2x-4y-4 = 0}_{\text{معادلهٔ گسترده}}$$

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ A

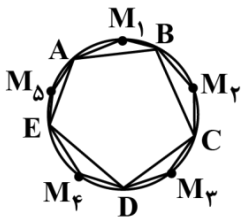
اگر نقطهٔ A خارج خط d باشد، برای نوشتن معادلهٔ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و مماس بر خط d، کافی است نقطهٔ تماس خط و دایره را A' بنامیم و AA' قطری از این دایره باشد.



شیب خط d را قرینه و معکوس کرده تا شیب خط گذرنده از A و A' به‌دست آید، سپس معادلهٔ خط گذرنده از قطر AA' را نوشته و برخورد خط گذرنده از AA' و d نقطهٔ A' را می‌دهد. از طرفی O وسط A و A' است.

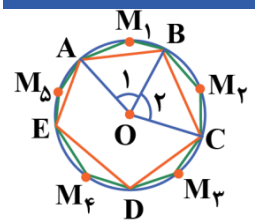
مثال

۳- در شکل زیر، تمام نقاط در شکل، روی محیط دایره واقع هستند. مجموع زوایای $\hat{M}_1$ تا $\hat{M}_5$ $\left(\sum_{i=1}^{5} M_i\right)$ کدام است؟



۱) ۵۴۰°
۲) ۶۳۰°
۳) ۷۲۰°
۴) ۹۰۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۱۰۱)



$$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AM_1B}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{AM_1B}}{2} = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{AM_1B}}{2}$$

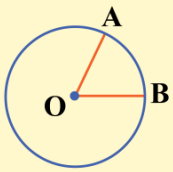
$$\Rightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - \frac{\hat{O}_1}{2}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد: $\hat{M}_i = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{O}_i}{۲}$

بنابراین: $\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ + \hat{M}_۵ = ۵ \times ۱۸۰^\circ - (\frac{\overbrace{\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ + \hat{O}_۵}^{۳۶۰^\circ}}{۲}) = ۹۰۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۷۲۰^\circ$

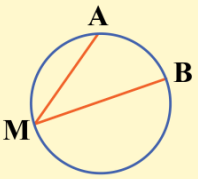
معرفی زوایا در دایره

زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره بوده و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.



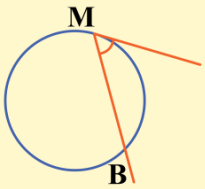
$$\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$$

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره بوده و اضلاع آن وترهای دایره هستند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.



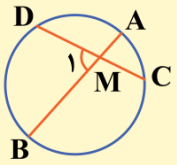
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره بوده و یکی از اضلاع آن بر دایره مماس و ضلع دیگر آن وتر دایره باشد را زاویهٔ ظلی می‌گوییم. اندازهٔ زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان مقابل به آن است.



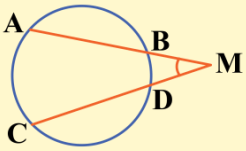
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{MB}}{۲}$$

زاویهٔ حاصل از برخورد دو وتر داخل دایره:



$$\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

زاویهٔ حاصل از برخورد امتداد دو وتر خارج دایره:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

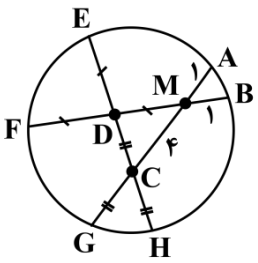
۴- در دایرهٔ مقابل، اگر $MA=MB=۱$، $MC=۴$، $DF=DM=DE$ و $CD=CG=CH$ باشد، آن‌گاه $DC-DE$ چقدر است؟

۱) -۱

۲) صفر

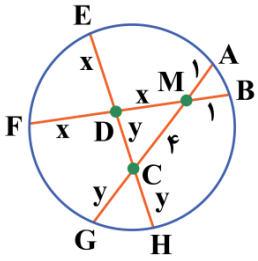
۳) ۱

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$



پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۱۰۱)

به کمک روابط طولی در دایره داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} DE\times DH=DF\times DB \Rightarrow x\times ۲y=x\times(x+۱) \xrightarrow[x\neq ۰]{\div x} ۲y=x+۱ \\ MA\times MG=MB\times MF \Rightarrow ۱\times(y+۴)=۱\times ۲x \Rightarrow y+۴=۲x \end{cases} \Rightarrow x=۳, y=۲$$

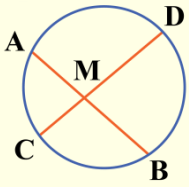
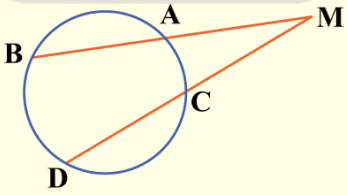
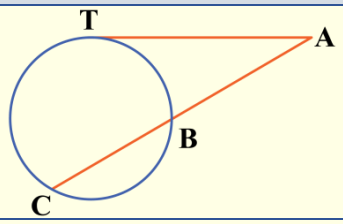
مقادیر x و y در رابطهٔ $CG\times CA=CH\times CE$ صدق می‌کنند:

$$CG\times CA=CH\times CE \Rightarrow ۲\times ۵=۲\times(۲+۳) \Rightarrow \checkmark$$

بنابراین مقادیر به‌دست آمده، قابل قبول هستند و داریم:

$$DC-DE=y-x=۲-۳=-۱$$

روابط طولی در دایره

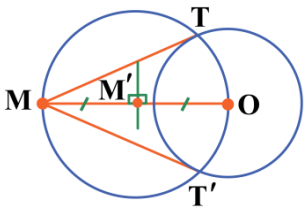
وترهای AB و CD داخل دایره یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند.	امتداد وترهای AB و CD خارج دایره در نقطهٔ M همدیگر را قطع می‌کنند.	اگر AT در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد.
		
$MA\times MB=MC\times MD$	$MA\times MB=MC\times MD$	$AT^{۲}=AB\times AC$

۵- نقطهٔ M خارج دایرهٔ C است. برای رسم دو مماس از نقطهٔ M بر دایره، از خطکش و پرگار استفاده می‌کنیم. برای این منظور، چند بار باید از پرگار استفاده کنیم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا عمودمنصف MO را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط MO را در نقطه‌ای مانند M' قطع کند. (برای این منظور دو بار از پرگار استفاده می‌کنیم.) سپس دایره‌ای به مرکز M' و شعاع $M'M$ رسم می‌کنیم (یک بار دیگر از پرگار استفاده می‌کنیم.) سپس از نقاط تلاقی دو دایره یعنی T و T' به M وصل می‌کنیم تا خطوط مماس از M بر دایره رسم شوند، پس در مجموع ۳ بار از پرگار استفاده می‌کنیم.

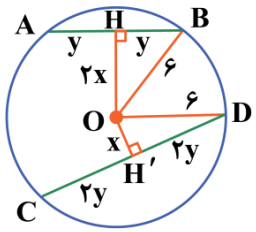


۶- در دایرهٔ C(O,۶)، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، ۲ برابر فاصلهٔ آن از وتر CD است. اگر CD=۲AB باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب طول دو وتر چقدر است؟

۱) ۵۷/۲ ۲) ۵۷/۳ ۳) ۵۷/۴ ۴) ۵۷/۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. اطلاعات مسئله را روی شکل پیاده می‌کنیم، با به کارگیری قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{OHB}$ و $\overset{\triangle}{OH'D}$ داریم:



$$\begin{cases}(۲x)^۲+y^۲=۶^۲\\ x^۲+(۲y)^۲=۶^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴x^۲+y^۲=۳۶\\ x^۲+۴y^۲=۳۶\end{cases}\Rightarrow ۴x^۲+y^۲=x^۲+۴y^۲\Rightarrow ۳x^۲=۳y^۲\Rightarrow x=y$$

بنابراین:

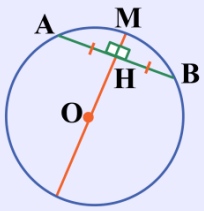
$$۴x^۲+y^۲=۳۶\Rightarrow ۵x^۲=۳۶\Rightarrow x^۲=\frac{۳۶}{۵}\Rightarrow x=y=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب وترهای AB و CD برابر است با:

$$AB\times CD=۲y\times ۴y=۸y^۲=۸\times\frac{۳۶}{۵}=\frac{۲۸۸}{۵}=۵۷/۶$$

عمود بر وتر

مطابق شکل، خطی که از مرکز دایره گذشته و بر وتر AB عمود است، وتر AB و کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نصف می‌کند و برعکس.



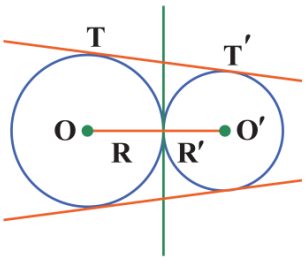
$$OH\perp AB\Leftrightarrow\begin{cases}AH=HB\\ \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}\end{cases}$$

۱- دو دایرهٔ C_1 و C_2 دقیقاً ۳ مماس مشترک دارند که اندازهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۱۰۱)

دو دایره مماس خارج‌اند زیرا دقیقاً ۳ مماس مشترک دارند، بنابراین:



$$d = R + R' = \frac{۱۷}{۲} \quad (۱)$$

و با توجه به شکل، طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر با ۴ است:

$$TT' = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = ۲\sqrt{RR'} = ۴ \Rightarrow \sqrt{RR'} = ۲ \Rightarrow RR' = ۴ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow R + \frac{۴}{R} = \frac{۱۷}{۲} \xrightarrow{\times R} R^۲ - \frac{۱۷}{۲}R + ۴ = ۰$$

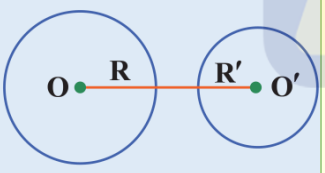
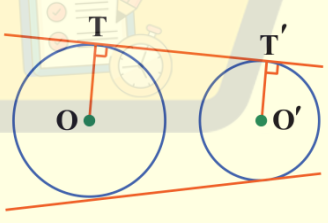
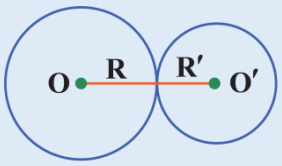
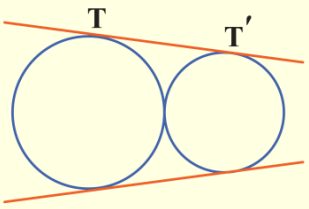
در نتیجه R و R' جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم هستند:

$$x^۲ - \frac{۱۷}{۲}x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۱۷x + ۸ = ۰$$

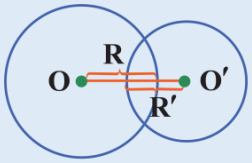
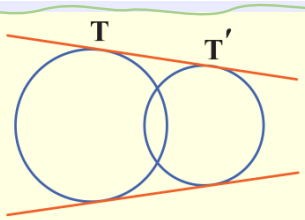
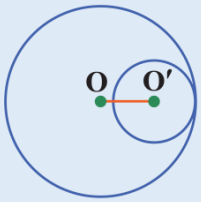
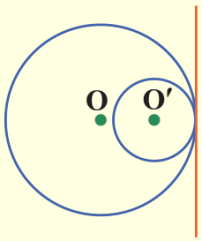
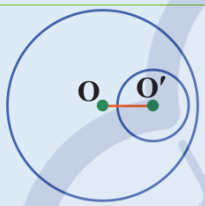
$$\Rightarrow \Delta = (-۱۷)^۲ - ۴ \times ۲ \times ۸ = ۲۸۹ - ۶۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۷ \pm ۱۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} R = ۸ \\ R' = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{R'} = ۱۶$$

وضعیت نسبی دو دایره

وضعیت دو دایره	تعداد مماس‌ها	
	۲ مماس مشترک خارجی	۲ مماس مشترک داخلی
متخارج	 $OO' > R + R'$	 $TT' = \sqrt{(OO')^۲ - (R-R')^۲}$
مماس خارج	 $OO' = R + R'$	 ۱ مماس مشترک داخلی
	۲ مماس مشترک خارجی	

$$TT' = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = ۲\sqrt{RR'}$$

متقاطع	 $\lvert R-R'\rvert < OO' < R+R'$	 ۲ مماس مشترک خارجی دارد، اما مماس مشترک داخلی ندارد. $TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R-R')^2}$
مماس داخل	 $OO' = \lvert R-R'\rvert$	 ۱ مماس مشترک خارجی دارد و مماس مشترک داخلی ندارد.
متداخل	 $OO' < \lvert R-R'\rvert$	نه مماس مشترک داخلی دارد نه مماس مشترک خارجی.

مثال

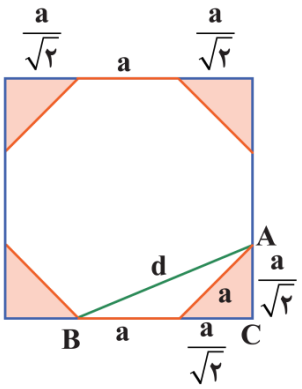
۲- در یک ۸ ضلعی منتظم، اندازهٔ کوچک‌ترین قطر برابر با $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ است. مساحت ۸ ضلعی چقدر است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$ ۳) $۴-\sqrt{۲}$ ۴) $۶-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۱۰۱)

روش اول

هشت‌ضلعی منتظم را در یک مربع محاط می‌کنیم.



اولاً در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین طول اضلاع قائمه $\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است، پس اگر ضلع ۸ ضلعی منتظم را a و اندازهٔ کوچک‌ترین قطر را d در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: d^2 = (\frac{a}{\sqrt{۲}})^2 + (a+\frac{a}{\sqrt{۲}})^2 = a^2((\frac{۱}{\sqrt{۲}})^2 + (۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}})^2)$$

$$\Rightarrow d^2 = a^2(\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}) \Rightarrow d^2 = a^2(۲+\sqrt{۲})$$

$$\xrightarrow{d=\sqrt{۱+\sqrt{۲}}} ۱+\sqrt{۲} = a^2 \times \sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}) \Rightarrow \sqrt{۲}a^2 = ۱ \Rightarrow a^2 = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad (*)$$

از طرفی:

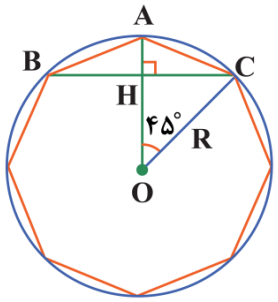
$$S_{\text{۸ ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - ۴S_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}}$$

$$S_{\text{۸ ضلعی}} = a^2(۱+\sqrt{۲})^2 - ۴ \times \frac{۱}{۲} \times (\frac{a}{\sqrt{۲}})^2$$

$$\Rightarrow S = a^2(1+2+2\sqrt{2}) - a^2 \Rightarrow S = 2a^2(1+\sqrt{2}) \overset{(*)}{=} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}$$

روش دوم

۸ ضلعی منتظم را در یک دایره محاط می‌کنیم:



$$A\hat{O}C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow S = 8 \times S_{\overset{\triangle}{OAC}} = 8 \times \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow S = 4 \times R^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}R^2 \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{OHC}: \sin 45^\circ = \frac{CH}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{R} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow R^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S = 2\sqrt{2} \times \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}$$

قِلقِشو یاد بگیر!

اصولاً برای حل سوالات مربوط به هشت‌ضلعی منتظم، بهتر است آن را در یک مربع، یا یک دایره محاط کنیم.

ماز

۳- مساحت یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی برابر با ۴ و مجموع ارتفاع وارد بر قاعده و یک ساق آن برابر با $3\sqrt{2}$ است. در این ذوزنقه قاعدهٔ بزرگ چقدر از قاعدهٔ کوچک بزرگ‌تر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) ۳ ۴) ۴

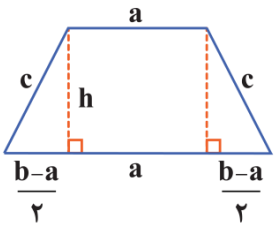
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۱۰۱)

روش اول

اگر طول قاعدهٔ بزرگ را b، قاعدهٔ کوچک را a و دو ساق را c فرض کنیم،چون ذوزنقه محیطی است، داریم:

$$a+b = 2c \Rightarrow c = \frac{a+b}{2} \quad (*)$$

از طرفی بنابر فرض داریم:



$$\begin{cases} h + c = 3\sqrt{2} \\ S = \frac{a+b}{2} \times h = 4 \xrightarrow{(*)} ch = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(3\sqrt{2} - h) = 4 \Rightarrow h^2 - 3\sqrt{2}h + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 2} h = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{c > h} \begin{cases} c = 2\sqrt{2} \\ h = \sqrt{2} \end{cases}$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = c^2 - h^2 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow \left(\frac{b-a}{2}\right) = \sqrt{6} \Rightarrow b - a = 2\sqrt{6}$$

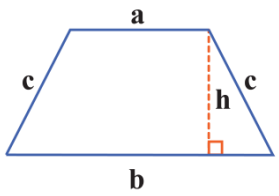
پس طول قاعدهٔ بزرگ‌تر $2\sqrt{6}$ واحد از قاعدهٔ کوچک‌تر بیشتر است.

روش دوم

همان‌طور که در کتاب درسی اثبات شده است، در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، ارتفاع وارد بر قاعده با واسطهٔ هندسی دو قاعده برابر است و ساق با واسطهٔ حسابی دو قاعده برابر است. (که البته به سادگی اثبات می‌شود.) یعنی:

$$c=\frac{a+b}{2} \quad , \quad h=\sqrt{ab}$$

بنابراین:



$$S=\frac{1}{2}h(a+b)=h(\frac{a+b}{2})=hc$$

بنابراین:

$$\begin{cases} hc=4 \\ h+c=3\sqrt{2} \end{cases}$$

در نتیجه h و c جواب‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$x^2-3\sqrt{2}x+4=0 \Rightarrow \Delta=(3\sqrt{2})^2-4\times4=2 \Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} h=\sqrt{2} \\ c=2\sqrt{2} \end{cases}$$

توجه داشته باشید h ضلع قائمه و c وتر است، بنابراین $h<c$. به همین دلیل مقدار کوچک‌تر را h گرفتیم.

حال:

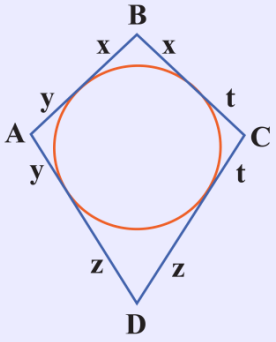
$$\begin{cases} h=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{2} \Rightarrow ab=2 \\ c=2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2}=2\sqrt{2} \Rightarrow a+b=4\sqrt{2} \end{cases}$$

پس a و b نیز ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$x^2-4\sqrt{2}x+2=0 \Rightarrow \text{تفاضل ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{32-8}}{1}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

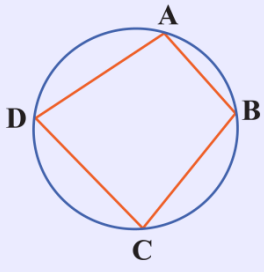
چهارضلعی‌های محیطی و محاطی

اگر ABCD یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است و برعکس.



$$AB+CD=AD+BC=(x+y+z+t)$$

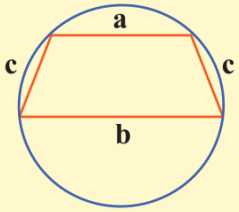
اگر ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد، زوایای روبه‌رو مکمل همدیگر می‌باشند و برعکس.



$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$

ذوزنقهٔ محاطی و محیطی

۱) هر ذوزنقهٔ محاطی حتماً متساوی‌الساقین است و برعکس اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، حتماً محاطی است. (زیرا وترهای بین دو خط موازی در دایره با هم برابرند.)



۲) در ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین که محیطی هم باشند، داریم:

$$a+b=c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{۲}$$

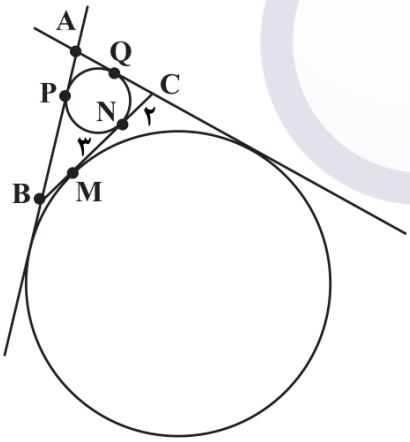
یعنی طول ساق واسطهٔ حسابی قاعده‌ها است.

همچنین طول ارتفاع ذوزنقه واسطه هندسی قاعده‌ها است، یعنی:

$$h=\sqrt{ab}$$

مثال

۴- **در مثلث زیر دایرهٔ محاطی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC رسم شده است. اگر $CN=۲$ و $MN=۳$، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط BM کدام است؟**



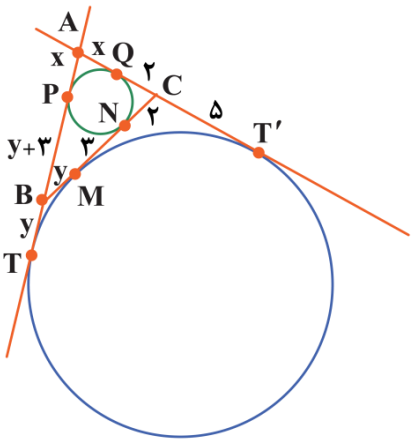
۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) ۲

۳) ۳

۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۱۰۱)



می‌دانیم از یک نقطه خارج دایره مماس‌هایی هم‌اندازه بر دایره رسم می‌شود، در نتیجه:

$$CQ=۲$$

از طرفی، اگر $AQ=x$ و $BM=y$، آن‌گاه داریم:

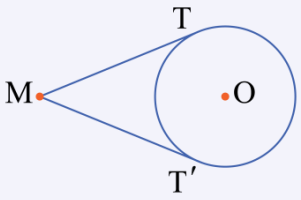
$$\begin{cases} AP=AQ=x \\ BT=BM=y \\ BP=BN=y+۳ \\ CT'=CM=۵ \end{cases}$$

حال با توجه به این‌که $AT = AT'$ خواهیم داشت:

$$x + y + ۳ + y = x + ۷ \Rightarrow ۲y = ۴ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow BM = ۲$$

یادآوری!

اگر از یک نقطه خارج دایره مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، طول آن‌ها با هم برابر است.



$$MT = MT'$$

تاز

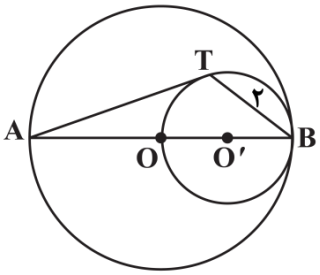
۵- دو دایرهٔ زیر با مرکزهای O و O' در نقطهٔ B بر یکدیگر مماس‌اند. اگر AT بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد و $BT = ۲$، آن‌گاه AT چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

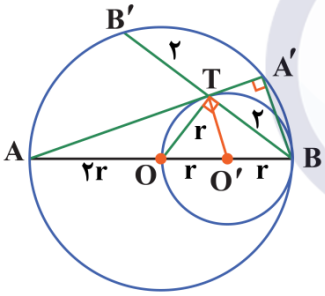
۴) $۳\sqrt{۲}$



پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۱۰۱)

اگر شعاع دایرهٔ کوچک را r بگیریم، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $۲r$ است.

زاویهٔ $O\hat{T}B$ قائمه است، زیرا زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر OB برابر با ۹۰° است.



بنابراین در دایرهٔ بزرگ‌تر OT بر وتر BB' عمود است پس آن را نصف می‌کند، پس:

$$B'T = BT = ۲$$

از طرفی، $A\hat{A}'B = ۹۰^\circ$، زیرا این زاویه، زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر AB است.

از طرفی $O'T$ بر AA' عمود است، زیرا شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، در نتیجه $BA' \parallel O'T$. در نتیجه با توجه به قضیهٔ تالس در $\overset{\triangle}{AA'B}$ داریم:

$$\frac{AT}{TA'} = \frac{AO'}{O'B} = \frac{۲r + r}{r} = ۳ \Rightarrow AT = ۳A'T \quad (*)$$

حال در دایرهٔ بزرگ‌تر، روابط طولی مربوط به نقطهٔ T را می‌نویسیم:

$$AT \times A'T = B'T \times BT \xrightarrow{(*)} ۳A'T \times A'T = ۲ \times ۲ \Rightarrow (A'T)^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow A'T = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow AT = ۳A'T = ۲\sqrt{۳}$$

۱- چه تعداد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

الف) هر تبدیل طولپا، جهت شکل را حفظ می‌کند.

ب) هر تبدیل طولپا، بی‌نهایت نقطهٔ ثابت دارد.

ج) هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

د) هر تبدیل طولپا، شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

هر تبدیل طولپا (ایزومتری) علاوه بر حفظ طول پاره‌خط دارای دو ویژگی مهم دیگر نیز هست:

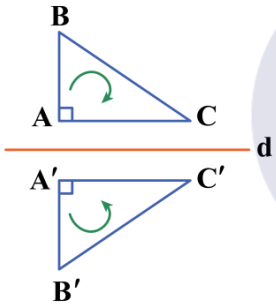
۱) در تبدیل ایزومتری (طولپا) اندازهٔ هر زاویه ثابت می‌ماند.

۲) در هر تبدیل ایزومتری (طولپا) شکل و تصویرش همنهشت هستند.

با توجه به توضیحات فوق به بررسی عبارات می‌پردازیم:

بررسی موارد:

الف)



نادرست است، زیرا تبدیل‌های طولپا ممکن است جهت شکل‌ها را تغییر دهند، مثلاً بازتاب نسبت به یک خط جهت شکل را تغییر می‌دهد.

ب)

نادرست است، زیرا تبدیل طولپا ممکن است حتی هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد، مثلاً در انتقال توسط بردار غیر صفر $\vec{v}$ هیچ نقطه‌ای ثابت نمی‌ماند.

ج)

طبق توضیحات اولیه این مورد درست است. ✓

د)

نادرست است، زیرا تبدیل‌های طولپا مانند انتقال یا دوران با زاویهٔ $k\pi$ شیب خطوط را حفظ می‌کنند، اما همهٔ تبدیل‌های طولپا این‌گونه نیستند، مثلاً در بازتاب شیب خطوط تغییر می‌کند مگر آن‌که آن خطوط موازی یا عمود بر محور بازتاب باشند.

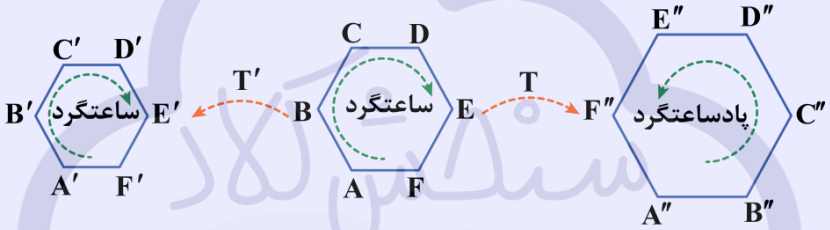
طولپایی

تبدیلی که طول پاره‌خط‌های صفحه را حفظ می‌کند (تغییر نمی‌دهد) **ایزومتری** یا **طولپا** نامیده می‌شود، به عبارت دیگر، اگر یک تبدیل ایزومتری روی پاره‌خط AB اثر کند، طول پاره‌خط قبل از تبدیل، با طول این پاره‌خط پس از تبدیل برابر است.

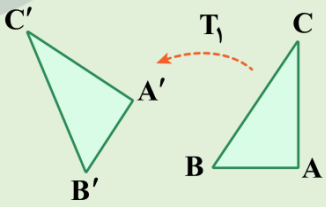
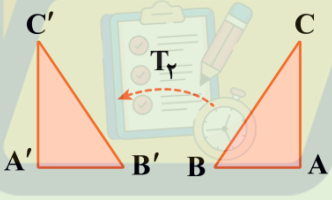
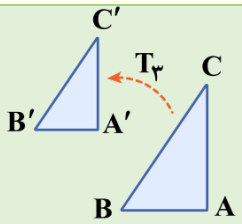
تبدیل ایزومتری اندازه و ابعاد شکل را تغییر نمی‌دهد، به عبارت دیگر در تبدیل ایزومتری شکل و تصویرش همنهشت هستند.

اگر تبدیل T جهت اشکال هندسی را ثابت نگه دارد، تبدیل T را یک تبدیل جهت‌پا می‌نامند. (منظور از جهت یک شکل یا یک چندضلعی ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن پیمایش رأس‌های متوالی آن است.)

در شکل‌های زیر تبدیل T جهت شکل را عوض کرده است اما تبدیل T' جهت شکل را عوض نکرده است.



اگر در تبدیل T شیب همهٔ خط‌ها در اثر تبدیل ثابت بماند، تبدیل T را شیب‌پا می‌نامیم، بنابراین در تبدیل شیب‌پا، هر پاره‌خط باید با تصویرش موازی باشد.

T_1 شیب‌پا نیست	T_2 شیب‌پا نیست	T_3 شیب‌پا است
		
در تبدیل T_1 هیچ‌کدام از پاره‌خط‌ها با تصویرشان موازی نیستند.	در تبدیل T_2 شیب بعضی از خط‌ها ثابت مانده و شیب بعضی از خط‌ها مانند BC عوض شده.	در تبدیل T_3 شیب تمام خط‌ها ثابت مانده.

یه نمونهٔ باحال ببین!

مربع ABCD با مساحت ۱۲ را به کمک یک تبدیل ایزومتری تصویر کرده‌ایم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۹

پاسخ تشریحی:

تصویر مربع به مساحت ۱۲، تحت یک تبدیل ایزومتری مربعی به مساحت ۱۲ خواهد بود، بنابراین اگر ضلع مربع تصویر را a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \text{محیط مربع} = ۴a = ۴(۲\sqrt{۳}) = ۸\sqrt{۳}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نقطهٔ ثابت تبدیل

اگر نقطه‌ای تحت اثر یک تبدیل، روی خودش تصویر شود آن نقطه را **نقطهٔ ثابت تبدیل** می‌نامند، یعنی اگر $T(A)=A$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ A، نقطهٔ ثابت تبدیل T است.

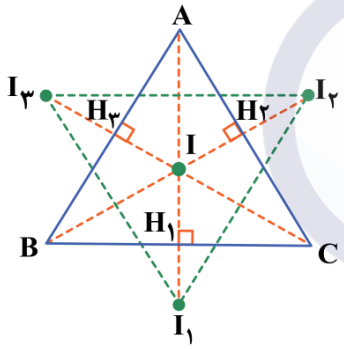
نقطهٔ ثابت تبدیل‌های مشهور
۱) در دوران، مرکز دوران نقطهٔ ثابت محسوب می‌شود.
۲) در تجانس، مرکز تجانس نقطهٔ ثابت محسوب می‌شود. (در آزمون بعدی به تجانس می‌رسیم. 😉)
۳) انتقال در حالت کلی نقطهٔ ثابت تبدیل ندارد.
۴) در بازتاب، تمام نقاط واقع بر محور بازتاب، نقطهٔ ثابت هستند، پس بازتاب می‌تواند دارای بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل باشد.
۵) در تبدیل همانی، تمام نقاط صفحه، نقطهٔ ثابت تبدیل هستند.

۲- نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است و بازتاب‌های I نسبت به اضلاع مثلث I_1، I_2 و I_3 هستند، نقطهٔ I برای مثلث $I_1I_2I_3$ چه نقطه‌ای است؟

۱) مرکز دایرهٔ محاطی ۲) مرکز دایرهٔ محیطی ۳) مرکز ثقل ۴) محل تلاقی ارتفاعات

پاسخ: گزینهٔ ۲ **(متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸ ـ ۱۱۰۲)**

می‌دانیم که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی مثلث است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



$IH_1=IH_2=IH_3$ (شعاع دایرهٔ محاطی)

و چون I_1، I_2 و I_3 بازتاب‌های I هستند، بنابراین: $II_1=II_2=II_3=2r$

پس I از I_1، I_2 و I_3 به یک فاصله است و لذا محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $I_1I_2I_3$ و یا مرکز دایرهٔ محیطی آن است.

یادآوری!

۱) مرکز دایرهٔ محاطی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و محل برخورد نیمسازهای داخلی است.

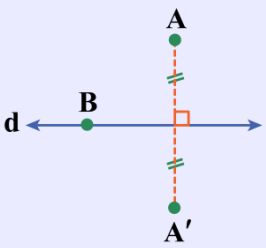
۲) مرکز دایرهٔ محیطی از سه رأس مثلث به یک فاصله است و محل برخورد عمودمنصف‌هاست.

بازتاب

تبدیل T را بازتاب نسبت به خط d می‌نامند، اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

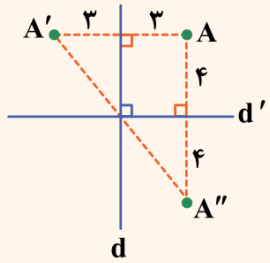
۱) تصویر هر نقطهٔ دلخواه مانند A غیرواقع بر خط d نقطه‌ای مانند A' است به‌طوری‌که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

۲) تصویر هر نقطه مانند B واقع بر خط d، بر خود نقطهٔ B منطبق است.



یه نمونهٔ باحال ببین!

دو خط d' و d بر هم عمودند، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ واحد از خط d و به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d' قرار دارد، اگر بازتاب A نسبت به d را A' و بازتاب A نسبت به d' را A'' بنامیم، فاصلهٔ A' از A'' کدام است؟



$\Rightarrow A'A'' = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰$

ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط

۱) بازتاب نسبت به خط، **ایزومتری** است یعنی پاره‌خط و تبدیل‌یافته‌اش، هم‌اندازه‌اند.

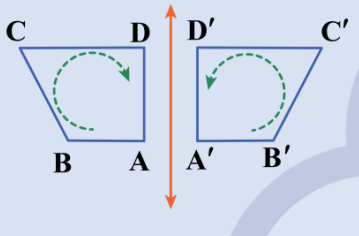
۲) بازتاب نسبت به خط، شیب‌پا نیست. یعنی **شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند**، بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.

۳) بازتاب نسبت به خط، جهت‌پا نیست. **یعنی جهت شکل را حفظ نمی‌کند.**

۴) در بازتاب نسبت به خط، اندازهٔ زاویه‌ها ثابت می‌ماند.

۵) در بازتاب نسبت به یک خط، شکل و تصویرش باهم همنهشت هستند.

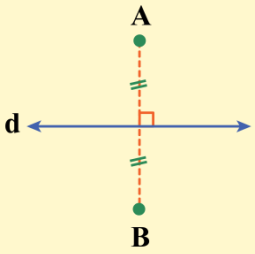
۶) اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d باشد، نقطهٔ A نیز تصویر نقطهٔ A' تحت بازتاب نسبت به خط d محسوب می‌شود، یعنی اگر S یک تبدیل بازتاب باشد و داشته باشیم $S(A) = A'$، آن‌گاه $S(A') = A$ خواهد بود.



$ABCD$ ساعتگرد و $A'B'C'D'$ پادساعتگرد است.

چه موقع دو نقطه بازتاب یک‌دیگرند؟

اگر دو نقطهٔ A و B را بدهند و بپرسند تحت بازتاب نسبت به کدام خط این دو نقطه تصویر یکدیگرند، کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را پیدا کنیم، بدیهی است که در این حالت دو نقطهٔ A و B در طرفین محور بازتاب واقع‌اند و از محور بازتاب هم فاصله‌اند.

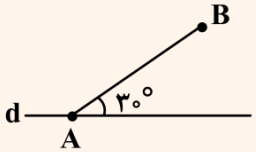


نقاط ثابت بازتاب

در بازتاب نسبت به خط، فقط نقاطی که روی محور بازتاب قرار داشته باشند، روی خودشان تصویر می‌شوند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

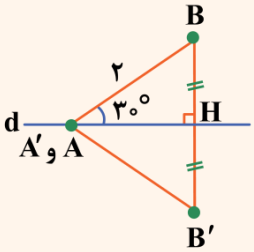
در شکل زیر، طول پاره‌خط AB برابر ۲ و زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۳۰° است. تبدیل T بازتاب نسبت به خط d است. اگر $T(B) = B'$ باشد، محیط مثلث ABB' کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم برای یافتن بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d باید از B به d عمود کنیم و به همان اندازه ادامه دهیم، پس با توجه به شکل مقابل و قائم‌الزاویه بودن مثلث ABH خواهیم داشت:



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BH = ۱ \Rightarrow BB' = ۲BH = ۲$$

از طرفی با توجه به این‌که بازتاب تبدیلی ایزومتری است، هر پاره‌خط با تبدیل یافته‌اش هم‌اندازه است، بنابراین $A'B' = AB = ۲$، درنتیجه محیط مثلث ABB' برابر است با:

$$AB + BB' + AB' = ۲ + ۲ + ۲ = ۶$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۳- شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a داریم. تبدیل هندسی بازتاب نسبت به یک قطر کوچک شش‌ضلعی با کدام تبدیل زیر هم‌ارز است؟

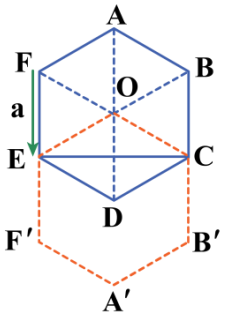
۱) دوران حول مرکز شش‌ضلعی

۲) بازتاب نسبت به یک محور دیگر

۳) انتقال با برداری به طول a

۴) انتقال با برداری به طول $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۱۰۲)



بازتاب شش‌ضلعی منتظم ABCDEF نسبت به قطر کوچک CE، شش‌ضلعی منتظم $A'B'COEF'$ است، اما این شش‌ضلعی را می‌توان انتقال‌یافتهٔ شش‌ضلعی اصلی تحت بردار $\overrightarrow{BC}$ (و یا $\overrightarrow{FE}$ یا $\overrightarrow{AO}$ و ...) دانست که با این انتقال A به O، B به C، C به D، D به B'، E به A' و F به F' تبدیل می‌شود.

پس تبدیل گفته شده معادل با انتقال با برداری به طول a است و سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

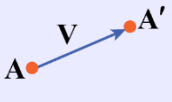
طریقهٔ یافتن بازتاب نسبت به یک خط

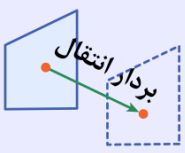
برای پیدا کردن تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d از نقطهٔ A عمودی به d رسم کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم. (درواقع d عمودمنصف AA' خواهد بود.)

انتقال

انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است، به‌طوری‌که:

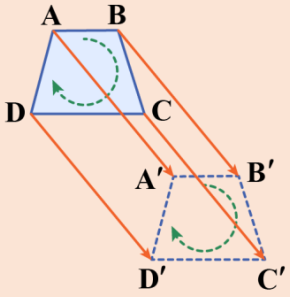
$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$$



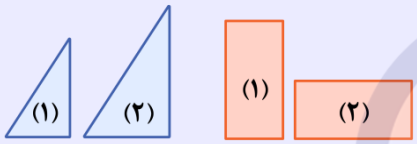


انتقال تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ جابه‌جا می‌کند.

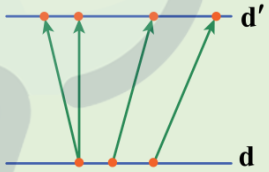
تبدیل انتقال براساس تعریف، دارای پنج ویژگی مهم به شرح زیر است:

ویژگی‌های انتقال	
	۱) انتقال، طولپا (ایزومتری) است. ۲) انتقال، شیب‌پا است. ۳) انتقال، جهت‌پا است. ۴) در انتقال، اندازهٔ زاویه ثابت می‌ماند. ۵) یک شکل و انتقال‌یافته‌اش همواره همنهشت هستند.

در شکل‌های مقابل، مستطیل (۱) نمی‌تواند با انتقال روی مستطیل (۲) تصویر شود، زیرا اضلاع نظیر در دو شکل موازی نیستند، همچنین مثلث (۱) نمی‌تواند با انتقال روی مثلث (۲) تصویر شود زیرا دو شکل هم‌نهشت نیستند.



تصویر خط d تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ خطی است مانند d' که با خط d موازی است. حال اگر دو خط d و d' داده‌شده باشند و بخواهیم بدانیم چند بردار وجود دارد که d را به خط d' منتقل کند، با دو حالت عمده مواجه می‌شویم:

دو خط موازی باشند	دو خط متقاطع باشند
بی‌شمار بردار انتقال وجود دارد که خط d را به خط d' تبدیل می‌کند. 	بردار انتقالی وجود ندارد که بتواند خط d را به خط d' تبدیل کند.
اگر خط d با بردار انتقال موازی باشد، در این صورت تصویر خط تحت بردار انتقال بر خودش منطبق است.	

یه نمونهٔ باحال ببین!

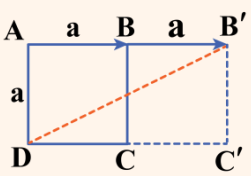
اگر مربع ABCD را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم، فاصلهٔ رأس D تا تبدیل‌یافتهٔ رأس B چند برابر ضلع مربع است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ تشریحی

انتقال یک تبدیل ایزومتری است، پس اگر اندازهٔ ضلع مربع ABCD برابر a باشد، تصویرش تحت انتقال نیز مربعی به ضلع a است و B روی نقطهٔ B' تصویر شده است، بنابراین:



$$DB' = \sqrt{AD^{۲} + AB'^{۲}} = \sqrt{a^{۲} + (۲a)^{۲}} = \sqrt{۵}a$$

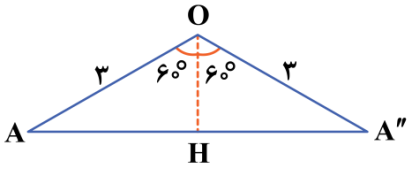
پاسخ: گزینهٔ ۳

۴- خطوط d_1 و d_2 در نقطهٔ O متقاطع‌اند و باهم زاویهٔ 60° می‌سازند، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از O و غیر واقع بر d_1 و d_2 مفروض است. اگر بازتاب A نسبت به d_1 نقطهٔ A' و بازتاب A' نسبت به d_2 نقطهٔ A'' باشد، طول AA'' چند سانتی‌متر است؟

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

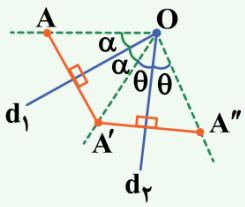
می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای متقاطع که باهم زاویهٔ α می‌سازند، دورانی است به مرکز O (محل برخورد دو محور) و زاویهٔ 2α، بنابراین مطابق شکل داریم:



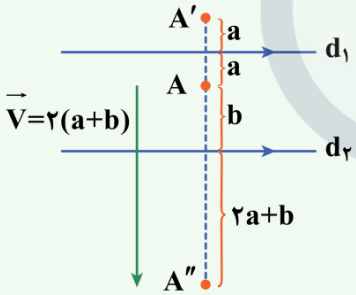
$$OA'' = OA = 3$$
$$A\hat{O}A'' = 120^\circ$$
$$\Rightarrow AH = HA'' = \sin 60^\circ \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA'' = 3\sqrt{3}$$

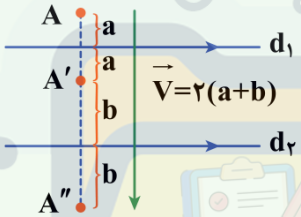
ترکیب تبدیل‌ها!

۱) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز آن محل برخورد دو خط و زاویهٔ آن دو برابر زاویهٔ بین دو خط است.

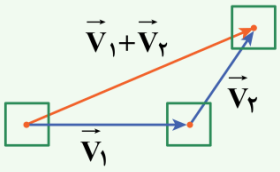


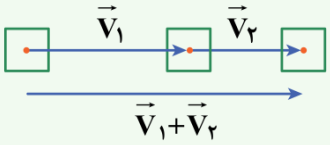
۲) ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است با برداری عمود بر راستای دو خط که طول این بردار دو برابر فاصلهٔ بین دو محور بازتاب است.



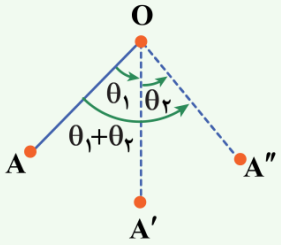


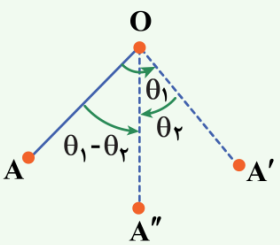
۳) ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ یک انتقال با بردار $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ است.





۴) ترکیب دو دوران با زاویه‌های θ و θ' یک دوران با زاویهٔ $\theta + \theta'$ یا $\theta - \theta'$ است که جمع شدن یا کم شدن زاویه‌ها بستگی به هم‌جهت یا غیرهم‌جهت بودن دو دوران اولیه دارد.



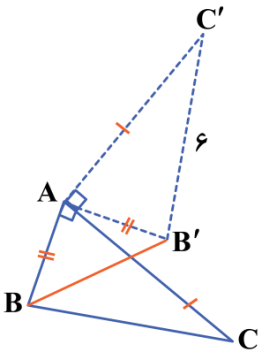


۵- مثلث ABC مفروض است. اگر B' و C' دوران یافته‌های B و C حول A به اندازهٔ 90° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند و $B'C'=6cm$ و محیط مثلث ABC برابر $14cm$ باشد، اندازهٔ $BB'+CC'$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) ۱۶ ۴) $12\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۲ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به طولپایی دوران واضح است که $AB=AB'$ و $B\hat{A}B'=90^\circ$ و همچنین $AC=AC'$ و $C\hat{A}C'=90^\circ$، بنابراین مثلث‌های BAB' و CAC' قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند و داریم:



$$\begin{cases} CC'=\sqrt{2}AC \\ BB'=\sqrt{2}AB \end{cases}$$

همچنین $B'C'$ دوران یافتهٔ BC است و لذا با BC هم‌اندازه است یعنی $BC=B'C'=6$، حال با توجه به فرض داریم:

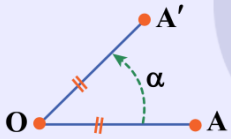
$$AB+AC+BC=14 \xrightarrow{BC=6} AB+AC=8$$

حال داریم:

$$BB'+CC'=\sqrt{2}(AB+AC)=8\sqrt{2}$$

دوران

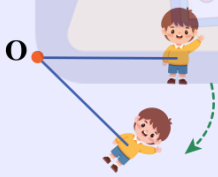
نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت تبدیل دوران به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α است، هرگاه:



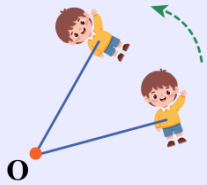
$$OA=OA' \quad \text{و} \quad A\hat{O}A'=\alpha$$

۱) دوران تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را حول نقطهٔ O می‌چرخاند.

۲) در دوران با زاویهٔ α جهت چرخش می‌تواند ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد که معمولاً در مسائل، طراح آن را مشخص می‌کند.

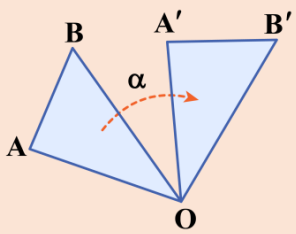


دوران ساعتگرد



دوران پادساعتگرد

تبدیل دوران به مرکز O و زاویهٔ α دارای خواص زیر است:

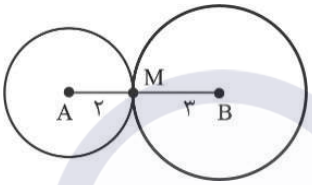
ویژگی‌های دوران	
۱) دوران ایزومتری است، یعنی طول پاره‌خط را ثابت نگه می‌دارد.	
۲) دوران شیب‌پا نیست، یعنی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر آن‌که $\alpha=k\pi$ باشد.	
۳) در دوران، شکل و تصویرش همنهشت و هم‌جهت هستند و اندازهٔ زاویه‌ها نیز حفظ می‌شود.	
۴) مرکز دوران روی عمودمنصف پاره‌خطی قرار دارد که نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کند.	

۱ . دو نقطه‌ی متمایز A و B را در صفحه در نظر بگیرید. اگر در این صفحه تنها یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی ۲ و از B به فاصله‌ی ۳ باشد، برای طول پاره‌خط AB چند مقدار متفاوت امکان‌پذیر است؟

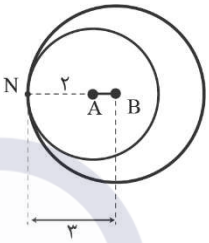
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

تمام نقاطی که از A به فاصله‌ی ۲ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند و به همین ترتیب، تمام نقاطی که از B به فاصله‌ی ۳ هستند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ واقع‌اند. در دو حالت زیر، این دو دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند:



$AB = AM + BM = ۲ + ۳ = ۵$



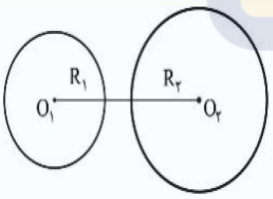
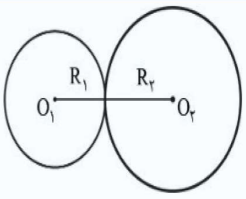
$AB = BN - AN = ۳ - ۲ = ۱$

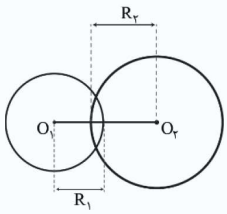
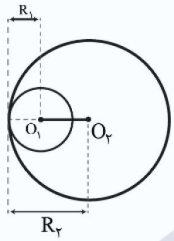
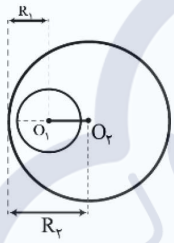
پس برای طول پاره‌خط AB، دو مقدار متفاوت به دست می‌آید.

درسنامه:

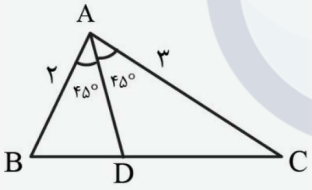
۱ در سوالاتی که به دنبال نقطه‌ای با دو ویژگی مشخص هستیم، باید شکل متناظر هر کدام از ویژگی‌ها را رسم کنیم، نقطه‌ی موردنظر، نقطه‌ی مشترک آن دو شکل است.

۲ **بررسی وضعیت دو دایره در صفحه:** فرض کنیم $C_۱$ دایره‌ای به مرکز $O_۱$ و شعاع $R_۱$ و $C_۲$ دایره‌ای به مرکز $O_۲$ و شعاع $R_۲$ باشد. این دو دایره نسبت به هم، یکی از وضعیت‌های زیر را دارند:

تعداد نقاط مشترک	رابطه‌ی بین شعاع‌ها و فاصله‌ی بین مراکز دو دایره	شکل	وضعیت
۰	$O_۱O_۲ > R_۱ + R_۲$		متخارج
۱	$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$		مماس خارج

۲	$\lvert R_۲-R_۱\rvert<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$		متقاطع
۱	$O_۱O_۲=\lvert R_۲-R_۱\rvert$		مماس درون
۰	$O_۱O_۲<\lvert R_۲-R_۱\rvert$		متداخل

۲ . در شکل مقابل مجموع فاصله‌های نقطه‌ی D از دو پاره‌خط AB و AC کدام است؟



۱) ۲/۴

۲) ۲/۵

۳) ۲/۷

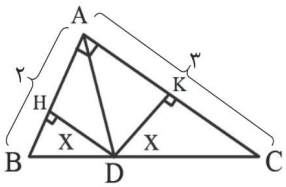
۴) ۲/۸

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که D نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ است، بنابراین، از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است، پس در نظر می‌گیریم $DH=DK=x$.

از طرفی $B\hat{A}C=۴۵^\circ+۴۵^\circ=۹۰^\circ$، یعنی $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است، بنابراین: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۳=۳$

با توجه به شکل، داریم:



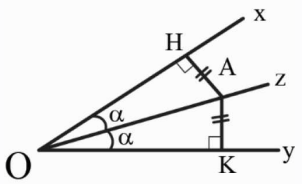
$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD} \Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}DH.AB+\frac{۱}{۲}DK.AC$$

$$\Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}x\times۲+\frac{۱}{۲}x\times۳ \xrightarrow{\times۲} ۶=۲x+۳x \Rightarrow x=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

در نهایت داریم: $DH+DK=x+x=۲x=۲\times۱/۲=۲/۴$:خواسته‌ی سوال

درسنامه:

اگر نقطه‌ی روی نیمساز یک زاویه واقع باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. مثلاً در شکل مقابل که Oz نیمساز زاویه‌ی $x\hat{O}y$ و A نقطه‌ای واقع بر آن است، داریم $AH=AK$.



۳. در مثلث ABC که $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف ضلع AB و نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$، هم‌دیگر را در نقطه‌ی T قطع می‌کنند، زاویه‌ی $C\hat{A}T$ چند درجه است؟

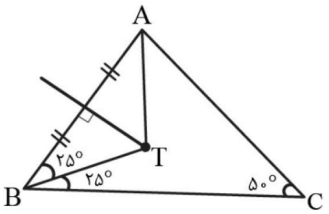
۱) ۵۵ ۲) ۶۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید از آن‌جا که در مثلث ABC داریم $AB=AC$، نتیجه می‌شود $\hat{B}=\hat{C}$، پس اگر $\hat{A}=80^\circ$، آن‌گاه:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} 80^\circ+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}=50^\circ$$

پس نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$، آن را به دو زاویه‌ی 25° تقسیم می‌کند و شکل مناسب به صورت مقابل است.



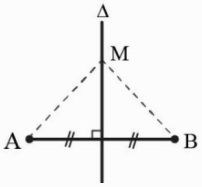
همان‌طور که می‌بینید، T نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس T از A و B به یک فاصله است، یعنی $TA=TB$ و مثلث $\overset{\Delta}{TAB}$ متساوی‌الساقین است، بنابراین $T\hat{A}B=T\hat{B}A=25^\circ$

بنابراین:

$$C\hat{A}T=B\hat{A}C-T\hat{A}B=80^\circ-25^\circ=55^\circ$$

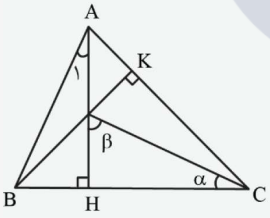
درسنامه:

هر نقطه که بر عمودمنصف یک پاره‌خط واقع باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



مثلا در شکل مقابل که خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB و M نقطه‌ای واقع بر آن است، داریم $MA=MB$.

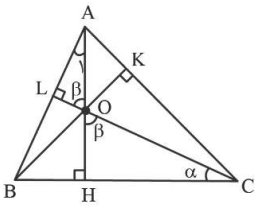
۴. در شکل رسم شده، اگر $\hat{A}_1=\frac{1}{3}\beta$، آن‌گاه $\alpha-\beta$ چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۴۵
۳) ۵۴
۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل، AH و BK دو تا از ارتفاع‌های مثلث ABC هستند که در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. از آن‌جا که ارتفاع‌های هر مثلث همرس هستند، امتداد CO هم ارتفاع سوم مثلث ABC است، یعنی بر ضلع AB عمود است. داریم:



$$A\hat{O}L=\beta \text{ (متقابل به راس)}$$

از طرفی داریم:

$$\overset{\Delta}{COH}:\begin{cases}\alpha+\beta=90^\circ\\ \hat{A}_1+\beta=90^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1=\alpha \xrightarrow[\hat{A}_1=\frac{1}{3}\beta]{\text{طبق فرض}} \frac{1}{3}\beta=\alpha \Rightarrow \beta=3\alpha$$

از دستگاه $\begin{cases}\beta=3\alpha\\ \alpha+\beta=90^\circ\end{cases}$ به دست می‌آید $\begin{cases}\alpha=22/5^\circ\\ \beta=67/5^\circ\end{cases}$، پس $\alpha-\beta=45^\circ$.

درسنامه:

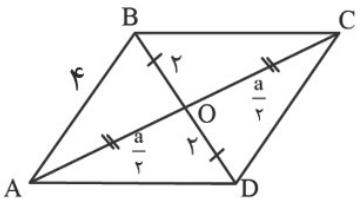
۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع دو زاویه‌ی حاده، برابر با 90° است.

۲) ارتفاع‌های هر مثلث همرس هستند.

۵ . متوازی‌الاضلاعی که طول یکی از قطرهای آن a و طول قطر دیگر و یکی از اضلاع آن برابر ۴ است، قبل رسم است. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲



فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است که در آن $AB=۴$، $BD=۴$ و $AC=a$. از آن‌جا که قطرهای متوازی‌الاضلاع هم‌دیگر را نصف می‌کنند، داریم $BO=\frac{۴}{۲}=۲$, $AO=\frac{a}{۲}$.

در مثلث ABO باید:

$$|۴-۲|<\frac{a}{۲}<۴+۲ \Rightarrow ۲<\frac{a}{۲}<۶ \xrightarrow{\times ۲} ۴<a<۱۲$$

پس کوچک‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای a برابر با ۵ و بزرگ‌ترین مقدار طبیعی قابل‌قبول برای آن ۱۱ است که اختلاف این دو مقدار برابر است با $۶=۵-۱۱$.

درسنامه:

۱ در هر متوازی‌الاضلاعی، قطرها هم‌دیگر را نصف می‌کنند.

۲ مثلثی به طول اضلاع a، b و c زمانی قابل رسم است که: $|b-c|<a<b+c$

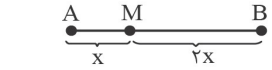
سنجش کلاد

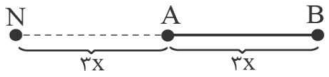
۱ . پاره‌خط AB، نقطهٔ M بر این پاره خط و نقطهٔ N واقع بر امتداد آن مفروض‌اند. اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=\frac{۱}{۲}$ و طول پاره خط MN برابر با ۶ واحد باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داریم:

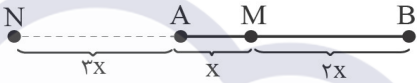




$$\frac{MA}{MB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}MA=x\\MB=۲x\end{cases}$$

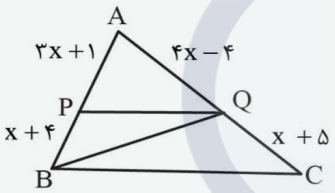
$$\frac{NA}{NB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{NA}{NA+AB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{NA}{NA+۳x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow NA=۳x$$

حالا با ترکیب شکل‌های بالا خواهیم داشت:



$$MN=۶\Rightarrow NA+AM=۳x+x=۴x=۶\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow AB=۳x=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۲ . در شکل مقابل PQ با BC موازی است. نسبت مساحت مثلث BPQ به مساحت مثلث BCQ کدام است؟

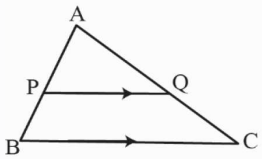


۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

۱) در شکل مقابل PQ با BC موازی است، داریم:

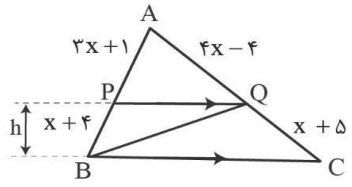


$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\quad\text{(قضیه‌ی تالس)}$$

$$\frac{AB}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\quad\text{(تعمیم قضیه‌ی تالس)}$$

۲) اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع برابر.

با توجه به شکل، بنا به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{۳x+۱}{x+۴}=\frac{۴x-۴}{x+۵}\Rightarrow(۳x+۱)(x+۵)=(۴x-۴)(x+۴)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۱۵x+x+۵=۴x^۲+۱۶x-۴x-۱۶\Rightarrow x^۲-۴x-۲۱=۰$$

$$\Rightarrow(x+۳)(x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳&\text{(غیر قابل قبول)}\\x=۷\end{cases}$$

از طرفی بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{۳x+۱}{۴x+۵}\xrightarrow{x=۷}\frac{PQ}{BC}=\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۲}{۳}\quad(*)$$

در نهایت داریم:

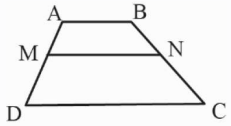
$$\frac{S_{BPQ}}{S_{BCQ}}=\frac{\frac{۱}{۲}h.PQ}{\frac{۱}{۲}h.BC}=\frac{PQ}{BC}\overset{(*)}{=}\frac{۲}{۳}$$

۳. در ذوزنقه‌ی ABCD، AB قاعده‌ی کوچک‌تر است. نقطه‌ی M را روی ساق AD و نقطه‌ی N را روی ساق BC طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۴}{۹}$. اگر پاره‌خط MN توسط قطرهای ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{AB}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

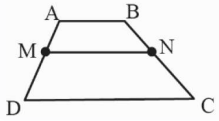
پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:



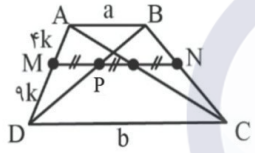
۱) مطابق شکل، اگر دو نقطه‌ی M و N را روی ساق‌های ذوزنقه‌ی ABCD در نظر بگیریم که MN با قاعده‌ها موازی باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{MN-AB}{CD-MN}$$



۲) عکس قضیه‌ی تالس در ذوزنقه: مطابق شکل در ذوزنقه‌ی ABCD اگر دو نقطه‌ی M و N را به ترتیب روی ساق‌های AD و BC طوری در نظر بگیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، آن‌گاه MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.

شکل مناسب را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، پاره‌خط MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.



از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{۴}{۹}$، در نظر می‌گیریم $AM=۴k$ و $MD=۹k$.

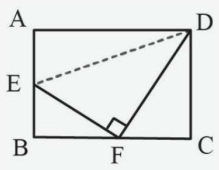
در مثلث ABD بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس، داریم:

$$\frac{MP}{AB}=\frac{DM}{DA}\Rightarrow\frac{MP}{a}=\frac{۹k}{۹k+۴k}\Rightarrow MP=\frac{۹}{۱۳}a$$

پس $MN=۳MP=\frac{۲۷}{۱۳}a$ و داریم:

$$\frac{MN-AB}{CD-MN}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow\frac{\frac{۲۷}{۱۳}a-a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{\frac{۱۴}{۱۳}a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{۱۲۶}{۱۳}a=۴b-\frac{۱۰۸}{۱۳}a\Rightarrow\frac{۲۳۴}{۱۳}a=۴b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱۸\times۱۳}{۴\times۱۳}=۴/۵$$

۴. مطابق شکل، E و F وسط‌های دو ضلع مستطیل ABCD هستند. نسبت $\frac{DE}{AD}$ برابر با کدام است؟

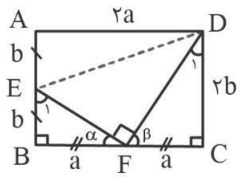


۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

طول اضلاع مستطیل را ۲a و ۲b در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، داریم:



$$B\hat{F}C=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+۹۰^\circ+\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=۹۰^\circ\quad(*)$$

از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ داریم $\alpha+\hat{E}_۱=۹۰^\circ$ و در مثلث $\overset{\Delta}{CDF}$ داریم $\hat{D}_۱+\beta=۹۰^\circ$ پس بنا به (*)، داریم $\hat{E}_۱=\beta$ و $\hat{D}_۱=\alpha$. پس زاویه‌های دو مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ و $\overset{\Delta}{CFD}$ با هم برابر و در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BF}{CD}=\frac{BE}{CF}\Rightarrow\frac{a}{۲b}=\frac{b}{a}\Rightarrow a^۲=۲b^۲\Rightarrow b^۲=\frac{۱}{۲}a^۲\quad(*)$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$\overset{\Delta}{BEF}:EF^۲=a^۲+b^۲\overset{(*)}{=\!=}\frac{۳}{۲}a^۲\quad,\quad\overset{\Delta}{CFD}:FD^۲=a^۲+۴b^۲\overset{(*)}{=\!=}۳a^۲$$

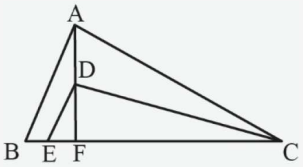
$$\overset{\Delta}{DEF}:DE^۲=EF^۲+FD^۲\Rightarrow DE^۲=\frac{۳}{۲}a^۲+۳a^۲=\frac{۹}{۲}a^۲$$

از $DE^2=\frac{9}{2}a^2$ نتیجه می‌گیریم:

$$DE^2=\frac{9}{2}(\frac{1}{2}AD)^2 \Rightarrow DE^2=\frac{9}{8}AD^2 \Rightarrow \frac{DE^2}{AD^2}=\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۵ . در شکل مقابل، زاویه‌های BAC، CDE و AFC قائمه‌اند. اگر E وسط BF و DF = BF آن‌گاه حاصل $\frac{AC}{DC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{1/2}$

۲) $\sqrt{1/3}$

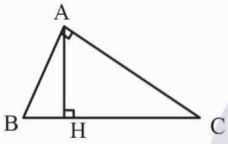
۳) $\sqrt{1/4}$

۴) $\sqrt{1/5}$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

مطابق شکل، اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه:



۱) $AH^2=BH.CH$

۲) $AB^2=BH.BC$

۳) $AC^2=CH.BC$

مطابق شکل، از آن‌جا که E وسط BF است، در نظر می‌گیریم $BE=EF=x$ که در این‌صورت، از $DF=BF$ نتیجه می‌گیریم $DF=2x$.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF ، DF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$DF^2=EF.CF \Rightarrow (2x)^2=x.CF \Rightarrow CF=\frac{4x^2}{x}=4x$$

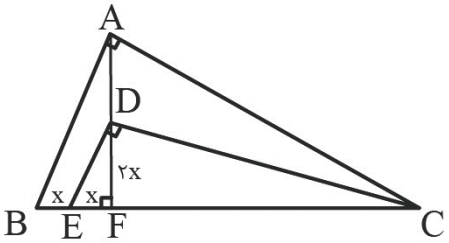
$$DC^2=CF.CE \Rightarrow DC^2=(4x)(5x)=20x^2$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، AF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$AC^2=CF.BC \Rightarrow AC^2=(4x)(6x)=24x^2$$

پس:

$$\frac{AC^2}{DC^2}=\frac{24\times x^2}{20x^2}=1/2 \Rightarrow \frac{AC}{DC}=\sqrt{1/2}$$



1. از هر رأس یک n ضلعی محدب $3(n-7)$ قطر می‌گذرد. تعداد کل قطرهای این n ضلعی کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۴ ۳) ۲۰ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴ ساده | مفهومی

درسنامه

۱) از هر رأس یک n ضلعی محدب، $(n-3)$ قطر می‌گذرد.

۲) تعداد کل قطرهای یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

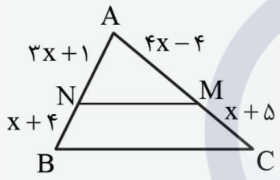
بنا به درسنامه، از هر رأس n ضلعی محدب، $(n-3)$ قطر می‌گذرد. پس بنا به فرض سوال، داریم:

$$3(n-7)=n-3 \Rightarrow 3n-21=n-3 \Rightarrow 2n=18 \Rightarrow n=9$$

پس تعداد کل قطرهای این ضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2} \xrightarrow{n=9} \frac{9\times 6}{2}=27$$

2. در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت ذوزنقه‌ی MNBC کدام است؟



۱) ۰/۶۵

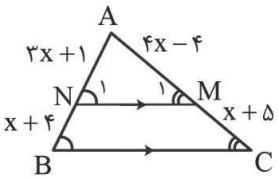
۲) ۰/۷

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۸

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | ترکیبی

نکته در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مجذور نسبت تشابه.



چهارضلعی MNBC ذورنقه است، یعنی MN با BC موازی است، پس می‌توانیم در مثلث ABC از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{3x+1}{x+4}=\frac{4x+4}{x+5} \Rightarrow (3x+1)(x+5)=(4x-4)(x+4)$$

$$\Rightarrow 3x^2+15x+x+5=4x^2+16x-4x-16 \Rightarrow x^2-4x-21=0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-3 \quad \text{(غیر قابل‌قبول)} \end{cases}$$

از طرفی به دلیل قضیه‌ی موازی – مورب، $\hat{N}_1=\hat{B}$ و $\hat{M}_1=\hat{C}$، پس مثلث ANM با مثلث ABC متشابه است، در نتیجه:

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AN}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{3x+1}{4x+5}\right)^2 \xrightarrow{x=7} \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{22}{33}\right)^2$$

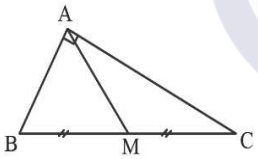
$$\Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}-S_{ANM}}=\frac{4}{9-4} \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{MNBC}}=\frac{4}{5}=0/8$$

3. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AH و AM به ترتیب ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر هستند. اگر $MH=\frac{1}{4}BC$ آن‌گاه طول BC چند برابر فاصله‌ی نقطه‌ی H از خط AM است؟

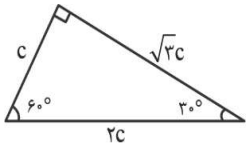
۱) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی

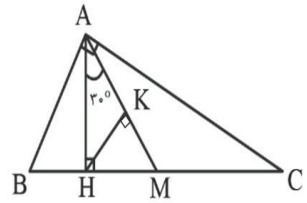
۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است. مثلاً در شکل مقابل داریم $AM=\frac{1}{2}BC$.



۲) مطابق شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حاده‌ی آن 30° و 60°، اضلاع به نسبت ۱، $\sqrt{3}$ و ۲ هستند و بالعکس.



شکل مناسب را رسم می‌کنیم. می‌دانیم $AM=\frac{1}{2}BC$. پس اگر $MH=\frac{1}{4}BC$، آن‌گاه $MH=\frac{1}{2}AM$، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی HAM، طول ضلع روبه‌روی زاویه‌ی $\hat{HAM}$، نصف طول وتر است، پس این زاویه، 30° است، پس در این مثلث داریم $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AM$.

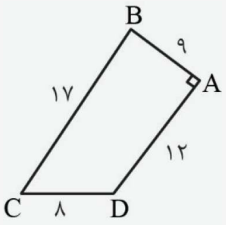


از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHK داریم:

$$HK=\frac{1}{2}AH \Rightarrow HK=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AM\right) \Rightarrow HK=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}BC\right)$$

$$\Rightarrow HK=\frac{\sqrt{3}}{8}BC \Rightarrow \frac{BC}{HK}=\frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

4. در شکل مقابل، وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD، رأس‌های یک چهارضلعی هستند، مساحت این چهارضلعی کدام است؟



۱) ۵۷

۲) ۵۸

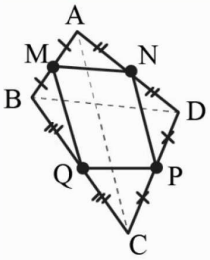
۳) ۵۹

۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | ترکیبی

سرنخ قطر BD را رسم کنید.

درسنامه

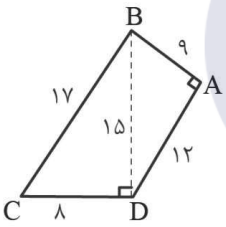


اگر وسط‌های ضلع‌های یک چهارضلعی محدب را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که:

الف) ضلع‌های آن با قطرهای چهارضلعی اولیه موازی‌اند.

ب) مساحت آن، نصف مساحت چهارضلعی اولیه است.

مثلاً در شکل بالا $\begin{cases} NM, PQ \parallel BD \\ NP, MQ \parallel AC \end{cases}$ و $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.



قطر BD را رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزا ویه‌ی ABD، بنا به قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$BD = \sqrt{۹^۲ + ۱۲^۲} = \sqrt{۳^۲ \times ۳^۲ + ۳^۲ \times ۴^۲} = ۳\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۱۵$$

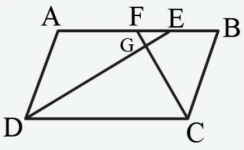
از طرفی از آن‌جا که $۱۵^۲ + ۸^۲ = ۱۷^۲$، پس در مثلث BCD رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است و در نتیجه $B\hat{D}C = ۹۰^\circ$، پس:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۹ \times ۱۲}{۲} + \frac{۸ \times ۱۵}{۲} = ۵۴ + ۶۰ = ۱۱۴$$

بنا به درسنامه، مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن متوالی وسط‌های ضلع‌های چهارضلعی ABCD برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۱۴ = ۵۷$$

5. در شکل مقابل چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و ضلع AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی AFGD و BEGC کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۱۰}$

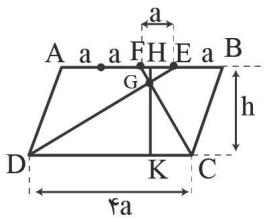
۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۹}{۱۴}$

پاسخ: گزینه ۴ سخت | ترکیبی

نکته در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر، برابر است با نسبت تشابه.



بنا به قضیه‌ی موازی - مورب، داریم: $E\hat{F}G = G\hat{C}D \ , \ F\hat{E}G = G\hat{D}C$

پس بنا به حالت تساوی دو زاویه، داریم: $\overset{\Delta}{GCD} \sim \overset{\Delta}{GFE}$.

بنابراین نسبت GK به GH که دو ارتفاع متناظر در این دو مثلث متشابه هستند، برابر با نسبت تشابه است،

یعنی $\frac{GK}{GH} = \frac{CD}{EF} = ۴$، پس می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که $GH = \frac{۱}{۵}h$ و $GK = \frac{۴}{۵}h$.

ضمن آن‌که داریم:

$$S_{GEF} = \frac{۱}{۲}GH.EF = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۵}h)(a) = \frac{۱}{۱۰}ah$$

$$S_{CBF} = \frac{۱}{۲}h.BF = \frac{۱}{۲}h(۲a) = ah \ \Rightarrow \ S_{BEGC} = S_{CBF} - S_{GEF} = ah - \frac{۱}{۱۰}ah = \frac{۹}{۱۰}ah$$

$$S_{DAE} = \frac{۱}{۲}h.AE = \frac{۱}{۲}h(۳a) = \frac{۳}{۲}ah \ \Rightarrow \ S_{AFGD} = S_{DAE} - S_{GEF} = \frac{۳}{۲}ah - \frac{۱}{۱۰}ah = \frac{۱۴}{۱۰}ah$$

بنابراین:

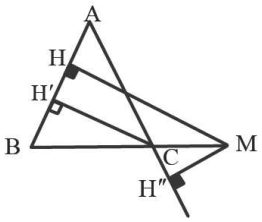
$$\frac{S_{BEGC}}{S_{AFGD}} = \frac{\frac{۹}{۱۰}ah}{\frac{۱۴}{۱۰}ah} = \frac{۹}{۱۴}$$

سنجش کلاد

1. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد از نقطه‌ی M واقع بر امتداد ضلع BC بر ضلع AB عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. اگر $MH=۵\sqrt{۳}$، فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط شامل ضلع AC کدام است؟ $(MB>MC)$

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی



از M بر خط شامل ضلع AC عمود کرده و پای عمودی را H'' می‌نامیم.

می‌دانیم تفاضل فواصل هر نقطه روی امتداد یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با ارتفاع مثلث است. پس:

$$MH>MH''$$

$$|MH-MH''|=CH'\Rightarrow ۵\sqrt{۳}-MH''=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow MH''=۲\sqrt{۳}$$

2. در شکل زیر ساخت ناحیه‌ی رنگی چند واحد سطح است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۳
۳) ۷
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ ساده | محاسباتی

طبق رابطهٔ پیک داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱$$

بنابراین:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{کل}}-S_{\text{حفره}}$$

$$=(\frac{۱۴}{۲}+۷-۱)-(\frac{۶}{۲}+۱-۱)=۱۳-۳=۱۰$$

3. در یک چندضلعی شبکه‌ای مجموع تعداد نقاط درونی و تعداد نقاط مرزی برابر با ۷ است. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مساحت ممکن برای این چندضلعی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی

اگر تعداد نقاط مرزی را با b و تعداد نقاط درونی را با i نمایش دهیم:

$$b+i=۷$$

بیشترین مساحت زمانی رخ می‌دهد که $b=۳$ (کم‌ترین مقدار b) و کم‌ترین مساحت زمانی اتفاق افتد که $b=۷$ (بیشترین مقدار b). بنابراین:

$$S_{Max}=\frac{۳}{۲}+۴-۱=۴/۵$$

$$S_{Min}=\frac{۷}{۲}+۰-۱=۲/۵$$

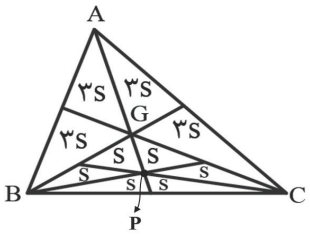
$$\Rightarrow S_{Max}-S_{Min}=۴/۵-۲/۵=۲$$

4. نقطه‌ی G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است. اگر نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های مثلث BGC باشد، مساحت مثلث GPC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

ابتدا شکل را رسم می‌کنیم: می‌دانیم که رسم سه میانهٔ مثلث آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین توزیع مساحت‌ها به شکل زیر است:



بنابراین می‌توان نوشت:

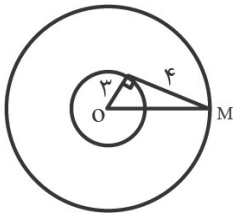
$$\frac{S_{\triangle GPC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{۲S}{۱۸S} = \frac{۱}{۹}$$

۱. مکان هندسی نقاطی که از آن نقطه‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره $C(O,3)$ رسم کرد، کدام است؟

۱) دایره $C'(O,5)$
۲) دایره $C'(O,7)$
۳) مربعی به مرکز O و قطر ۱۰
۴) دایره $C'(O,\sqrt{7})$

پاسخ: گزینه ۱ ساده | مفهومی - مکان هندسی

مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OM=\sqrt{3^2+4^2}=5$ است.



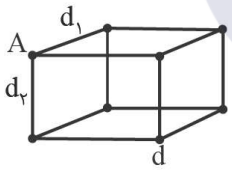
۲. چه تعداد از جملات زیر گزاره درست هستند.

آ) در فضا از هر نقطه خارج خط فقط یک خط می‌توان عمود بر خط d رسم کرد.
ب) از هر نقطه خارج صفحه بی‌شمار صفحه وجود دارد که بر آن صفحه عمود است.
پ) از هر نقطه خارج خط بی‌شمار صفحه موازی آن صفحه وجود دارد.
ت) از هر نقطه خارج صفحه یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی- تجسم فضایی

گزینهٔ (آ) نادرست است.
از نقطه A بی‌شمار خط می‌گذرد که بر خط d عمود است.

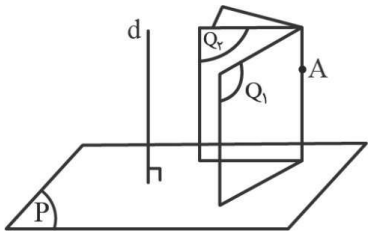


۳. نقطه A و خط d و صفحه p مفروض است. اگر بی‌شمار صفحه از A بگذرد و با خط d موازی باشد و بر صفحه p عمود باشد، وضعیت خط d و صفحه p کدام است؟

۱) $d\perp p$
۲) $d\parallel p$
۳) $d\cap p=A$
۴) $d\cap p=d$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی - تجسم فضایی

اگر خط d بر صفحه p عمود باشد، بی‌شمار صفحه از A می‌گذرد که با خط d موازی و بر صفحه p عمود است.

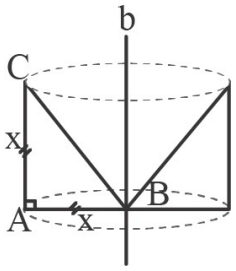


۴ . مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{A}=۹۰$ مفروض است. از رأس B خطی موازی ضلع قائم AC رسم می‌کنیم. سپس مثلث را نسبت به خط d دوران می‌دهیم. اگر حجم جسم فضای حاصل ۱۴۴π باشد، محیط مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

۱) $۶(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۶(۲+\sqrt{۲})$ ۳) $۱۲(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۱۲(۲+\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی - تجسم فضایی

اگر مثلث قائم‌الزاویه حول خط d دوران دهیم، یک استوانه و یک مخروط با قاعده مشترک دیده می‌شود. حجم جسم فضایی برابر است با:



$$V_{\text{جسم فضایی}}=\text{حجم مخروط}-\text{حجم استوانه}=\pi r^{۲}h-\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

$$=\frac{۲}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۲}{۳}\pi(x)^{۲}(x)=\frac{۲}{۳}\pi x^{۳}$$

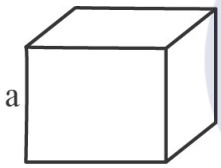
$$۱۴۴\pi=\frac{۲}{۳}\pi x^{۳}\Rightarrow x^{۳}=۲۱۶\Rightarrow x=۶$$

$$\text{محیط مثلث}=۶+۶+۶\sqrt{۲}=۱۲+۶\sqrt{۲}=۶(۲+\sqrt{۲})$$

۵ . مکعب توپری توسط صفحه قطری برش داده می‌شود و سپس به کمک وجه مثلث به هم چسبیده می‌شود تا یک منشور با قاعده مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ساخته شود. مساحت کل منشور حاصل چند برابر مساحت کل مکعب است؟

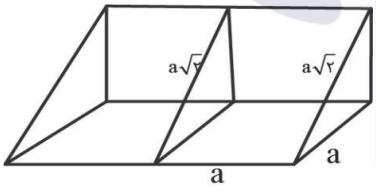
۱) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۶}$ ۳) $\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۴+۲\sqrt{۶}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ سخت | محاسباتی - تجسم فضایی



$$\Rightarrow \text{مساحت مکعب اولیه}=۶a^{۲}$$

می‌دانیم طول قطر مکعب $a\sqrt{۲}$ است.



$$\text{مساحت کل}=(۲a\times a\sqrt{۲})+۲(\frac{۱}{۲}a^{۲})+۴a^{۲}$$

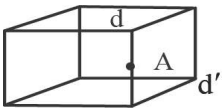
$$=۵a^{۲}+۲\sqrt{۲}a^{۲}$$

$$\frac{\text{مساحت کل منشور}}{\text{مساحت کل مکعب}}=\frac{a^{۲}(۵+۲\sqrt{۲})}{۶a^{۲}}=\frac{۵+۲\sqrt{۲}}{۶}$$

۶ . دو خط متنافر d و d′ و نقطهٔ A مفروضند. چند خط وجود دارد که از نقطه A می‌گذرد و بر هر دو خط d و d′ عمود و متقاطع است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) حداکثر یک ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی - تجسم فضایی



اگر نقطه A همانند شکل روبه‌رو باشد فقط یک خط وجود دارد. اگر نقطه خارج عمود مشترک باشد هیچ خط.
بنابراین حداکثر یک خط، یک عمود مشترک، دو خط متنافر وجود دارد.

1. دایره‌های C_1 و C_2 به معادلات $x^2+y^2-2x-2y=2$ و $2x^2+my^2-2x+4y=k$ مماس خارج‌اند. مقدار k کدام است؟

۱) $28-4\sqrt{17}$ ۲) $14+4\sqrt{17}$ ۳) $14-4\sqrt{17}$ ۴) $14-4\sqrt{17}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | مفهومی، محاسباتی

زمانی دو دایره مماس خارج‌اند که مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها برابر با طول خط‌المرکزین باشد. یعنی $d=R_1+R_2$. ابتدا مراکز و شعاع‌های دایره‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$C_1: x^2+y^2-2x-2y=2 \Rightarrow O_1(1,1), R_1=2$$

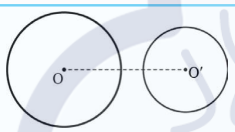
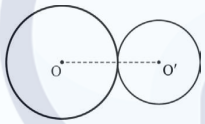
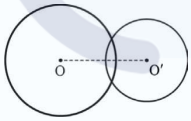
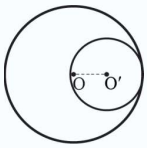
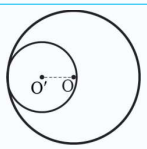
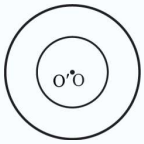
$$C_2: 2x^2+my^2-2x+4y=k \Rightarrow O_2(\frac{1}{2},-1), R_2=\frac{\sqrt{5+2k}}{2}$$

$$O_1O_2=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(1+1)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}=2+\frac{\sqrt{5+2k}}{2} \Rightarrow \sqrt{5+2k}=\sqrt{17}-4$$

$$\Rightarrow 5+2k=17-8\sqrt{17}+16 \Rightarrow 2k=28-8\sqrt{17} \Rightarrow k=14-4\sqrt{17}$$

درسنامه:

وضعیت نسبی دو دایره: اگر R و R' شعاع‌های دایره‌ها و d طول خط‌المرکزین باشد:

دو دایرهٔ برون از هم (متخارج)	$d>R+R'$	
دو دایره مماس برون	$d=R+R'$	
دو دایره متقاطع	$R-R'<d<R+R'$	
دو دایره مماس درون	$d=R-R'$	
دو دایره متداخل	$d<R-R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d=0$	

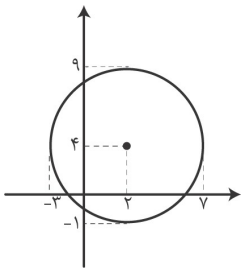
2. در مقطع مخروطی $x^2+y^2-4x-8y=5$ بیشترین مقدار x برابر با m و کم‌ترین مقدار y برابر با n است. حاصل $m+n$ چقدر است؟

۱) -6 ۲) 3 ۳) 6 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

ابتدا با به دست‌آوردن مرکز و شعاع دایره، آن را رسم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۴x-۸y=۵ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۴)^۲=۲۵ \Rightarrow \begin{cases} O(۲,۴) \\ R=۵ \end{cases}$$



نمودار دایره به صورت مقابل است:

همان‌طور که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار x برابر با $m=۷$ و کم‌ترین مقدار y برابر با $n=-۱$ است. بنابراین $m+n=۶$.

3. دایرهٔ C بر خطوط $d_۱: y-x=۰$ و $d_۲: y=x-۲$ مماس است و از نقطهٔ $A(۰,-۱)$ عبور می‌کند. کدام‌یک از خطوط زیر از مرکز دایرهٔ C می‌گذرد؟

۱) $y=۳x$ ۲) $y=۲x$ ۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{x}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ سخت | مفهومی، محاسباتی

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ شیب‌های برابر دارند، یعنی با هم موازی‌اند. از آن‌جاییکه دایرهٔ موردنظر بر هر دو خط مماس است، بنابراین فاصلهٔ میان این دو خط برابر با قطر دایره است. فاصلهٔ میان این دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$d_۱: y-x=۰ \ , \ d_۲: y-x+۲=۰ \Rightarrow ۲R=\frac{|۲-۰|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر با $R=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. مرکز دایره بر روی خطی قرار دارد که دقیقاً وسط $d_۱$ و $d_۲$ است. معادلهٔ این خط به صورت $d_۳: y=x-۱$ می‌باشد. پس مرکز دایره به شکل $O(m,m-۱)$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x-m)^۲+(y-m+۱)^۲=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

این دایره از نقطهٔ $A(۰,-۱)$ عبور می‌کند. بنابراین:

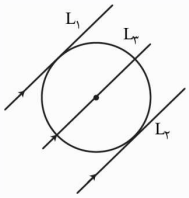
$$(۰-m)^۲+(-۱-m+۱)^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲m^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مرکز دایره می‌تواند $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ یا $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۲})$ باشد که خط $y=۳x$ از نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۲})$ می‌گذرد.

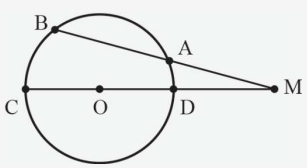
درسنامه:

اگر دایره‌ای بر دو خط موازی $ax+by+c_۱=۰$ و $ax+by+c_۲=۰$ مماس باشد، مرکزش روی خط میانی به معادلهٔ $ax+by+\frac{c_۱+c_۲}{۲}=۰$ قرار می‌گیرد. هم‌چنین چون دایره به هر دو خط مماس است، شعاع برابر است با فاصلهٔ‌مرکز تا یکی از خطوط.

به شکل زیر دقت کنید:



4. در شکل زیر اندازهٔ پاره‌خط MA برابر با طول شعاع دایره است. طول کمان BC چه کسری از طول کمان AD است؟ (O مرکز دایره است.)

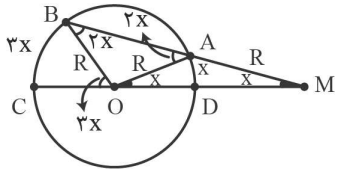


۱) ۲/۵ ۲) ۳

۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | مفهومی

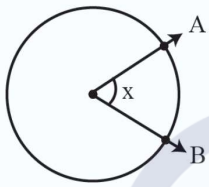
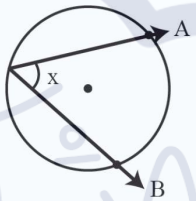
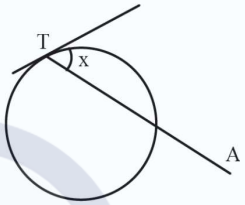
از نقطهٔ A به O و از O به B وصل می‌کنیم. مثلث AOM متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $A\hat{O}D = \overset{\frown}{AD} = x$. زاویهٔ BAO زاویهٔ خارجی مثلث AOM است. بنابراین $O\hat{A}B = O\hat{B}A = ۲x$. هم‌چنین زاویهٔ BOC زاویهٔ خارجی مثلث BOM است. بنابراین $B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} = ۳x$. پس خواهیم داشت:



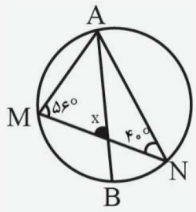
$$\frac{\text{طول کمان BC}}{\text{طول کمان AD}} = \frac{\frac{\pi R(۳x)}{۱۸۰}}{\frac{\pi R(x)}{۱۸۰}} = \frac{۳x}{x} = ۳$$

درسنامه:

زوایای مرکزی، محاطی و خطی:

$x = \overset{\frown}{AB}$	$x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$	$x = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$
		

5. در شکل زیر پاره‌خط AB قطر دایره است. مقدار x کدام است؟



۱) ۷۴°

۲) ۶۸°

۳) ۶۴°

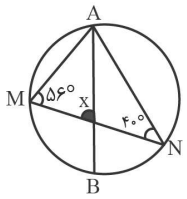
۴) ۷۸°

پاسخ: گزینه ۱ ساده | محاسباتی

زاویهٔ B محاطی است؛ بنابراین:

$$\overset{\frown}{AN} = ۲ \times ۵۶^\circ = ۱۱۲^\circ$$

AB قطر دایره است. پس داریم:



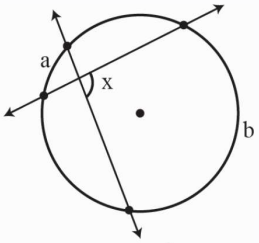
$$\overset{\frown}{BN} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AN} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۲^\circ = ۶۸^\circ$$

زاویهٔ N نیز یک زاویهٔ محاطی است. بنابراین $\overset{\frown}{AM} = ۲ \times ۴۰^\circ = ۸۰^\circ$. زاویهٔ x بین دو وتر قرار دارد. بنابراین:

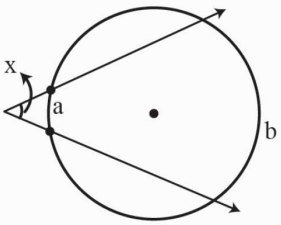
$$x = \frac{\overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{AM}}{۲} = \frac{۶۸^\circ + ۸۰^\circ}{۲} = ۷۴^\circ$$

درسنامه:

زاویهٔ میان دو وتر



$$x = \frac{a+b}{۲}$$

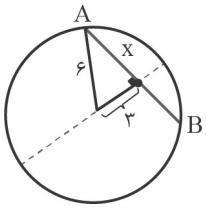


$$x = \frac{b-a}{۲}$$

6. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ قرار دارد. طول کوتاه‌ترین وتری از دایره که از نقطهٔ A می‌گذرد چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ آسان | محاسباتی



ابتدا شکل مربوطه را رسم می‌کنیم؛ کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است. مطابق با قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ = ۶^۲ - ۳^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۲x = ۶\sqrt{۳}$$

درسنامه:

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطهٔ داخل دایره همیشه وتر عمود بر شعاعی است که از ان نقطه می‌گذرد.

به زبان ساده:

- اگر نقطهٔ P داخل دایره باشد، کوتاه‌ترین وتر، وتری است که از P عبور می‌کند و بر خط OP (شعاع از مرکز به نقطه) عمود است.

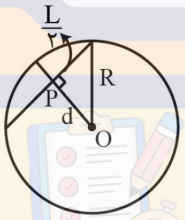
چرا این وتر کوتاه‌ترین است؟

چون هر وتری که از نقطهٔ P می‌گذرد، در واقع در فاصلهٔ ثابتی از مرکز نیست؛ اما وقتی وتر عمود بر شعاع OP باشد، نقاط دو سر وتر نزدیک‌ترین حالت ممکن را به مرکز دارند ← طول وتر حداقل می‌شود.

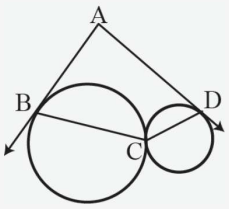
- اگر بخواهیم طول کوتاه‌ترین وتر را حساب کنیم

دایره با مرکز O و شعاع R، و نقطهٔ P در فاصلهٔ $d = OP$

کوتاه‌ترین وتر طولش برابر است با: $L = ۲\sqrt{R^۲ - d^۲}$



7. در شکل زیر مجموع زوایای ABC و ADC برابر با ۱۵۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ A چقدر است؟



۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۷۵°

۴) ۶۰°

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | مفهومی، محاسباتی

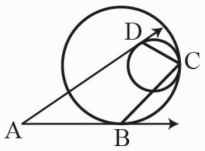
نکته در شکل بالا $\hat{A} + ۲B\hat{C}D = ۳۶۰^\circ$ است.

بنابراین داریم:

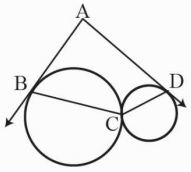
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + B\hat{C}D = ۳۶۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۲۱۰^\circ \\ \hat{A} + ۲B\hat{C}D = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \ , \ B\hat{C}D = ۱۵۰^\circ$$

درسنامه:

دو شکل و رابطه‌های معروف زیر را در نظر داشته باشید:



$\hat{A}+2\hat{BCD}=180$



$\hat{A}+2\hat{BCD}=360$

8. مجموع بیشترین و کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,1)$ از دایرهٔ C به معادلهٔ $2x^2+2y^2-4x-8y+2=0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ سخت | مفهومی، محاسباتی

ابتدا بررسی می‌کنیم که نقطهٔ $A(2,1)$ چه وضعیتی نسبت به دایره C دارد.

$$2x^2+2y^2-4x-8y+2=0 \xrightarrow{\div 2} x^2+y^2-2x-4y+1=0 \xrightarrow{(2,1)} 4+1-4-4+1=-2<0$$

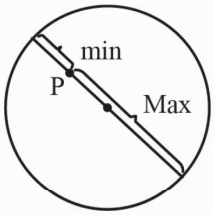
بنابراین نقطهٔ $A(2,1)$ درون دایره است. پس مجموع کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ A برابر با $2R$ است که معادل است با:

$$2R=2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2-4(1)}\right)=\sqrt{16}=4$$

درسنامه:

اگر نقطهٔ انتخابی روی محیط دایره باشد، کم‌ترین فاصله به نزدیک‌ترین نقطه و بیشترین فاصله به نقطهٔ مقابل روی دایره خواهد بود. اما برای هر نقطه روی محیط دایره، مجموع کم‌ترین و بیشترین فاصله همیشه برابر با قطر دایره یعنی $2R$ می‌شود.

بنابراین:



کم‌ترین فاصله + بیشترین فاصله $= 2R$

پاسخ 16 بهمن ماراتون

1. ذوزنقه محاطی ABCD مفروض است. $(AB \parallel CD)$ اگر $\hat{B}=۱۳۵^\circ$، $AB=۵/۴$ و $DC=۱۰$ باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده کدام است؟

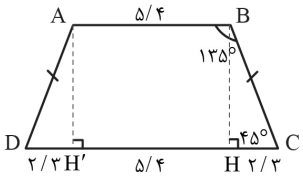
۱) ۲/۳ ۲) ۳/۷ ۳) ۴/۶ ۴) ۵/۴

پاسخ: گزینه ۱ ساده - درک و فهم | چهارضلعی‌های محاطی

نکته اگر یک ذوزنقه محاطی باشد آن‌گاه متساوی‌الساقین است و برعکس.

نکته اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، زوایای روبرو مکمل یکدیگرند و برعکس.

حال اگر از نقطه B عمود BH و از A عمود AH' را رسم کنیم، وضعیت شکل به صورت مقابل درمی‌آید:



$$DH'=CH=۲/۳$$

چون مثلث $\overset{\Delta}{BHC}$ و $\overset{\Delta}{AH'D}$ متساوی‌الساقین می‌شوند $(\hat{D}=\hat{C}=۴۵^\circ)$، لذا طول $BH=AH'=CH=DH'=۲/۳$.

2. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۱۸ و اندازه محیط آن برابر ۱۲ است. مقدار عبارت $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ ساده - دانش | روابط شعاع دایره محاطی

درسنامه:

در یکی از تمارین انتهای فصل یک هندسه یازدهم ثابت می‌کنیم که $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$. در این‌جا r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث و h_a، h_b و h_c ارتفاع‌های مثلث هستند.

اما بد نیست که اثبات این رابطه را نیز مرور کنیم:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{a.h_a}{۲} \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\ ,\ h_b=\frac{۲S}{b}\ ,\ h_c=\frac{۲S}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{\frac{۲S}{a}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{b}}+\frac{۱}{\frac{۲S}{c}}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲P}{۲S}=\frac{P}{S}$$

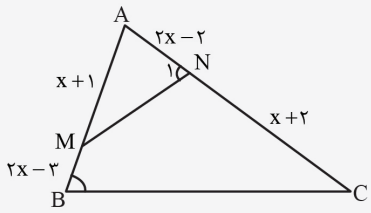
می‌دانیم که اندازه شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$r=\frac{S}{P} \Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}$$

بنابراین با توجه به این‌که $S=۱۸$ و $۲P=۱۲$:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۱۸}{۶}=۳ \Rightarrow \frac{۱}{r}=\frac{۱}{۳}$$

3. در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{N}_1$ و چهارضلعی MNCB محیطی است. طول ضلع MN کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ — متوسط - درک و فهم | چهارضلعی محیطی و تشابه

ترکیب برای حل این مسئله باید به دو موضوع تشابه و چهارضلعی‌های محیطی مسلط باشید.

ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{A}\\ \hat{B}=\hat{N}_1\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{نوشتن نسبت تشابه}} \underbrace{\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}}=\frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۱}{۳x}=\frac{۲x-۲}{۳x-۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (۳x-۲)(x+۱)=(۲x-۲)\times ۳x$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۳x-۲x-۲=۶x^۲-۶x \Rightarrow ۳x^۲-۷x+۲=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۴۹-۲۴}}{۶} \Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۲۵}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲ \ \checkmark \\ x_۲=\frac{۱}{۳} \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

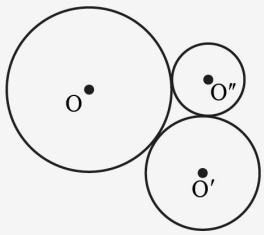
تذکر به ازای $x=\frac{۱}{۳}$، مقدار ۲x - ۲ و ۳x - ۲ منفی می‌شود و موردقبول نیست.

$$x=۲ \Rightarrow MB=۱ \ , \ NC=۴ \ , \ AM=۳ \ , \ AC=۶$$

نکته در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبه‌رو با یکدیگر برابرند و برعکس.

$$\left.\begin{matrix} MB+NC=۱+۴=۵ \Rightarrow MN+BC=۵ \\ \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۲}{\cancel{۶}}} \Rightarrow ۲MN=BC \end{matrix}\right\} MN+۲MN=۵ \Rightarrow ۳MN=۵ \Rightarrow MN=\frac{۵}{۳}$$

4. سه دایره $C(O,10)$، $C'(O',3)$ و $C''(O'',2)$ مطابق شکل بر یکدیگر مماسند. اندازه شعاع دایره محاطی داخلی مثلث $OO'O''$ کدام است؟



۱) ۲

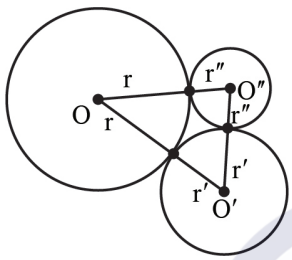
۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ متوسط - درک و فهم | شعاع دایره محاطی مثلث

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:



$r+r''=۱۰+۲=۱۲$

$r+r'=۱۰+۳=۱۳$

$r'+r''=۳+۲=۵$

نکته می‌دانیم مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۲ و ۵ یک مثلث قائم‌الزاویه است. **چرا؟** چون رابطه فیثاغورس بین اعداد برقرار است.

$۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲$

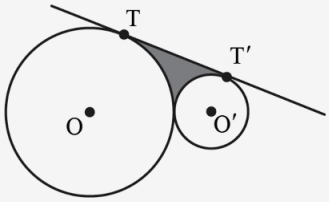
$۱۶۹=۱۴۴+۲۵$ ✓

با توجه به این‌که $r=\frac{S}{P}$:

$S=\frac{۵\times۱۲}{۲}=۳۰$

$P=\frac{۱۳+۱۲+۵}{۲}=۱۵ \Rightarrow r=\frac{۳۰}{۱۵}=۲$

5. دو دایره $C(O,۳)$ و $C'(O',۱)$ بر یکدیگر مماس هستند. مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}-\frac{۳\pi}{۲}$

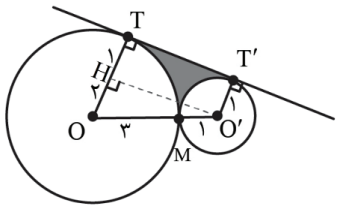
۲) $۴\sqrt{۳}-\frac{۱۱\pi}{۶}$

۳) $۲\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$

۴) $۲\sqrt{۳}-\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ سخت - کاربردی | مماس مشترک

نکته طول مماس مشترک خارجی از رابطه $TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$ به دست می‌آید. در این رابطه d خط‌المرکزین است.



$$TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{4^2-(3-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

می‌دانیم OT و $O'T'$ بر TT' عمود هستند.

برای به دست آوردن مساحت قسمت‌های هاشورخورده، ابتدا مساحت ذوزنقه قائم‌الزاویه $OTT'O'$ را به دست آورده و سپس دو قطاع دایره را از آن کم می‌کنیم.

برای به دست آوردن مساحت دو قطاع لازم است اندازه زوایای O و O' را بدانیم. بدین منظور از O' عمود $O'H$ را بر OT رسم می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{OHO'}: OH=2\ ,\ OO'=4 \Rightarrow \widehat{OO'H}=30^\circ \Rightarrow \widehat{HOO'}=60^\circ$$

نکته هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است و برعکس.

$$1)\ C': \widehat{OO'T'}=\widehat{OO'H}+\widehat{HO'T'}=30^\circ+90^\circ=120^\circ \Rightarrow S_{\text{قطاع }MO'T'}=\frac{1}{3}\pi r'^2=\frac{\pi}{3} \qquad (1)$$

$$2)\ C: \widehat{TOO'}=60^\circ \Rightarrow S_{\text{قطاع }TOM}=\frac{1}{6}\pi r^2=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2} \qquad (2)$$

$$S_{\text{هاشورخورده}}=S_{TOO'T'}-S_{(1)}-S_{(2)}=\frac{1}{2}(1+3)\times 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}=4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{6}$$

۱- مجموعهٔ A دارای m عضو است. یک بار p عضو جدید به این مجموعه اضافه کرده و آن را B می‌نامیم. بار دیگر p عضو از اعضای A حذف کرده و آن را C می‌نامیم. اگر اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های توانی B و C، ۶۳ برابر تعداد زیرمجموعه‌های C باشد، مقدار p برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- کدام یک از گزاره‌های سوری زیر درست است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \exists y\in\mathbb{R}\ ;\ xy<x$ ۲) $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \exists y\in\mathbb{R}\ ;\ x^{۲}<y$

۳) $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \exists y\in\mathbb{R}\ ;\ x^{۲}-y^{۲}=۱$ ۴) $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \exists y\in\mathbb{R}\ ;\ x^{۲}+y^{۲}=۱$

۳- به چند طریق می‌توان دو زیرمجموعهٔ A و B از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ انتخاب کرد به گونه‌ای که $A\subseteq B$ باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۱ ۳) ۹۲ ۴) ۱۲۰

۴- اگر گزارهٔ $p\Rightarrow(p\wedge\sim q)$ درست باشد، آن‌گاه کدام گزاره با گزارهٔ $p\wedge(p\Leftrightarrow q)$ هم‌ارزش است؟

۱) $p\vee\sim q$ ۲) $q\Rightarrow p$ ۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $p\wedge q$

۵- مجموعه جواب کدام گزاره‌نما، شامل مثال نقض برای گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x-۳=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۲}$ می‌باشد؟

۱) $۲x^{۲}-۳۲=۰\quad(D=\mathbb{W})$ ۲) x مضرب ۴ است $(D=\mathbb{N})$

۳) $۲^{n}\le n!\quad(D=\mathbb{W})$ ۴) $x(x+۱)\le۱۰\quad(D=\mathbb{N})$

۶- برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $A-C=B-A=\varnothing$، آن‌گاه کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $C'\subseteq B'$ ۲) $B'\subseteq C'$ ۳) $B\cap C=\varnothing$ ۴) $C-B=\varnothing$

۷- گزارهٔ $[\sim(\sim p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)]\vee\sim q$ با کدام گزارهٔ زیر، هم‌ارزش است؟

۱) $p\Rightarrow\sim q$ ۲) $\sim p\Rightarrow q$ ۳) $q\Rightarrow p$ ۴) $\sim q\Rightarrow\sim p$

۸- گزارهٔ $[(p\Rightarrow q)\wedge((p\Rightarrow q)\Rightarrow q)]\Rightarrow\sim p\vee q$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) T ۲) $\sim p\vee q$ ۳) $p\wedge q$ ۴) $p\vee q$

۹- گزاره‌های p و q به صورت مقابل تعریف شده‌اند:
$\begin{cases}p:\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\le x^{۲}\\ q:\text{برخی از اعداد فرد، اول نیستند.}\end{cases}$

کدام گزینه هم‌ارز نقیض گزارهٔ $p\Rightarrow q$ است؟ (O مجموعه اعداد فرد و P مجموعه اعداد اول است.)

۱) $(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x>x^{۲})\wedge(\forall x\in O\ ;\ x\notin P)$ ۲) $(\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\le x^{۲})\wedge(\forall x\in O\ ;\ x\in P)$

۳) $(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x>x^{۲})\Rightarrow(\forall x\in O\ ;\ x\notin P)$ ۴) $(\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ x>x^{۲})\vee(\exists x\in O\ ;\ x\notin P)$

۱۰- اگر A، B، C و D چهار مجموعهٔ دلخواه باشند به گونه‌ای که $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر ممکن است نادرست باشد؟

۱) $A\cap D\subseteq B\cup C$ ۲) $A-B\subseteq C-D$ ۳) $A-D\subseteq B-C$ ۴) $A-C\subseteq B-D$

۱- برای دو مجموعهٔ A و B، اگر رابطهٔ $A\cup B\subseteq A'\cap B$ برقرار باشد، آن‌گاه کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $A=\varnothing$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=U$ ۴) $A'=B$

۲- مجموعهٔ $[(A\cup B)-B)\cup(A\cap(A\cup B))']\cap A'$ همواره برابر کدام است؟

۱) B ۲) B' ۳) A' ۴) A

۳- سه مجموعهٔ A، B و C طوری مفروض‌اند که $B\subseteq C$، متمم مجموعهٔ $[(B\cup A)\cup(B-A)]\cup[(C-B)\cup A]$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) C ۳) $C\cup A$ ۴) $A'\cap C'$

۴- اگر $A=\{1,3,5,7\}$، $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z},|x-1|\leq 2\}$ و $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z},x^3-x=0\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A-C)\times(B\cap C)$ دارای چند زیرمجموعه است؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۶۴ ۴) ۵۱۲

۵- مجموعهٔ $(A\cap B')'\cup(A'\cup(A\cap B'))$، ۶ عضو، مجموعهٔ $B\cap(A'\cup B)$، ۵ عضو و $(B\times A)\cup(A\times B)$، ۵۶ عضو دارد، مجموعه‌های A و B چند عضو مشترک دارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶- در فضای نمونه‌ای تولد سه فرزند، پیشامدهای A، B و C را به ترتیب «حداقل دو فرزند پسر باشد»، «جنسیت فرزند اول و دوم متفاوت باشد» و «فرزند اول دختر باشد» تعریف می‌کنیم. کدام دو پیشامد ناسازگار هستند؟

۱) $C-A$ و B ۲) $B-C$ و A ۳) $A-B$ و C ۴) $A\cap B$ و C

۷- از مجموعهٔ $\{1,2,3,\ldots,300\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد نه مضرب ۵ و نه مضرب ۷ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{103}{150}$ ۲) $\frac{19}{30}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{31}{50}$

۸- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونهٔ S باشند و $6P(B-A)=15P(A\cap B)=10P(A-B)$ و $P(A'\cap B')=\frac{1}{6}$، مقدار $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{7}{15}$ ۴) $\frac{4}{15}$

۹- در یک آزمایش تصادفی $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a)$، $P(b)$، $P(c)$، $P(d)$ و $P(e)$ با همین ترتیب، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲ باشند، احتمال وقوع پیشامد $\{a,d\}$ چقدر است؟

۱) $\frac{5}{31}$ ۲) $\frac{9}{31}$ ۳) $\frac{17}{31}$ ۴) $\frac{10}{31}$

۱۰- در یک تجربهٔ تصادفی با فضای نمونه‌ای $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_6\}$، $P(a_1)=2P(a_2)$ و برای هر $1\leq n\leq 4$ داریم $P(a_{n+2})=P(a_n)+P(a_{n+1})$. احتمال وقوع پیشامد $\{a_2,a_4,a_6\}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{28}$ ۲) $\frac{21}{32}$ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{9}{14}$

۱- آرمان و بابک هر کدام به ترتیب، با احتمال‌های $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$ برای دیدن یک فیلم به سینما می‌روند. اگر آرمان به سینما رفته باشد، بابک با احتمال $\frac{۱}{۱۰}$ به سینما می‌رود. اگر آرمان به سینما نرفته باشد، با چه احتمالی بابک نیز به سینما نرفته است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۹}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲- دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع دو عدد رو شده اول باشد، در صورتی که بدانیم هر دو عدد رو شده اول هستند، چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳- ۶۰ درصد جمعیت یک کشور را مردان و بقیه را زنان تشکیل می‌دهند، ۳۰ درصد مردان و ۷۰ درصد زنان باسوادند، شخصی را به تصادف از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگر این شخص باسواد باشد، احتمال آن‌که مرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۳}$ ۳) $\frac{۹}{۲۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳۳}$

۴- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=\frac{۱}{۲}$ و $P(B-A)=\frac{۵}{۱۶}$ باشند، حاصل $\frac{P(A\cup B)}{P(B')}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

۵- تاسی را سه مرتبه پرتاب کرده‌ایم. اگر عدد روشده در پرتاب اول بزرگ‌تر از پرتاب دوم و در پرتاب دوم بزرگ‌تر از پرتاب سوم باشد، احتمال این‌که مجموع سه عدد ظاهر شده برابر ۱۵ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۰}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۶- اگر $P(B-A)=۰/۳$ و $P(A\mid A\cup B)=۰/۲۵$، آن‌گاه $P(A)$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۷- از یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، سه مهره به تصادف به‌طور متوالی و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده از سه رنگ متفاوت است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸- در پرتاب یک تاس، اگر عددی مضرب ۳ ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۳ تیر رها کند و در غیر این صورت ۲ تیر پرتاب می‌کند. اگر احتمال اصابت هر کدام از تیرهای رها شده برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، با پرتاب یک بار تاس با کدام احتمال حداقل یکی از تیرها به هدف اصابت می‌کند؟

۱) $\frac{۲۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۰۹}{۱۲۵}$ ۳) $\frac{۱۱۳}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۵}$

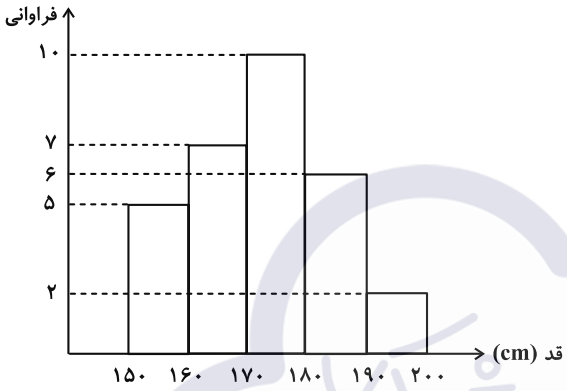
۹- دانش‌آموزی به ۶ سوال سه گزینه‌ای به‌طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال این‌که بتواند دقیقاً به ۳ سوال پاسخ صحیح بدهد چند برابر احتمال آن است که دقیقاً به ۴ سوال پاسخ صحیح داده باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۰- کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سبز، ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ قرمز است. از این کیسه سه مهره به‌طور متوالی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های اول و سوم یکسان است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲۶}$ ۴) $\frac{۵۵}{۲۵۲}$

۱- نمودار بافت نگاشت زیر مربوط به قد دانش‌آموزان یک کلاس می‌باشد. ۵ دانش‌آموز با قدهای ۱۵۳، ۱۶۲، ۱۷۱، ۱۷۳ و ۱۹۲ سانتی‌متر را از میان آن‌ها حذف می‌کنیم، زاویهٔ مربوط به گروه وسط در نمودار دایره‌ای چه تغییری می‌کند؟



۱) ۴/۸ درجه کم می‌شود.

۲) ۴/۸ درجه زیاد می‌شود.

۳) ۲/۴ درجه زیاد می‌شود.

۴) ۲/۴ درجه کم می‌شود.

۲- در ۳۰ دادهٔ آماری، میانگین n تا از آن‌ها برابر ۱۲ و میانگین بقیهٔ داده‌ها برابر ۱۰ است. اگر میانگین کل داده‌ها برابر ۱۱/۶ باشد کدام گزینه در مورد n درست است؟

۱) عدد اول ۲) مربع کامل ۳) مضرب ۴ ۴) مضرب ۵

۳- تفاضل ۶ دادهٔ آماری از میانگین‌شان برابر $-۴ , a , b , -۲ , -۱ , ۰$ است. اگر انحراف معیار این داده‌ها برابر $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، مقدار $(a-b)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۴- مجموع ۱۰ دادهٔ آماری $x_۱ , x_۲ , ... , x_{۱۰}$ برابر ۱۲۰ می‌باشد. داده‌های $i = ۱ , ۲ , ... , ۱۰$, $u_i = kx_i + \frac{۱}{k}$ را در نظر می‌گیریم.

اگر ضریب تغییرات داده‌های جدید $\frac{۳}{۴}$ ضریب تغییرات داده‌های اولیه باشد، مقدار مثبت k کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۵- اگر به هر یک از داده‌های زیر ۴ واحد اضافه کرده و سپس آن‌ها را نصف کنیم، در نمودار جعبه‌ای داده‌های جدید، واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟ ۲۰،۱۲،۳،۹،۱۱،۱۴،۲۵،۱۳،۲۱،۲۷،۱۰

۱) ۴/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

۶- شش عدد داریم که اگر یکی از اعداد را حذف کنیم، میانگین تغییری نمی‌کند ولی واریانس اعداد باقی‌مانده ۰/۲ بیشتر می‌شود. واریانس اعداد اولیه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۸

۷- اگر a و b دو عدد حقیقی با شرط $a+b=100$ باشند، اختلاف میان حداکثر و حداقل مقدار ممکن برای میانهٔ داده‌های متمایز $a-3 , b-2 , a+3 , b+2$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۸- واریانس ۱۱ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۶،۱۶،۲۴ را به آن‌ها اضافه کنیم و میانگین تغییری نکند، ضریب تغییرات این ۱۴ دادهٔ جدید چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{11}$ ۲) $\frac{1}{11}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{4}{11}$

۹- در ۳۶ دادهٔ متمایز، میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و همچنین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم به ترتیب برابر a و $a+7$ است. اگر میانگین کل داده‌ها برابر ۲۷/۵ و میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر $a+8$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۰- داده‌های $5,1,3,5,3,x,1,6$ فاقد مد هستند. اگر به تعداد $(3-2x)$، دادهٔ ۴ به آن‌ها اضافه کنیم، دامنهٔ میان چارکی داده‌ها در حالت جدید با کدام برابر است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

آزمون آمار و احتمال ۱۴ آذر ۱۴۰۴

۱- کدام گزینه درست است؟

۱) مقدار آماره، هرگز با مقدار پارامتر برابر نیست.

۲) آماره، مشخصهٔ عددی است که توصیف کنندهٔ جنبهٔ خاصی از کل جامعه است.

۳) پارامتر جامعه را می‌توان با سرشماری به دست آورد.

۴) مقدار آماره، ثابت است و تغییر نمی‌کند.

۲- می‌خواهیم به روش سیستماتیک از اعداد ۸ تا ۸۲، تعداد ۱۵ عدد را انتخاب کنیم. اگر عدد ۱۱ به صورت تصادفی از طبقهٔ اول انتخاب شده باشد، یازدهمین عددی که انتخاب می‌شود، کدام است؟

۱) ۵۱ ۲) ۵۶ ۳) ۶۱ ۴) ۶۶

۳- در شهرستان سراب، ۲۰۰ کلاس پایهٔ دوازدهم وجود داردکه متناسب با تعداد دانش‌آموزان موجود در هر کلاس به صورت زیر دسته‌بندی شده‌اند. از بین تمام دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم آن شهرستان، دانش‌آموزی به تصادف انتخاب می‌شود. احتمال آن که این دانش‌آموز عضوی از کلاس ۲۴ نفری باشد، چند برابر آن است که عضوی از یک کلاس ۳۲ نفری باشد؟

تعداد دانش‌آموز	۲۰	۲۴	۲۵	۳۰	۳۲
تعداد کلاس	۶۶	۲۰	۴۰	۲۴	۵۰

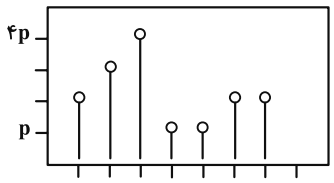
۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳

۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۲۵

۴- در جامعه‌ای با هفت عضو ۳،۴،۸،۸،۱۰،۱۱،۱۲، احتمال آن که نمونه‌ای دو عضوی، آماره را درست برابر پارامتر میانگین جامعه برآورد کند، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۲۱}$

۵- در جامعه‌ای با اعضای $1,3,3,5,5,m$، جدول احتمال برای میانگین نمونه‌ای به اندازهٔ ۲ به صورت زیر است. مقدار m کدام است؟



۱) ۵

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۱

۶- از بین اعداد $2,4,6,\ldots,2n$، اعداد $2,8,16,10$ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای n به کمک میانگین کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷- برای برآورد میانگین جامعه‌ای از دو نمونهٔ مختلف استفاده کرده‌ایم. اگر تعداد اعضای نمونهٔ دوم ۱۲۸ واحد بیشتر از نمونهٔ اول و انحراف معیار برآورد میانگین توسط نمونهٔ دوم $\frac{۱}{۳}$ نمونهٔ اول باشد، مجموع تعداد اعضای نمونهٔ اول و دوم کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۶

۸- از بین فیلترهای هوای تولیدی یک کارگاه، چهار نمونه به تصادف انتخاب شده و طول عمر مفید آن‌ها در مصرف (به ماه) ثبت شده است که عبارتند از: ۰،۱،۳،۴؛ اگر انحراف معیار جامعه برابر انحراف معیار نمونهٔ انتخابی باشد، بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین طول عمر مفید این محصول شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹- اگر برآورد بازه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای با انحراف معیار ۱۹/۲۵ به صورت $[۴۰/۵, ۴۷/۵]$ باشد، مجموع اعضای نمونه کدام است؟

۱) ۵۴۴۵ ۲) ۵۳۲۴ ۳) ۴۲۸ ۴) ۴۸۴

۱۰- از جامعه‌ای با واریانس ۳/۲۴ نمونهٔ $\{1,2,3,0,1,1,2,2,0,3\}$ انتخاب شده است. اگر بازهٔ $[a,b]$ بازهٔ اطمینان بیش از ٪۹۵ برای میانگین جامعه باشد، حاصل $2a+b$ کدام است؟ $(\sqrt{10} \simeq ۳/۲)$

۱) ۳ ۲) $\frac{۲۷}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۸}$

۱- اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند، کدام مورد دربارهٔ ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ درست است؟

۱) همواره درست است.
۲) معادل ارزش گزارهٔ p است.
۳) معادل ارزش گزارهٔ $p \vee q$ است.
۴) معادل ارزش گزارهٔ q است.

۲- کدام گزارهٔ سوری زیر درست است؟ (P مجموعهٔ اعداد اول است و $k \in Z$)

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; \cot x = \frac{1}{\tan x}$
۲) $\forall x \in \mathbb{Z}; x(x+3) = 2k$
۳) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0$
۴) $\forall x \in P; x = 2k + 1$

۳- مجموعهٔ $[(A - B') \cup [(A \cap B) \cap ((A - B) \cup B')]$ همواره برابر کدام است؟ (U مجموعهٔ مرجع است)

۱) B'
۲) $A - B$
۳) $A \cap B$
۴) U

۴- مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 70\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که بزرگ‌ترین عضو آن بزرگ‌تر از ۴ باشد؟

۱) ۱۸۰
۲) ۲۱۶
۳) ۲۲۴
۴) ۲۴۰

۵- در یک تیم والیبال که شامل ۹ بازیکن است، قد علی از مازیار بلندتر و از قد کامران کوتاه‌تر است. اگر بدانیم قد هیچ دو بازیکنی مساوی نیست، با چه احتمالی علی در بین اعضای تیم، از نظر بلندی قد دارای رتبهٔ سوم است؟

۱) $\frac{1}{9}$
۲) $\frac{1}{7}$
۳) $\frac{2}{15}$
۴) $\frac{3}{20}$

۶- جعبه‌ای محتوی ۶ مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ است. یک مهره به‌تصادف از جعبه خارج می‌کنیم و پس از رؤیت شمارهٔ آن، آن مهره را به همراه مهره‌های با شمارهٔ بزرگ‌تر از آن کنار می‌گذاریم و سپس مهرهٔ دیگری در صورت امکان از جعبه انتخاب می‌کنیم. اگر شمارهٔ دومین مهرهٔ خارج شدهٔ تصادفی ۳ باشد، با کدام احتمال شمارهٔ اولین مهرهٔ خارج شده ۵ بوده است؟

۱) $\frac{۱۲}{۴۷}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴۷}$ ۳) $\frac{۱۸}{۴۷}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴۷}$

۷- در داده‌های ۱۳،۱۷،۹،۱۲،۱۷،۲،۷،۸،۲،۷،۱،۴،۷، اختلاف بین مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و مجموع داده‌های کوچک‌تر از مد کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۸- ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان یک کلاس، ۴ سال بعد، ۲۵ درصد کمتر از ضریب تغییرات سن فعلی آنها است. میانگین سن فعلی دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹- بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای با استفاده از نمونه‌ای از آن جامعه به اندازهٔ ۱۰۰، به‌صورت [۱۲ / ۶,۱۳ / ۲] به‌دست آمده است. انحراف معیار این جامعه کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۱۰- در یک نمونه‌گیری تصادفی از اعداد ۱ , ۲ , ... , n، اگر اعداد ۱ , ۱۷ , ۱۸ , ۱۹ , ۲۰ انتخاب شده باشند، آن‌گاه اختلاف برآورد n به کمک پارامتر میانه و میانگین چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

آزمون آمار و احتمال ۲۸ آذر ۱۴۰۴

۱- اگر گزارهٔ $[p \Leftrightarrow (r \vee s)] \Rightarrow (p \vee q)$ نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ با کدام گزاره برابر است؟

۱) $\sim s \vee r$ ۲) $s \vee \sim r$ ۳) $\sim s \wedge \sim r$ ۴) $s \wedge r$

۲- اگر هم‌ارزی $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow \sim q \equiv p$ برقرار باشد آنگاه ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $p \wedge q$ ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \wedge q$ ۴) $\sim p \wedge \sim q$

۳- گزارهٔ $[\sim p \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge p)] \sim$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $p \wedge \sim q$ ۲) $\sim p \wedge q$ ۳) $p \wedge q$ ۴) $\sim p \wedge \sim q$

۴- عکس نقیض گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ کدام است؟

۱) $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ ۲) $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

۳) $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ ۴) $\sim (p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

۵- اگر $A = \{1,2,3,...,m\}$ و $B = \{1,2,3,...,n\}$ و ارزش هر دو گزارهٔ زیر درست باشد، حداکثر مقدار $5m - n$ کدام است؟

$$\begin{cases} \forall x \in A \; ; \; x^2 - 23 < 0 \\ \exists x \in B \; ; \; \frac{7x+2}{11} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۶- ارزش گزارهٔ «$\forall x \in (a, +\infty) : x + \frac{1}{x-3} \geq b$» درست است. اگر کمترین مقدار a و بیشترین مقدار b را به ترتیب m و n بنامیم، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۷- کدام گزاره را می‌توان در جدول مقابل به جای q قرار داد؟ (مجموعه اعداد اول را با $|P$ نمایش می‌دهیم.)

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \wedge q$
		درست	نادرست

۱) $\exists x \in \mathbb{R} \; ; \; \sim (\frac{6x+1}{5} = -1)$ ۲) $\forall x \in \mathbb{N} \; ; \; \sim (2^x + 1 \in |P)$

۳) $\sim (\forall x \in \mathbb{N} \; ; \; 2^{2^x} - 1 \in |P)$ ۴) $\sim (\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \frac{3x^2 - 12}{x+2} = 3x - 6)$

۸- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \; , \; \frac{36}{x} \in \mathbb{N}\}$ چند واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B = \{x \mid x \in \{1,2,...,10\} \; , \; \frac{x-1}{3} \in \mathbb{N}\}$ است؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۴۹۶ ۳) ۴۴۸ ۴) ۲۲۴

۹- می‌دانیم اعداد ۱ و ۲ عضو مجموعهٔ A هستند. اگر تعداد کل زیرمجموعه‌های A، ۹۶ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌هایی باشد که شامل دو عضو ۱ و ۲ هستند، آنگاه مجموعه توانی A شامل چند مجموعهٔ ۳ عضوی است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۵ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

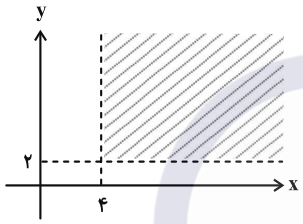
۱۰- اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{2,4,6,8\}$، آنگاه مجموعهٔ $A \cup B$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی مانند C دارد که تساوی $n(A \cap C) = n(B \cap C)$ برقرار باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۴

۱- اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، مجموعهٔ $(A-B')\cup[(A\cup B)\cap((A-B)\cup B')]$ برابر کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) B ۴) A

۲- شکل زیر، نمودار ضرب دکارتی $A\times B$ است، مجموعهٔ $\mathbb{N}^2\cap(B'\times A')$، دارای چند عضو است؟ ($\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع است.)



۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۲

۳- اگر برای دو مجموعهٔ A و B، رابطهٔ $(A-B)\cup(B-A)=A'\cup B'$ برقرار باشد، در این صورت کدام رابطهٔ زیر همواره برقرار است؟

۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $A'\cap B'=\varnothing$ ۳) $A=B'$ ۴) $A=B$

۴- مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۲,۳,۴,۵\}$، $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۱,۲,۶,۷,۸\}$ مفروض‌اند. تعداد اعضای مجموعهٔ $(A\times C)-(B\times D)$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۵- عددی را به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخابی فقط دارای سه مقسوم‌علیه طبیعی یا مربع کامل باشد، برابر کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۶- در پرتاب دو تاس با یکدیگر، اگر پیشامد آمدن «مجموع زوج» را A و پیشامد آمدن «حداقل یک عدد اول» را B بنامیم، آن‌گاه احتمال رخ دادن پیشامد $A-B$ کدام خواهد شد؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۷- برای دو پیشامد A و B، اگر رابطهٔ $P(A'\cap B')=۲P(A)=۳P(B-A)$ برقرار باشد، آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

۸- عددی به تصادف از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,...,۲۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال، این عدد دقیقاً بر یکی از دو عدد ۸ یا ۱۲ بخش‌پذیر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۳۳}{۲۰۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۲۰۰}$

۹- تاس غیرهمگنی را به گونه‌ای ساخته‌ایم که $P(۱)=\frac{۱}{۱۰}$ و احتمال آمدن اعداد ۱ تا ۶ با همین ترتیب، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. هرگاه این تاس را پرتاب کنیم، احتمال ظاهر شدن عدد کمتر از ۳ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷۵}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۵۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۷۵}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۱۰- اگر در یک آزمایش تصادفی، مجموعهٔ $S=\{a_۱,a_۲,...,a_۹\}$ فضای نمونه‌ای و برای هر $۱\le k\le ۹$، $P(a_k)=\frac{a}{k^۲+k}$ باشد، احتمال وقوع پیشامد $A=\{a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۳) $\frac{۹}{۲۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۱- از ظرفی شامل ۴ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی، دو مهره خارج می‌کنیم. اگر دو مهرهٔ خارج شده همرنگ باشند، با چه احتمالی قرمز هستند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۲۰}$

۲- اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$ باشند، حاصل $P(A'|B').P(B'|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۹}{۷۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۷۲}$

۳- به دلیل آلودگی هوای تهران در بهمن ماه، وزات بهداشت با احتمال ۰/۴ و وزارت آموزش و پرورش با احتمال ۰/۳، یک روز را تعطیل اعلام می‌کنند. اگر وزارت بهداشت روزی را تعطیل اعلام کند، آموزش و پرورش هم با احتمال ۰/۵ همان روز را تعطیل اعلام می‌کند. می‌دانیم روز شنبه بیست و پنجم بهمن ماه را وزارت بهداشت تعطیل اعلام نکرده است، با کدام احتمال آموزش و پرورش هم این روز را تعطیل اعلام نمی‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۷}{۱۰}$

۴- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع دو تاس عددی یک رقمی باشد، ۴ سکه و در غیر این صورت ۶ سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال تعداد رو و پشت ظاهر شده در پرتاب سکه‌ها یکسان است؟

۱) $\frac{۳۵}{۹۶}$ ۲) $\frac{۳۱}{۹۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴۸}$

۵- یک خانوادهٔ ۴ فرزندی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اگر یکی از فرزندان را انتخاب کنیم و ببینیم که خواهر کوچک‌تر از خود دارد، با کدام احتمال، او بزرگ‌ترین فرزند خانواده است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۷}$

۶- در یک کارخانهٔ تولیدی، نسبت تولید دستگاه A به دستگاه B، ۱۱ به ۹ است. می‌دانیم احتمال معیوب بودن کالای محصول دستگاه B، ۲ درصد بیشتر از احتمال معیوب بودن کالای محصول دستگاه A است و همچنین اگر کالایی به تصادف انتخاب کنیم و ببینیم که معیوب باشد به احتمال $\frac{۱۱}{۲۶}$ محصول دستگاه A است. احتمال معیوب بودن کالای دستگاه B کدام است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

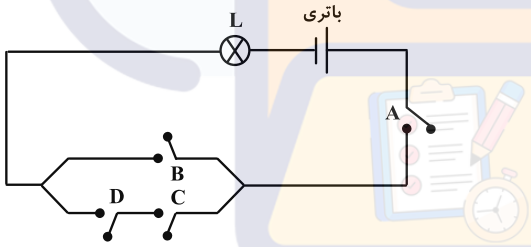
۷- فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی برابر $S=\{a,b,c,d\}$ است. اگر $P(a)=\frac{۱}{۴}$ و $P(d)=\frac{۲}{۳}$ و پیشامدهای $\{a,d\}$ و $\{a,b\}$ مستقل باشند، حاصل $P(b)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۴۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲۲}$

۸- در پرتاب متوالی یک تاس، احتمال آن که در پنجمین پرتاب، برای دومین بار عدد ۳ رو شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۱۲۵}{۱۹۴۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۸۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۸۸}$ ۴) $\frac{۱۲۵}{۱۹۴۴}$

۹- در شکل زیر، احتمال باز بودن هر کلید $\frac{۳}{۴}$ است. احتمال روشن شدن لامپ L چقدر است؟



۱) $\frac{۹}{۶۴}$

۲) $\frac{۷}{۶۴}$

۳) $\frac{۱۹}{۲۵۶}$

۴) $\frac{۱۷}{۲۵۶}$

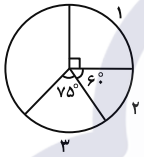
۱۰- کیسه‌ای شامل ۳ مهرهٔ آبی، ۲ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ زرد است. بار اول بدون جای‌گذاری و بار دوم با جای‌گذاری دو مهره به‌طور متوالی از این کیسه خارج می‌کنیم. احتمال هم‌رنگ بودن دو مهرهٔ خارج شده در بار اول چند برابر همین احتمال در بار دوم است؟

۱) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۴۸}{۶۵}$ ۳) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۶}{۶۵}$

۱- داده‌های $x_1 , x_2 , ... , x_n$ با میانگین ۴ و ضریب تغییرات $\frac{۱}{۲}$ مفروض است. اگر سه دادهٔ ۴، به این داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ خواهد شد، تعداد داده‌های اولیه کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲- در یک آزمون کلاسی نمرات دانش‌آموزان از ۱ تا ۵ ثبت شده است. در نمودار دایره‌ای این نمرات، زاویهٔ مرکزی متناظر با نمرات ۴ و ۵ مشخص نشده، ولی می‌دانیم میانگین نمرات کلاس برابر $\frac{۱۷}{۶}$ است. تعداد نمرات ۵ چه کسری از تعداد نمرات ۴ است؟

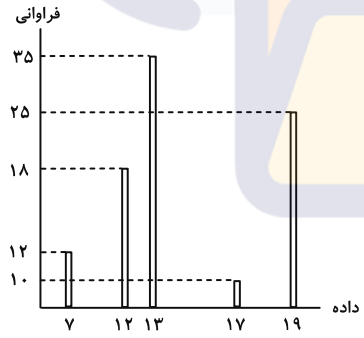


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳- اعداد طبیعی a , b , c , d , e , f شش جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ هستند. اعداد دنباله را دوبه‌دو انتخاب کرده و قدرمطلق تفاضل آن‌ها را جایگزین می‌کنیم به گونه‌ای که به یک دنبالهٔ سه عضوی بدون عضو تکراری با کمترین میانگین برسیم. اگر میانگین دنبالهٔ دوم، $\frac{۸}{۳}$ واحد کمتر از میانگین دنبالهٔ اول باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۴- با توجه به نمودار میله‌ای زیر، مجموع میانگین و مد و میانه داده‌ها کدام است؟



۱) ۳۸
۲) ۳۹
۳) ۴۰
۴) ۴۱

۵- اگر به یک نمونه از داده‌ها با میانگین $\bar{x}$، ۳ دادهٔ مساوی $\bar{x}$ اضافه شود، واریانس داده‌ها برابر با ۲۷ می‌شود و اگر ۳ دادهٔ مساوی $\bar{x}$ از نمونهٔ اولیه حذف شود، واریانس داده‌ها برابر با ۴۵ می‌شود. واریانس داده‌های نمونه اولیه چقدر است؟

۱) ۳۳/۲۵ ۲) ۳۳/۵ ۳) ۳۳/۷۵ ۴) ۳۴

۶- حاصل‌ضرب میانه و مد در داده‌های زیر برابر ۱۳۶ است. مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

$$۲۲ , k , ۸ , ۲۷ , ۲۱ , ۲۳ , ۸ , ۲۴ , ۱۳ , ۸$$

۱) ۱۰ ۲) ۲۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۴

۷- انحراف معیار داده‌های $۲z+۳ , ۲y+۳ , ۲x+۳$، برابر ۸ است. واریانس داده‌های $\frac{z}{۲}-۱ , \frac{y}{۲}-۱ , \frac{x}{۲}-۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

۸- در ۱۲ دادهٔ آماری، مجموع تفاضل داده‌ها از عدد ۶، برابر صفر است. اگر تمام این داده‌ها را ۲ برابر کنیم، واریانس داده‌های جدید برابر ۱۶ می‌شود. ضریب تغییرات داده‌های اولیه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹- در نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱۹ , ۱۸ , ۱۴ , ۳۴ , ۴۱ , ۴۲ , ۲۷ , ۲۵ , ۲۳ , ۱۲, ۱۰ , ۱۶ , ۱۵ , ۳۲ , ۳۱، دامنهٔ میان چارکی داده‌های داخل و روی جعبه کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۱۰- نمرات دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان درس فیزیک، مطابق جدول زیر است. اگر میانگین نمرات دانش‌آموزان برابر ۱۲/۵ باشد، با حذف نمرات کمتر از ۱۲، میانگین جدید نمرات کدام است؟

داده‌ها	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
فراوانی	۲	۵	۵	a	۳

۱) ۱۲/۹۰

۲) ۱۳/۲۴

۳) ۱۳/۵۲

۴) ۱۳/۷۶

۱- در نمونه‌گیری سامانمند از بین ۲۱۰ نفر که به ترتیب شماره‌گذاری شده‌اند. اگر ۱۵ نفر انتخاب شوند و یکی از شماره‌های منتخب، ۹۴ باشد، نفر چندم از هر طبقه باید انتخاب شود؟

۱) سوم ۲) دهم

۳) هفتم ۴) سیزدهم

۲- انحراف معیار طول میزهای یک کارخانه، ۳ سانتی‌متر اعلام شده است. برای داشتن یک نمونه از میزها که میانگین طول آن‌ها از میانگین اعلام شده کمتر از ۱ سانتی‌متر اختلاف داشته باشد، طول حداقل چند میز را باید اندازه‌گیری کنیم؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۶

۳) ۳۷ ۴) ۱۷

۳- بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای با انحراف معیار ۲/۲۵ براساس یک نمونه به صورت [۴/۱ , ۴/۷] است. مجموع اعضای این نمونه چقدر است؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۹۲۲/۵

۳) ۹۰۱/۶ ۴) ۹۵۴

۴- اگر اندازهٔ نمونه افزایش یابد، طول فاصلهٔ اطمینان ..... می‌یابد و در صورتی که انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصلهٔ اطمینان ..... می‌یابد.

۱) افزایش- افزایش ۲) کاهش- افزایش

۳) افزایش- کاهش ۴) کاهش- کاهش

۵- کران بالای بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد در نمونه‌ای به اندازهٔ ۲۵۰۰ و میانگین ۱۵ برابر ۱۵/۱۲ است. اگر تعداد اعضای نمونه ۹۰۰ واحد کاهش یابد، طول بازهٔ اطمینان چقدر خواهد شد؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۶- در کدام یک از موضوعات زیر، از دادگان برای جمع‌آوری داده‌ها نمی‌توان استفاده کرد؟

۱) تیراژ روزنامه‌های کشور

۲) تعداد مجروحان تصادفات رانندگی سال ۱۴۰۳ در کل کشور

۳) تعداد پروازهای خروجی فرودگاه امام خمینی در یک روز خاص

۴) تعداد عابرانی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند.

۷- اگر جامعهٔ آماری را اعداد طبیعی تک رقمی در نظر بگیریم، با کدام احتمال یک نمونه ۷ عضوی، میانگین را دقیق برآورد می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۸- برای نظرسنجی در مورد تغییر ساعت رسمی کشور در نیمهٔ اول سال، چه تعداد از روش‌های نمونه‌گیری زیر اریب هستند؟

الف) افراد در دسترس را انتخاب کنیم.

ب) پرسشنامه‌ای به ایمیل‌هایی که به تصادف انتخاب شده، ارسال کنیم.

پ) از دفترچهٔ راهنمای تلفن، تعدادی شماره به تصادف انتخاب کنیم.

ت) یک نمونهٔ غیرتصادفی انتخاب کنیم. (افراد حاضر در نمونه از قبل مشخص شده باشند)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- می‌خواهیم میزان رضایت ۲۰۰ دانش‌آموز مدرسه را از مدیریت بررسی کنیم. نمونه‌ای ۱۰ عضوی به روش سیستماتیک انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب فرد شماره ۱۲۳ اُم کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۳}{۲۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۰۵

۱۰- می‌خواهیم بهرهٔ هوشی دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم شهر اراک را بررسی کنیم. اگر فهرست همهٔ دانش‌آموزان را نداشته باشیم، ولی نام دبیرستان‌های اراک و تعداد کلاس‌های دوازدهم دبیرستان‌ها موجود باشد، کدام روش نمونه‌گیری بهتر است؟

۱) تصادفی ساده ۲) طبقه‌ای

۳) خوشه‌ای ۴) سامانمند

۱- p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است. ارزش گزاره‌های $(p \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ و $(q \vee r) \Leftrightarrow \sim p$ به ترتیب چگونه است؟

۱) F ـ T ۲) T ـ F ۳) T ـ مانند r ۴) T ـ مانند $\sim r$

۲- گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$، نادرست است. گزارهٔ $((p \Rightarrow s) \wedge (q \vee s)) \Rightarrow r$، هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) s ۲) $\sim s$ ۳) $r \Rightarrow s$ ۴) $s \Rightarrow p$

۳- عکس نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ به کدام صورت است؟

۱) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ۲) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ ۴) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

۴- p و q گزاره‌های دلخواهی هستند. گزارهٔ $[p \vee (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $\sim p \vee \sim q$ ۲) $\sim p \wedge q$ ۳) $p \wedge q$ ۴) $p \vee q$

۵- نقیض گزارهٔ «برخی از مقادیر گویا، با جذر خودشان برابر هستند.» به کدام صورت است؟

۱) $\exists x \in Q\,;\, x \neq \sqrt{x}$ ۲) $\forall x \in Q'\,;\, x \neq \sqrt{x}$

۳) $\forall x \in Q\,;\, (x > \sqrt{x}) \vee (x < \sqrt{x})$ ۴) $\exists x \in Q\,;\, (x > \sqrt{x}) \wedge (x < \sqrt{x})$

۱- تعداد زیرمجموعه‌های A، ۲۸ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های B نیز ۱۲ تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ است. تعداد زیرمجموعه‌های $A - B$ چندتا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $B - A$ است؟

۱) ۱۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۲- A و B دو مجموعهٔ ناتهی هستند که $A \times B = B \times A$. اگر مجموعه‌های X و Y به گونه‌ای باشند که $Y - X \subseteq A$ و $Y - X \subseteq B'$، کدام گزاره درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) $\forall x; (x \in Y \Rightarrow x \in X)$

۲) $\forall x; (x \in X \Rightarrow x \in Y)$

۳) $\exists x \in U; x \in A - B$

۴) گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر سه درست هستند.

۳- بین ۳ مجموعهٔ A، B و C رابطهٔ $A - B \subseteq C$ برقرار است. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

۱) $A - C \subseteq B$ ۲) $A \cap C \subseteq B$

۳) $A \cap B \subseteq C$ ۴) $C - A \subseteq B$

۴- $A \times B$ مجموعه‌ای ۶عضوی بوده و (۱,۳) و (۳,۴) دو عضو آن هستند. زوج‌مرتب ..... حتماً عضو $A \times B$ بوده و زوج‌مرتب ..... قطعاً عضو $A \times B$ نیست.

۱) $(1,2) - (1,4)$ ۲) $(2,3) - (1,4)$

۳) $(3,2) - (3,3)$ ۴) $(2,1) - (3,3)$

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) متغیرهای کیفی ترتیبی را اندازه‌گیری کرده و رتبه‌بندی می‌کنیم.

ب) اگر در نمودار دایره‌ای ۱/۵ قسمت از ده قسمت رنگ شده باشد، فراوانی نسبی آن متغیر $\frac{۱۵}{۳۶۰}$ است.

پ) برای نمونه به اندازهٔ ۴۰ از جامعه‌ای به اندازهٔ ۲۰۰، جامعه را به ۵ قسمت تقسیم کرده و یکی را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم. نوع روش نمونه‌گیری خوشه‌ای است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲- در ۷ دادهٔ آماری $Q_۱ = ۳$ و چارک دوم و سوم و میانگین برابر ۵ هستند. اگر داده‌ها دارای دو مد باشند، max داده‌ها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۱۱ ۴) هر عدد بزرگ‌تر از ۵ ممکن است باشد.

۳- میانگین دستهٔ اول با ۵ دادهٔ مختلف برابر با میانگین دستهٔ دوم با ۶ داده است؛ به طوری که تنها دادهٔ متفاوت دو دسته، عدد a است. اگر واریانس دستهٔ اول ۱/۵ واحد بیشتر از واریانس دستهٔ دوم باشد، نسبت ضریب تغییرات دستهٔ اول به ضریب تغییرات دستهٔ دوم کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۶}{۵}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۴- انحراف از میانگین ۷ دادهٔ آماری تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر انحراف معیار داده‌ها برابر ۱۰ و کوچک‌ترین داده برابر ۱۱ باشد، میانگین کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۶

۵- در یک کار آماری، جامعه اعداد طبیعی یک‌رقمی است. با کدام احتمال یک نمونهٔ ۳عضوی، پارامتر میانگین را بدون خطا برآورد می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۶- با استفاده از یک نمونهٔ ۱۰۰عضوی، میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ به صورت $(۱/۷, a)$ برآورد شده است. اگر این بازه شامل ۳ عدد صحیح باشد، بیشترین مقدار انحراف معیار جامعه کدام است؟

۱) ۱۶۵ ۲) ۸۲/۵ ۳) ۱۶/۵ ۴) ۸/۲۵

۱- گزارهٔ $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim r$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ۲) $\sim p \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ۳) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

۲- عکس و نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزارهٔ زیر است؟

۱) $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

۳) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۴) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$

۳- نقیض گزارهٔ $(\frac{۱}{x^۲+۱} \geq ۰) \wedge (۳x+۱=۰); \forall x \in \mathbb{R}$ کدام است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{R}; (\frac{۱}{x^۲+۱} < ۰) \wedge (۳x+۱ \neq ۰)$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; (\frac{۱}{x^۲+۱} > ۰) \vee (۳x+۱ \neq ۰)$

۳) $\exists x \in \mathbb{R}; (\frac{۱}{x^۲+۱} < ۰) \vee (۳x+۱ \neq ۰)$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}; (\frac{۱}{x^۲+۱} < ۰) \wedge (۳x+۱ \neq ۰)$

۴- اگر p گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای درست و r گزارهٔ دلخواهی باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) $(p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow q)$ ۲) $(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$

۳) $(r \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow p)$ ۴) $(\sim r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

۵- گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}$ با کدام گزاره‌نمای $p(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $xy = ۷$ ۲) $x + y = ۷$ ۳) $x^۲ + y^۲ = ۷$ ۴) $y - x = ۷$

۱- اگر $B-C=\varnothing$ باشد، متمم مجموعهٔ $[(B'\cup C')\cup[(A\cup B)'\cup(C\cup A)']]$ کدام است؟

۱) B ۲) C' ۳) $B'\cup C$ ۴) $B'\cap C'$

۲- اگر A مجموعهٔ اعداد دو رقمی و $B=\{5k|k\in A\}$ باشد، مجموعهٔ $A\cap B$ چند زیرمجموعهٔ سره غیرتهی دارد؟

۱) ۱۰۲۳ ۲) ۱۰۲۲ ۳) ۵۱۱ ۴) ۱۲۷

۳- اگر $A=\{x,y+2,-3,1\}$ و $B=\{a,7,3,b+1\}$ باشد و $A\times B=B\times A$، آن‌گاه حداکثر مجموع y,x و a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۴- در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$، حاصل‌جمع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مضرب ۷ می‌شود؟

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۷۱ ۴) ۱۷۲

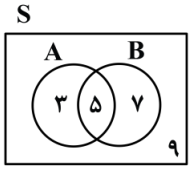
۵- اگر $A=\{a\}$، $B=\{a,\{a\},\varnothing\}$ و $C=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A\subseteq C$ ۲) $A\in C$ ۳) $B\subseteq C$ ۴) $\{A\}\in C$

۱- جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. در استخراج چهار مهره به تصادف از درون آن، احتمال آن‌که تعداد مهره‌های سبز منتخب از تعداد مهره‌های قرمز منتخب بیش‌تر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴۲}$

۲- در فضای نمونهٔ S دو پیشامد A و B و تعداد اعضای موجود در ناحیه‌های چهارگانه نمایش داده شده‌اند. اگر تمام اعضای فضای نمونهٔ S هم‌شانس باشند، آن‌گاه احتمال آن‌که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، چقدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۳- در پرتاب دو تاس با یکدیگر احتمال آن‌که مجموع دو تاس کم‌تر از حاصل‌ضرب آن دو تاس باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۴- در یک تیم والیبال ۱۲ نفری هیچ دو نفری با هم قد یکسانی ندارند. آن‌ها به تصادف در یک صف پشت سرهم می‌ایستند. احتمال آن‌که بین بلندقدترین و کوتاه‌قدترین آن‌ها، دقیقاً یک نفر ایستاده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۳۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶۶}$

۵- عددی به تصادف از مجموعه اعداد $A=\{۷۴,۷۵,...,۲۷۳\}$ انتخاب می‌شود، احتمال آن‌که مضرب ۳ بوده و شامل رقم ۲ نباشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۱۹ ۳) ۰/۲۱ ۴) ۰/۲۳

۱- جعبه‌ای شامل ۱۰ گوی با شماره‌های $۱,۲,۳,...,۱۰$ است. گوی‌ها را یکی پس از دیگری از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم گوی ۲ زودتر از گوی ۷ بیرون آمده است. چقدر احتمال دارد که گوی ۵ به عنوان اولین گوی آمده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲- اگر فضای نمونهٔ $S=\{a,b,c,d,e\}$ چنان باشد که $P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})$، $P(a)=۲P(d)$ و $P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}$، آن‌گاه $P(a)$ کدام خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۳- در درون جعبه‌ای ۵ کارت وجود دارد که ۳ تا از آن‌ها هر دو رو قرمز، یکی از آن‌ها هر دو رو سفید و بالاخره یکی از آن‌ها چنان است که یک رو سفید و یک رو قرمز است. از درون جعبه کارتی برداشته و به یک روی آن نگاه می‌کنیم. اگر آن رو، سفید باشد دو سکه و اگر قرمز باشد سه سکه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً دو تا از سکه‌ها پشت باشند، حدوداً چند درصد است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۱

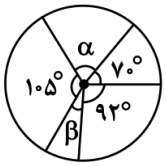
۴- جعبهٔ A دارای ۴ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز و جعبهٔ B دارای ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن بیرون کشیده شده است. اگر بدانیم مهرهٔ خارج شده قرمز است، احتمال آن‌که جعبهٔ B انتخاب شده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

5- اگر پیشامدهای A و B چنان باشند که $n(A)=۸$، $n(A\cap B)=۲$ و $n(A'\cap B')=۹$ و تمام اعضای فضای نمونه هم‌شانس باشند، آن‌گاه با فرض مستقل بودن A و B، $P(B)$ کدام خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱- **افراد یک جامعه بر اساس علاقه به تیم فوتبال به ۵ گروه متمایز تقسیم شده‌اند که نمودار مربوط به این آمارگیری در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر تعداد افراد موجود در ناحیهٔ متناظر به زاویهٔ مرکزی α، ۲۰ درصد از کل افراد آن جامعه باشند، آن‌گاه اندازهٔ β کدام است؟**



۱) 19°
۲) 29°
۳) 21°
۴) 31°

۲- **در داده‌های $24,22,27,25,a,23$، مد و میانگین دو عدد طبیعی متوالی هستند. a کدام ویژگی را دارد؟**

۱) عددی اول است.
۲) مربع کامل است.
۳) مکعب کامل است.
۴) بخش‌پذیر بر ۳ است.

۳- **می‌خواهیم به یکی از داده‌های زیر ۲ واحد اضافه کنیم تا دامنهٔ میان چارکی داده‌های جدید نسبت به داده‌های قبلی ۱ واحد افزایش پیدا کند. دادهٔ تغییریافته (قبل از تغییر) چند شمارندهٔ مثبت دارد؟** $1,2,3,4,5,6,7,8,9$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴- **از ۲۰ دادهٔ آماری با انحراف معیار ۴ به تعداد چهار داده با انحراف معیار ۶ حذف کرده‌ایم. اگر میانگین داده‌های حذف‌شده با میانگین کل داده‌های اولیه یکسان باشد، آن‌گاه واریانس شانزده دادهٔ باقی‌مانده کدام خواهد شد؟**

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۵- **ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟**
$12,12,12,60$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

الف) نمونه‌گیری سامانمند نوعی نمونه‌گیری خوشه‌ای محسوب می‌شود.

ب) اگر تفاوت داده‌ها در هر یک از گروه‌ها نوسان زیاد داشته ولی از گروهی به گروه دیگر نوسان میانگین کم باشد، آن‌گاه برای نمونه‌گیری، نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب‌تر است.

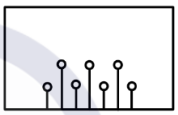
ج) واحد آماری زیر مجموعه‌ای از جامعه است.

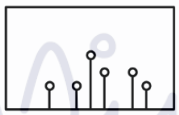
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

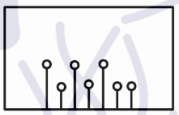
۲- در یک جامعهٔ ۶ عضوی با مقادیر ۱۹،۱۷،۱۲،۱۱،۳ و ۲۲ اگر در انتخاب نمونه‌ای دو عضوی اعضای ۱۱ و ۱۹ انتخاب شود و پارامتر و آماره را به ترتیب a و b بنامیم، آن‌گاه $3a+b$ به کدام عدد بخش‌پذیر است؟

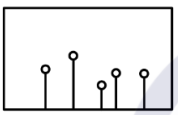
۱) ۵۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۶۱

۳- در جامعهٔ ۱۰،۱۰،۸،۴،۲ جدول احتمال برای نمونه‌ای با اندازهٔ $n=2$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴- بازهٔ اطمینان ٪۹۵ برای میانگین جامعه‌ای به‌صورت (۱۸/۲،۱۹/۸) است. اگر بین n (تعداد اعضای نمونه) و σ (انحراف معیار جامعه) رابطهٔ $n+5\sigma=48$ برقرار باشد، آن‌گاه رقم یکان مجموع اعضای نمونه کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱- مجموعه‌های $A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $B=\{k,k+۱,k+۲,...,۶۰\}$ مفروض‌اند. حداکثر مقدار k که به‌ازای آن گزارهٔ سوری $\exists x\in B;\ \forall y\in A: x^۲.y\leq ۱۴۰۴$ ارزش درست داشته باشد، کدام رقم یکان را دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- اگر مجموعهٔ A به‌صورت $A=\{۲,\{۲\},\{\{۲\}\}\}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه تعداد اعضای مجموعهٔ $P(A)-A$ از تعداد اعضای مجموعهٔ $A-P(A)$ چه تعداد بیش‌تر است؟ (مجموعهٔ $P(A)$ مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A است.)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳- اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی متمایز باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $(A-B)-(B\cup C')$ با کدام مجموعه برابر خواهد شد؟

۱) $A-(B\cap C)$ ۲) $(A\cap C)-B$ ۳) $A-(B-C)$ ۴) $(A-B)-C$

۴- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$، آن‌گاه چند زوج‌مرتب وجود دارد که عضوی از $B\times C$ بوده ولی عضوی از $A\times C$ نباشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

۱- در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عدد یک، نصف احتمال ظاهر شدن اعداد اول و احتمال ظاهر شدن اعداد ۴ و ۶ باهم مساوی هستند و دو برابر احتمال ظاهر شدن عدد ۲ هستند، با پرتاب این تاس احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۴ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲- در فصل پاییز در شهر تهران تعداد روزهای آلوده بودن هوا، پنج برابر روزهای با هوای پاک است. احتمال آن‌که فردی مسن در هوای پاک برای خرید از منزل خارج شود، ۰/۷ و احتمال آن‌که همین فرد در روزهای با هوای آلوده برای خرید از منزل خارج شود ۰/۴است. می‌دانیم این شخص در یکی از روزهای پاییز از منزل خارج شده است. احتمال آن‌که هوای آن روز پاک بوده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۷}$ ۲) $\frac{۷}{۲۷}$ ۳) $\frac{۹}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۷}$

۳- دو سکه و دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع دو تاس عدد اول ظاهر شود یا سکه‌ها هر دو «رو» بیایند، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۲۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

۴- در یک سبد، ۴ سیب قرمز و ۳ سیب زرد و ۱ سیب سبز داریم. به‌تصادف و متوالی با جای‌گذاری دو سیب از سبد خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی از سیب‌ها زرد باشد، کدام است؟

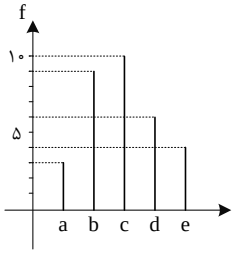
۱) $\frac{۱۹}{۶۴}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۴}$ ۳) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

۵- ظرفی شامل ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید است. یک مهره به‌تصادف از ظرف خارج کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و سپس آن را به همراه دو مهرهٔ غیر همرنگ دیگر به ظرف برمی‌گردانیم، حال مهره‌ای را از ظرف خارج می‌کنیم، احتمال سفید بودن آن کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۳}$ ۳) $\frac{۲۳}{۶۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱- زاویهٔ مرکزی متناظر به دادهٔ d در نمایش دایره‌ای داده‌های متناظر به نمودار میله‌ای مقابل کدام است؟

مشابه تمرین کتاب درسی



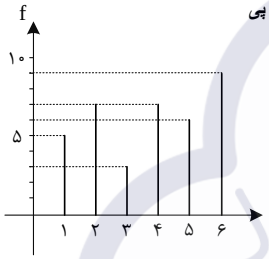
۱) $۶۷/۵^\circ$

۲) $۶۲/۵^\circ$

۳) ۵۷°

۴) ۵۴°

۲- با توجه به نمودار مقابل، اندازهٔ دامنهٔ میان‌چارکی داده‌ها کدام است؟ آزمون وی ای پی



۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

۳- برای پنج دادهٔ آماری $۷,۸,۹,a,b$ اگر پارامترهای میانگین، میانه و مد (که منحصر به فرد است) یکسان باشند، آن‌گاه برای $a+b$ چند مقدار متمایز یافت می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- در داده‌های آماری با جدول فراوانی مقابل، مقدار واریانس کدام است؟

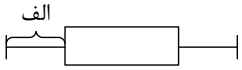
x	۳۷	۴۰	۴۳	۴۶	۴۹
f	۳	۱۰	۲	۴	۶

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۵- با اضافه کردن کدام‌یک از داده‌های زیر به داده‌های $۵,۷,۷,۱۲,۱۷,۱۸$، مقدار ضریب تغییرات کاهش بیش‌تری خواهد داشت؟

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۶- در نمایش نمودار جعبه‌ای برای n دادهٔ آماری تعداد داده‌های سمت چپ (بخش الف) برابر ۲۳ شده است. اگر کم‌ترین مقدار ممکن برای n را a و بیش‌ترین مقدار ممکن برای n را b بنامیم، آن‌گاه یکان $3b-2a$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۸

۳) ۵

۴) ۲

۱- در جامعه‌ای به شکل $\{۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ احتمال آن‌که نمونه‌ای ۲ عضوی، میانگین را ۸ برآورد کند، کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۲

۲- چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

الف: اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است.

ب: متغیرهای کیفی، متغیرهایی هستند که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند.

پ: متغیرهای کمی به دو نوع اسمی و ترتیبی تقسیم می‌شوند.

ت: میزان بارندگی در یک شهر برحسب میلی‌متر، متغیر کمی پیوسته و گروه خونی افراد، متغیر کیفی ترتیبی می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- در جامعه‌ای، انحراف معیار برابر ۴۵ است. حداقل تعداد اعضای نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین این نمونه، کمتر از ۲/۵ باشد؟

۱) ۲۵۷ ۲) ۳۲۴ ۳) ۳۲۵ ۴) ۲۵۸

۴- ستاد بازرسی قیمت کالا و ارز برای جلوگیری از گران‌فروشی در ماه آخر سال (شب عید) تصمیم گرفته تا از پاساژ شامل ۵۰ فروشگاه، ۸ فروشگاه را انتخاب کرده و تمامی اقلام و کالاهای فروشگاه را از نظر قیمت بازرسی کند. برای انتخاب این نمونه از کدام روش نمونه‌گیری استفاده شده است؟

۱) تصادفی ساده ۲) طبقه‌بندی ۳) خوشه‌ای ۴) سامانمند

۵- به چند طریق می‌توان یک دستهٔ گل شامل ۱۰ شاخه از ۴ نوع گل مریم، رز، نرگس و گلایل انتخاب کرد به طوری که از گل مریم حداقل ۳ شاخه و از گل رز بیش از یک شاخه انتخاب کنیم؟

۱) ۲۸ ۲) ۴۵ ۳) ۵۶ ۴) ۷۲

۱- اگر ارزش گزاره‌ی $p \vee (\sim q \vee r)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره‌ی زیر درست است؟

۱) $(p \vee r) \vee (q \wedge p)$ ۲) $(p \wedge q) \vee r$ ۳) $(p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q)$ ۴) $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee p$

۲- برای برقراری هم‌ارزی $x, [p \wedge (x \vee \sim p)] \vee [\sim x \wedge (x \vee p)] \equiv \sim p$ کدام گزاره می‌تواند باشد؟

۱) به ازای هر گزاره x ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \vee \sim q$ ۴) هرگز برقرار نیست.

۳- هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow T)$ کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) $p \Rightarrow q$ ۴) $q \Rightarrow \sim p$

۴- اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، با کدام احتمال ارزش گزاره‌ی مرکب $(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$ درست است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۵- عکس نقیض گزاره‌ی شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ کدام است؟

۱) $\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۲) $r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۳) $\sim r \vee (\sim p \vee \sim q)$ ۴) $r \vee (\sim p \vee \sim q)$

۱. با توجه به گزاره‌های زیر، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

آ) اگر معدل کوکب بالای ۱۹ شود، از پدرش جایزه می‌گیرد.

ب) برای این‌که معدل کوکب بالای ۱۹ شود، باید ریاضی ۲۰ بگیرد.

پ) اگر معلم ریاضی کوکب به او ارفاق کند، ریاضی ۲۰ می‌شود.

ت) کوکب از پدرش جایزه نگرفت.

۱) معدل کوکب بالای ۱۹ شده است.
۲) نمره ریاضی کوکب ۲۰ شده است.
۳) نمره ریاضی کوکب بالای ۱۹ شده است.
۴) معلم ریاضی کوکب به او ارفاق نکرده است.

۲. نقیض گزاره $(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) $p\vee q$
۲) $p\wedge q$
۳) $p\Rightarrow q$
۴) $q\Rightarrow p$

۳. ارزش گزاره‌ی $p\Leftrightarrow(q\wedge r)$ نادرست است. احتمال این که ارزش گزاره‌ی p درست باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱

۴. اگر $p\vee q\equiv T$ باشد، گزاره‌ی $(\sim p\Rightarrow q)\wedge\sim(p\Leftrightarrow q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) p
۲) $\sim q$
۳) F
۴) T

۵. نقیض گزاره‌ی سوری $(\forall x;x^2=9)\Rightarrow(\exists x;x=3)$ کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $(\forall x;x\neq3)\Rightarrow(\exists x;x^2\neq9)$
۲) $(\forall x;x^2=9)\wedge(\forall x;x\neq3)$
۳) $(\exists x;x^2\neq9)\wedge(\exists x;x=3)$
۴) $(\exists x;x^2\neq9)\Rightarrow(\forall x;x\neq3)$

۱- کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \vee \sim(\sim q \Rightarrow p)$ است؟

۱) $p \vee \sim q$ ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $\sim p \wedge q$

۲- ارزش گزاره‌ی کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ۲) $\sim p \Leftrightarrow q$

۳) $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ ۴) $p \Leftrightarrow \sim q$

۳- در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A=\{2,3,6,8,14,16,17,18\}$، میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، مضرب ۵ است؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۹۰ ۴) ۹۲

۴- دو مجموعهٔ $\{x, x^2\}$ و $\{y, 16, y^2\}$ باهم مساوی‌اند. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای $x+y$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

۵- سه مجموعهٔ C, B, A از مجموعه‌ی مرجع U مفروض‌اند. اگر گزارهٔ p به صورت $(A \subseteq B)$ و گزارهٔ q برابر $(B \cap C = B)$ باشد و همچنین ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ درست باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A \cup B) \subseteq C$ ۲) $(A \cup C) = C$ ۳) $C - A = B$ ۴) $A \subseteq C$

۱- اگر برای سه مجموعه‌ی C,B,A از مجموعه‌ی مرجع U داشته باشیم: $B\subseteq A\subseteq C$، آن‌گاه مجموعه‌ی $(B'\cap C')\cup(A\cap B)'$ برابر کدام گزینه است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) B'

۲- مجموعه‌ی $(A-B)-(C-B)$، با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، برابر است؟

۱) $(B-C)-A$ ۲) $A-(B\cup C')$ ۳) $B-(A\cup C)$ ۴) $(A-B)-C$

۳- مجموعه‌ی $\{۱,۳,۵,۶,۷,۹\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع تمام اعضای آن دو رقمی باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۴ ۴) ۴۰

۴- اگر $A=[۱,۴]$ و $B=\{۱,۴\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعهٔ $A\times B-B\times A$ چگونه است؟

۱) مربع ۲) ۴ نقطه ۳) دو خط موازی افقی ۴) دو خط موازی عمودی

۵- اگر مجموعهٔ A دارای ۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۴ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو باشند، مجموعهٔ $(A\cup B')'\times(A\cap B')$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

۱- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداکثر ۸ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۲- در آزمایشگاهی ۶ میمون سالم و ۳ میمون هپاتیتی وجود دارد. اگر ۲ میمون از این آزمایشگاه فرار کنند، با کدام احتمال درصد میمون‌های بیمار باقی‌مانده در آزمایشگاه کم‌تر خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳- اگر $P(A-B')=۰/۲$ و $P(A\cup B)=۰/۸$، آن‌گاه احتمال پیشامد $(B\cap A')\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۱

۴- از مجموعهٔ $\{۵۱,۵۲,...,۲۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. با چه احتمالی عدد انتخابی مضرب ۵ است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{۸}{۷۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۷۵}$

۵- اگر تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۴,۶,۹\}$ را بنویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال حاصل‌ضرب اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۱

1- **یک تاکسی که ۴ نفر ظرفیت دارد، مسیر A به B را با حداقل یک مسافر و مسیر B به C را با حداقل ۲ مسافر طی می‌کند. اگر در مسیر برگشت از C به B و B به A، در مجموع ۷ مسافر داشته باشد، فضای نمونهٔ تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت چند عضو دارد؟**

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۸

2- **در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۲ نفر فقط به ریاضی و ۱۰ نفر فقط به فیزیک علاقه دارند. اگر P(A) و P(B) به ترتیب احتمال علاقه‌مندی به ریاضی و فیزیک در این کلاس باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۱۰}{۹}$

3- **در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن هر عدد اول، سه برابر ظاهر شدن هر عدد غیراول است. در یک بار پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۳ باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

4- **اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟**

۱) $P(A).P(B)=۱-P(A'\cup B')$ ۲) $P(A).P(B)=۱-P(A'\cup B')$
۳) $P(A)+P(B)+P(A'\cup B')=۱$ ۴) $P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=۱$

5- **در یک تجربه تصادفی، S={a,b,c} فضای نمونه‌ای است. اگر P(a)، P(b) و P(c)، جملات متوالی یک دنباله هندسی با واسطه هندسی $\frac{۱}{۴}$ باشند، مقدار P(c) کدام است؟**

۱) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۸}$

1- در پرتاب سه تاس سالم، اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، با کدام احتمال مجموع این سه تاس برابر ۱۶ است؟

۱) $\frac{۱}{۷۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

2- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری‌که $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۲$ و همچنین $P(A|B')=۰/۵$ باشد، آن‌گاه $P(A'|B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

3- کوکب، بتول و ۶ نفر از دوستانشان وارد کلاس می‌شوند. اگر بتول زودتر از کوکب وارد کلاس شده باشد، احتمال آن‌که کوکب آخرین نفر وارد کلاس شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

4- احتمال موفقیت فردی در آزمون کتبی ۰/۷ و در آزمون شفاهی ۰/۵ است. اگر این فرد در آزمون کتبی قبول شود، شانس قبولی وی در آزمون شفاهی ۱۰٪ افزایش می‌یابد. با کدام احتمال این شخص لااقل در یکی از آزمون‌ها قبول می‌شود؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۷۸ ۴) ۰/۸۲

5- تاسی را می‌اندازیم، اگر عدد اول ظاهر شد دو سکه و اگر عدد دیگری ظاهر شد، یک سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال در تمام پرتاب‌ها پشت ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

اگر A، یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است. طبق فرض داریم:

$$n(P(B))=2^{m+p} \quad n(P(C))=2^{m-p}$$

$$\Rightarrow 2^{m+p}-2^{m-p}=63\times 2^{m-p}$$

$$2^{m+p}=64\times 2^{m-p}=2^{6+m-p}\Rightarrow m+p=6+m-p\Rightarrow p=3$$

(آمار و احتمال- صفحهٔ ۱۷)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) اگر $x=0$ باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی y، $xy=0$ و رابطهٔ $xy<x$ برقرار نیست.

۲) به ازای هر عدد حقیقی x، کافی است $y=x^2+1$ انتخاب شود تا نامساوی $x^2<y$ برقرار باشد، پس این گزارهٔ سوری درست است.

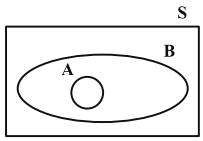
۳) اگر $x=0$ باشد، آن‌گاه از رابطهٔ $x^2-y^2=1$، $y^2=-1$ به دست می‌آید که امکان‌پذیر نیست و در نتیجه مقداری برای y وجود ندارد.

۴) اگر $x>1$ باشد، آن‌گاه $1-x^2<0$ و در نتیجه $y^2<0$ که امکان‌پذیر نیست و مقداری برای y یافت نمی‌شود.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

با توجه به نمودار ون سه ناحیه داریم: A، $B-A$ و B'؛ برای $1\in S$ سه انتخاب داریم: $1\in A$ یا $1\in B-A$ یا $1\in B'$ به همین ترتیب برای $2\in S$، $3\in S$ و $4\in S$ نیز ۳ انتخاب داریم. پس بنابه اصل ضرب تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:



$$3\times 3\times 3\times 3=3^4=81$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با توجه به جدول ارزش‌ها برای $p\Rightarrow(p\wedge\sim q)$، در سطرهایی که این گزاره ارزش درست دارد گزارهٔ $(p\Leftrightarrow q)\wedge p$ ارزش نادرست دارد و در این سه سطر ارزش گزاره $p\wedge q$ نیز نادرست است.

p	q	$p\wedge\sim q$	$p\Rightarrow(p\wedge\sim q)$	$(p\Leftrightarrow q)\wedge p$	$p\wedge q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	F

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۱۱)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الهی)*

گزارهٔ $x-3=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ به ازای $x=2$ تعریف نشده است. از طرفی با بررسی گزینه‌ها، مجموعه جواب‌ها به صورت زیر است:

۱) $2x^2-32=0\Rightarrow x^2=16\Rightarrow S=\{4\}$

۲) $S=\{4,8,12,16,\ldots\}$

۳) $S=\{0,4,5,6,\ldots\}$

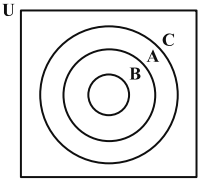
۴) $S=\{1,2\}$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۱۵)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق فرض و با استفاده از قوانین زیرمجموعه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}B-A=\varnothing\Rightarrow B\subseteq A\\ A-C=\varnothing\Rightarrow A\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow B\subseteq C\Rightarrow C'\subseteq B'$$



همان‌طور که در نمودار ون مشاهده می‌شود $B \cap C = B$ و $C - B \neq \varnothing$.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim q \vee q) \equiv p \wedge T \equiv p$$

بنابراین:

$$\sim [(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)] \vee \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv p \Rightarrow \sim q$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۱۵)

۸- **گزینهٔ «۱»** (مصطفی دیداری)

روش اول: در حالتی که p و q هر دو نادرست باشند کل گزاره به انتفای مقدم درست است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$
ن	ن	د	ن	ن

اما در این حالت گزاره‌های ۳ و ۴ هر دو نادرست هستند، پس نمی‌توانند هم‌ارز این گزاره باشند. در حالتی که p درست و q نادرست باشد نیز $p \Rightarrow q$ نادرست و کل گزاره به انتفای مقدم درست می‌شود اما در این حالت گزارهٔ $\sim p \vee q$ نیز نادرست است و نمی‌تواند هم‌ارز گزارهٔ داده شده باشد.

روش دوم: می‌دانیم $\sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$، پس گزارهٔ صورت سؤال به صورت زیر می‌شود:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

این گزاره، هم‌ارز گزارهٔ زیر می‌شود:

$$\sim [(p \Rightarrow q) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)] \vee (p \Rightarrow q)$$

$$\equiv \underbrace{\sim (p \Rightarrow q)}_{\text{نادرست}} \vee \sim ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)) \vee \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\text{درست}}$$

$\equiv T$ (همواره درست)

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۹)

۹- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی دیداری)

نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است پس داریم:

$$p \wedge \sim q \equiv (\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ x \leq x^2) \wedge \sim (\text{برخی از اعداد فرد، اول نیستند})$$

$$\equiv p \wedge \sim (\exists x \in O \ ; \ x \notin P) \equiv p \wedge (\forall x \in O \ ; \ x \in P)$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۱۵)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

بررسی گزینه‌ها:

۱) رابطه درست است زیرا داریم:

$$A \cap D \subseteq A \subseteq B \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap D \subseteq B \cup C$$

۲) هر دو مجموعهٔ $A - B$ و $C - D$ برابر $\varnothing$ هستند،

پس $A - B \subseteq C - D$.

۳) اثبات درستی رابطه به صورت زیر است:

$$\left.\begin{matrix} C \subseteq D \Rightarrow D' \subseteq C' \\ A \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cap D' \subseteq B \cap C'$$

$$\Rightarrow A - D \subseteq B - C$$

۴) این رابطه ممکن است نادرست باشد. به عنوان مثال نقض داریم:

$$A = \{2,3\} \ , \ B = \{2,3,4\} \ , \ C = \{1\} \ , \ D = \{1,2\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ است. از طرفی $A - C = \{2,3\}$ و $B - D = \{3,4\}$، $A - C \not\subseteq B - D$.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

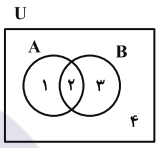
۱- **گزینهٔ «۱»** *(اسحاق اسفندیار)*

روش اول: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم:

$$A'\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B\Rightarrow A'\cap B\subseteq A\cup B$$

از طرفی طبق فرض $A\cup B\subseteq A'\cap B$، پس $A'\cap B=A\cup B$

حال نمودار ون را برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B رسم کرده و نواحی را مطابق شکل شماره‌گذاری می‌کنیم:



با توجه به شمارهٔ ناحیه‌ها، دو مجموعهٔ $A'\cap B$ و $A\cup B$ را مشخص می‌کنیم.

$$A\cup B=\{1,2,3\}\ ,\ A'\cap B=B-A=\{3\}$$

چون نواحی جدا از هم هستند، تساوی این دو مجموعه تنها در صورتی امکان‌پذیر است که دو ناحیهٔ ۱ و ۲ تهی باشند، یعنی $A=\varnothing$.

روش دوم: مانند روش اول ابتدا نتیجه می‌گیریم: $A'\cap B=A\cup B$

حال از طرفین رابطهٔ فوق با مجموعهٔ A اشتراک می‌گیریم. داریم:

$$A\cap(A'\cap B)=A\cap(A\cup B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B=\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{\text{قانون جذب}}\Rightarrow \varnothing=A$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

نکته: طبق قانون جذب $A\cup(A\cap B)=A$ و $A\cap(A\cup B)=A$ است. در نتیجه:

$$A'\cap[((A\cup B)-B)\cup\overbrace{(A\cap(A\cup B))'}^{A}]$$

$$=A'\cap[\underbrace{((A\cup B)\cap B')}_{C}\cup A']$$

$$=\underbrace{A'\cap[C\cup A']}_{\text{قانون جذب}}=A'$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۹)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(عباس الفی)*

چون $(B-A)\subseteq(B\cup A)$ است پس حاصل $[(B\cup A)\cup(B-A)]$ برابر $B\cup A$ خواهد شد، در نتیجه:

$$[(B\cup A)\cup(B-A)]\cup[(C-B)\cup A]$$

$$=(B\cup A)\cup[(C-B)\cup A]$$

$$=[(B\cup A)\cup A]\cup(C-B)=(B\cup A)\cup(C\cap B')$$

$$=(A\cup B)\cup(C\cap B')=A\cup(B\cup(C\cap B'))$$

$$=A\cup[(B\cup C)\cap(B\cup B')]=A\cup[(B\cup C)\cap U]$$

$$=A\cup(B\cup C)\overset{B\subseteq C}{=\!=}A\cup C\xrightarrow{\text{متمم}}(A\cup C)'=A'\cap C'$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۹)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مجموعه‌های صورت سؤال عبارتند از:

$$A=\{1,3,5,7\}$$

$$B=\{-1,0,1,2,3\}$$

$$C=\{-1,0,1\}$$

پس $A-C$ دارای ۳ عضو و $B\cap C$ نیز دارای ۳ عضو است.

بنابراین $(A-C)\times(B\cap C)$ دارای ۹ عضو خواهد بود و تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^9=512$ می‌باشد.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

دو مجموعهٔ اول را ساده می‌کنیم:

$$(1):\ (A\cap B')\cup\underbrace{(A'\cup(A\cap B'))'}_{A'\cup B'}$$

$$=(A-B)\cup\underbrace{(A'\cup B')'}_{A\cap B}=A\xrightarrow{\text{فرض}}n(A)=6$$

$$(2):\ B\cap(A'\cup B)\overset{\text{جذب}}{=\!=}B\xrightarrow{\text{فرض}}n(B)=5$$

در نتیجه برای ضرب دکارتی داده شده داریم:

$$|(A\times B)\cup(B\times A)|$$

$$=|A\times B|+|B\times A|-|(A\times B)\cap(B\times A)|$$

$$=\underbrace{2|A||B|}_{2\times6\times5}-|A\cap B|^2=56\Rightarrow|A\cap B|=2$$

توجه: منظور از $|A|$ همان $n(A)$، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ A است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۳)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا پیشامدهای A، B و C و سپس پیشامدهای $A-C$، $B-C$، $A-B$ و $A\cap B$ را مشخص می‌کنیم:

$A = \{(پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (د، پ، پ)، (پ، پ، پ)\}$

$B = \{(د، پ، د)، (پ، پ، د)، (د، د، پ)، (پ، د، پ)\}$

$C = \{(د، د، د)، (پ، د، د)، (د، پ، د)، (پ، پ، د)\}$

$C - A = \{(د، د، د)، (پ، د، د)، (د، پ، د)\}$

$B - C = \{(د، د، پ)، (پ، د، پ)\}$

$A - B = \{(د، پ، پ)، (پ، پ، پ)\}$

$A \cap B = \{(پ، پ، د)، (پ، د، پ)\}$

در بین گزینه‌ها تنها دو پیشامد $A - B$ و C فاقد اشتراک بوده و در نتیجه ناسازگار هستند.

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۷- **گزینهٔ «۱»** (اسماق اسفندیار)

فضای نمونه‌ای S همان مجموعهٔ صورت سؤال است. اگر A و B مجموعه اعدادی از S باشند که به ترتیب مضرب ۵ و مضرب ۷ هستند، در این صورت:

$$n(A) = [\frac{۳۰۰}{۵}] = ۶۰ \quad , \quad n(B) = [\frac{۳۰۰}{۷}] = ۴۲$$

$$n(A \cap B) = [\frac{۳۰۰}{۵ \times ۷}] = ۸$$

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(S) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$

$$= ۳۰۰ - [۶۰ + ۴۲ - ۸] = ۲۰۶$$

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{۲۰۶}{۳۰۰} = \frac{۱۰۳}{۱۵۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۸- **گزینهٔ «۲»** (روح‌اله حسنی)

قرار می‌دهیم:

$$۱۰P(A - B) = ۱۵P(A \cap B) = ۶P(B - A) = ۳۰k$$

بنابراین:

$$P(A - B) = ۳k \quad , \quad P(A \cap B) = ۲k \quad , \quad P(B - A) = ۵k$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

$$= ۳k + ۲k + ۵k = ۱۰k$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - ۱۰k$$

چون $P(A' \cap B') = \frac{۱}{۶}$، پس:

$$۱ - ۱۰k = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۱۰k = \frac{۵}{۶} \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین:

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) = ۵k + ۲k = ۷k = \frac{۷}{۱۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۲»** (عباس الهی)

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$P(e) = ۲P(d) = ۲^۲ P(c) = ۲^۳ P(b) = ۲^۴ P(a)$$

از طرفی داریم: $P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = ۱$

$$\Rightarrow P(a) + ۲P(a) + ۲^۲ P(a) + ۲^۳ P(a) + ۲^۴ P(a) = ۱$$

$$\Rightarrow ۳۱P(a) = ۱ \Rightarrow P(a) = \frac{۱}{۳۱}$$

پس احتمال پیشامد مورد نظر برابر است با:

$$P(\{a , d\}) = P(a) + P(d) = P(a) + ۲^۳ P(a)$$

$$\Rightarrow P(\{a , d\}) = ۹P(a) \Rightarrow P(\{a , d\}) = \frac{۹}{۳۱}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (روح‌اله حسنی)

فرض کنید $P(a_۲) = k$ پس $P(a_۱) = ۲k$ و داریم:

$$P(a_۳) = k + ۲k = ۳k$$

$$P(a_۴) = ۳k + k = ۴k$$

$$P(a_۵) = ۴k + ۳k = ۷k$$

$$P(a_۶) = ۷k + ۴k = ۱۱k$$

از طرفی:

$$P(a_۱) + P(a_۲) + P(a_۳) + P(a_۴) + P(a_۵) + P(a_۶) = ۱$$

$$\Rightarrow ۲k + k + ۳k + ۴k + ۷k + ۱۱k \Rightarrow ۲۸k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲۸}$$

بنابراین احتمال پیشامد مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P(\{a_۳ , a_۴ , a_۶\}) = P(a_۳) + P(a_۴) + P(a_۶)$$

$$= ۳k + ۴k + ۱۱k = ۱۸k = \frac{۱۸}{۲۸} = \frac{۹}{۱۴}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

$$\begin{cases} A \Rightarrow P(A)=\frac{1}{3} & \text{پیشامد به سینما رفتن آرمان} \\ B \Rightarrow P(B)=\frac{2}{5} & \text{پیشامد به سینما رفتن بابک} \end{cases}$$

$$, \ P(B\mid A)=\frac{1}{10}\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{10}\times P(A)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{30})$$

$$=1-\frac{10+12-1}{30}=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow P(B'\mid A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{20}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

در پرتاب این دو تاس تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} A: \text{پیشامد} & \text{مجموع ۲ عدد اول باشد.} \\ B: \text{پیشامد} & \text{هر ۲ عدد اول باشند.} \end{cases}$$

$$B=\{(2,2),(2,3),(2,5),\ldots,(5,5)\}\Rightarrow n(B)=3\times3=9$$

$$A=\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),$$
$$(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5)\}$$

$$A\cap B=\{(2,3),(2,5),(3,2),(5,2)\}$$

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{9}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

فرض کنید B پیشامد مرد بودن و A پیشامد باسواد بودن باشد. بنابر قانون بیز داریم:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)\times P(B)}{P(A)}$$

ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\underbrace{(\underbrace{0/6}_{\text{مرد بودن}}\times\underbrace{0/30}_{\text{مرد باسواد}})}+\underbrace{(\underbrace{0/40}_{\text{زن بودن}}\times\underbrace{0/70}_{\text{زن باسواد}})}$$

$$=0/18+0/28=0/46$$

$$P(A\mid B)=P(\text{مرد باسواد})=0/3$$

$$P(B)=P(\text{مرد بودن})=0/6$$

$$P(B\mid A)=\frac{0/3\times0/6}{0/46}=\frac{0/18}{0/46}=\frac{18}{46}=\frac{9}{23}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

دو پیشامد A و B مستقل هستند هرگاه رابطهٔ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ برقرار باشد. همچنین می‌دانیم اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، پیشامدهای A' و B نیز مستقل‌اند، پس داریم:

$$P(B-A)=\frac{5}{16}\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{5}{16}\Rightarrow P(B)P(A')=\frac{5}{16}$$

$$\xrightarrow{P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}P(B)=\frac{5}{16}\Rightarrow P(B)=\frac{5}{8}$$

$$\frac{P(A\cup B)}{P(B')}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}-(\frac{1}{2}\times\frac{5}{8})}{1-\frac{5}{8}}=\frac{\frac{13}{16}}{\frac{3}{8}}=\frac{13}{6}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

فضای نمونه پرتاب سه تاس $6^3=216$ عضو دارد. اما با توجه به شرط مسئله فضای نمونه به $\binom{6}{3}=20$ عضو کاهش می‌یابد. حال پیشامد مطلوب را می‌نویسیم:

$$A=\{(6,5,4)\}$$

دقت کنید که حالات $(6,6,3)$, $(5,5,5)$ طبق فرض مسئله غیرقابل قبول هستند. بنابراین:

$$P(A)=\frac{1}{20}$$

توجه: در فضای نمونه‌ای کاهش یافته، به $\binom{6}{3}$ حالت، سه عدد متمایز از بین ۱ تا ۶ انتخاب کرده و به ۱ حالت (از بزرگ به کوچک) می‌چینیم.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

$$P(B-A)=۰/۳ \Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=۰/۳ \qquad (*)$$

$$P(A\mid A\cup B)=۰/۲۵ \Rightarrow \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{(*)} \frac{P(A)}{P(A)+۰/۳}=\frac{۱}{۴}$$

$$۴P(A)=P(A)+۰/۳ \Rightarrow ۳P(A)=۰/۳ \Rightarrow P(A)=۰/۱$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید ابتدا یک مهرهٔ قرمز، سپس یک مهرهٔ آبی و در انتها یک مهرهٔ زرد از جعبه خارج شود. در این صورت احتمال این پیشامد برابر است با:

$$\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

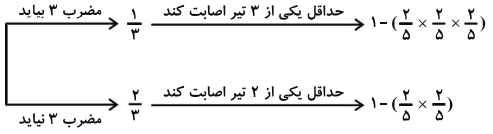
از طرفی چون مهره‌ها با جای‌گذاری خارج می‌شوند، احتمال خروج سه مهره با رنگ‌های متفاوت با هر ترتیب دیگری با احتمال فوق برابر است. حالت‌های مختلف برای ترتیب خروج رنگ‌ها برابر $۳!$ است، پس احتمال این‌که سه مهرهٔ خارج شده از سه رنگ مختلف باشند، برابر است با:

$$P(A)=۳!\times\frac{۱}{۳۶}=۶\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در پرتاب تاس، با احتمال $\frac{۱}{۳}$ عددی مضرب ۳ (اعداد سه و شش) ظاهر می‌شود. از طرفی پرتاب تیرها مستقل از یکدیگر است، پس مطابق نمودار درختی داریم:



بنابراین اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times(۱-\frac{۸}{۱۲۵})+\frac{۲}{۳}\times(۱-\frac{۴}{۲۵})$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۱۷}{۱۲۵}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۱}{۲۵}=\frac{۳۹}{۱۲۵}+\frac{۱۴}{۲۵}=\frac{۱۰۹}{۱۲۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

احتمال این‌که این دانش‌آموز به‌طور تصادفی به یک سوال، پاسخ صحیح بدهد، برابر $\frac{۱}{۳}$ است. سوال‌ها مستقل از یکدیگرند، بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\binom{۶}{۳}(\frac{۱}{۳})^۳(\frac{۲}{۳})^۳}{\binom{۶}{۴}(\frac{۱}{۳})^۴(\frac{۲}{۳})^۲}=\frac{۲۰\times\frac{۲}{۳}}{۱۵\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۴۰}{۱۵}=\frac{۸}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۶۸)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(شبنم غلامی)*

در صورت سوال گفته شده که رنگ مهره‌های اول و سوم یکسان است ولی در مورد رنگ مهرهٔ دوم اطلاعاتی داده نشده است و ممکن است رنگ آن با دو مهرهٔ دیگر یکسان باشد یا نباشد. به عبارت دیگر مانند آن است که مهرهٔ دوم اصولاً از کیسه خارج نشده است و می‌خواهیم رنگ دو مهرهٔ اولی که از کیسه خارج می‌کنیم یکسان باشد. بنابراین داریم:

$$P(A)=P(\text{هر دو قرمز})+P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هر دو سبز})$$

$$=\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۲}{۹}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۲۰}{۷۲}=\frac{۵}{۱۸}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق نمودار، جدول زیر را رسم می‌کنیم:

قد	[۱۵۰,۱۶۰)	[۱۶۰,۱۷۰)	[۱۷۰,۱۸۰)	[۱۸۰,۱۹۰)	[۱۹۰,۲۰۰)
فراوانی	۵	۷	۱۰	۶	۲

در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به گروه وسط برابر $\theta=\frac{۱۰}{۳۰}\times ۳۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ است. با حذف ۵ دانش‌آموز مورد نظر، ۲ نفر با قدهای ۱۷۱ و ۱۷۳ سانتی‌متر از گروه وسط حذف می‌شوند و زاویهٔ جدید گروه وسط برابر $\theta' = \frac{۸}{۲۵}\times ۳۶۰^\circ = ۱۱۵/۲^\circ$ می‌شود. بنابراین $۴/۸^\circ$ از زاویهٔ مربوط به گروه وسط در نمودار دایره‌ای کم می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

n داده را به صورت $a_۱, ..., a_n$ و سایر داده‌ها را به صورت $b_۱, b_۲, ..., b_{۳۰-n}$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{a_۱+...+a_n}{n}=۱۲ \Rightarrow a_۱+...+a_n=۱۲n$$

$$\frac{b_۱+...+b_{۳۰-n}}{۳۰-n}=۱۰ \Rightarrow b_۱+...+b_{۳۰-n}=۳۰۰-۱۰n$$

دو رابطه را جمع می‌کنیم: مجموع کل داده‌ها $= ۲n+۳۰۰$

$$\Rightarrow \text{میانگین کل ۳۰ داده} = \frac{۲n+۳۰۰}{۳۰}=۱۱/۶$$

$$\Rightarrow \frac{n}{۱۵}+۱۰=۱۱/۶ \Rightarrow \frac{n}{۱۵}=۱/۶ \Rightarrow n=۲۴ \quad \text{(مضرب ۴)}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

مجموع انحراف داده‌ها از میانگین‌شان برابر صفر است. پس:

$$۰+(-۱)+(-۲)+a+b+(-۴)=۰ \Rightarrow a+b=۷$$

$$\sigma^۲=\frac{۰^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲+a^۲+b^۲+(-۴)^۲}{۶}=\frac{a^۲+b^۲+۲۱}{۶}$$

از طرفی $\sigma=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$، بنابراین: $\frac{a^۲+b^۲+۲۱}{۶}=(\frac{۵\sqrt{۳}}{۳})^۲=\frac{۲۵}{۳}$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+۲۱=۵۰ \Rightarrow a^۲+b^۲=۲۹$$

پس: $(a-b)^۲=۲(a^۲+b^۲)-(a+b)^۲=۲(۲۹)-۷^۲$

$$=۵۸-۴۹=۹$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۹۴)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

میانگین داده‌های اولیه $= \frac{\sum_{i=۰}^{۱۰} x_i}{۱۰}=\frac{۱۲۰}{۱۰}=۱۲$

ضریب تغییرات $\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sigma}{۱۲}$

میانگین داده‌های جدید، برابر $\bar{x}'=k\bar{x}+\frac{۱}{k}=۱۲k+\frac{۱}{k}$ و انحراف معیار داده‌های جدید برابر $\sigma'=|k|\sigma$ می‌باشد. چون $k>۰$ پس:

ضریب تغییرات جدید $(CV)'=\frac{\sigma'}{\bar{x}'}=\frac{k\sigma}{۱۲k+\frac{۱}{k}}$

طبق فرض داریم: $(CV)'=\frac{۳}{۴}(CV)$

$$\Rightarrow \frac{k\sigma}{۱۲k+\frac{۱}{k}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{\sigma}{۱۲} \Rightarrow ۱۶k=۱۲k+\frac{۱}{k}$$

$$\Rightarrow ۴k=\frac{۱}{k} \Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{k>۰} k=\frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۹۱)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(ایمان ساریخانی)*

ابتدا داده‌های اولیه را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. با مشخص کردن مقادیر چارک‌های اول و سوم و میانهٔ داده‌ها، داده‌های داخل جعبه را مشخص می‌کنیم:

$$۳,۹,\ \underset{\substack{\downarrow\\ Q_۱\\ \text{(چارک اول)}}}{۱۰}\ \boxed{,۱۱,۱۲,\underset{\substack{\downarrow\\ Q_۲\\ \text{میانه}}}{۱۳},۱۴,۲۰,}\ \underset{\substack{\downarrow\\ Q_۳\\ \text{(چارک سوم)}}}{۲۱}\ ,۲۵,۲۷$$

داده‌های داخل جعبه: $۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۲۰ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۷۰}{۵} = ۱۴$

واریانس داده‌های داخل جعبه، قبل از تغییر به صورت زیر است:

$$\sigma^۲_{\text{قدیم}} = \frac{(۱۱-۱۴)^۲+(۱۲-۱۴)^۲+(۱۳-۱۴)^۲+(۱۴-۱۴)^۲+(۲۰-۱۴)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۵۰}{۵} = ۱۰$$

واریانس با کم و زیاد شدن داده‌ها تغییر نمی‌کند اما چون داده‌ها $\frac{۱}{۲}$ برابر شده پس واریانس جدید $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود و داریم:

$$\sigma^۲_{\text{جدید}} = \frac{۱}{۴}\times ۱۰ = ۲/۵$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

چون با حذف آن عدد، میانگین تغییری نکرده است پس عدد حذف شده همان میانگین بوده است. به زبان دیگر، داده‌ها در دو وضعیت به صورت زیر هستند:

داده‌های اولیه: $x_۱,\dots,x_۵,\ \bar{x} \Rightarrow \sigma^۲_۱ = \frac{\sum_{i=۱}^{۵}(x_i-\bar{x})^۲+(\bar{x}-\bar{x})^۲}{۶}$

داده‌های ثانویه: $x_۱,\dots,x_۵ \Rightarrow \sigma^۲_۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۵}(x_i-\bar{x})^۲}{۵}$

با کمی دقت درمی‌یابیم، صورت هر دو کسر یکسان هستند (چون $(\bar{x}-\bar{x})^۲ = ۰$)، پس آن را A در نظر می‌گیریم. حالا واریانس داده‌های ثانویه ۰/۲ بیشتر از داده‌های اولیه است. پس داریم:

$$\frac{A}{۵}-\frac{A}{۶} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow \frac{A}{۳۰} = \frac{۲}{۱۰} \Rightarrow A = ۶$$

$$\Rightarrow \sigma^۲_۱ = \frac{A}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

حالت‌های ممکن برای داده‌ها، به صورت مرتب شده، به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ a-۳,a+۳,b-۲,b+۲ \\ ۲)\ a-۳,b-۲,a+۳,b+۲ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{میانه}} \frac{(a+۳)+(b-۲)}{۲} = \frac{a+b+۱}{۲}$$

$$۳)\ a-۳,b-۲,b+۲,a+۳ \xrightarrow{\text{میانه}} \frac{(b-۲)+(b+۲)}{۲} = b$$

$$\left.\begin{array}{l} ۴)\ b-۲,a-۳,b+۲,a+۳ \\ ۵)\ b-۲,b+۲,a-۳,a+۳ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{میانه}} \frac{(a-۳)+(b+۲)}{۲} = \frac{a+b-۱}{۲}$$

بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای میانه به ترتیب $\frac{a+b+۱}{۲} = \frac{۱۰۱}{۲}$ و $\frac{a+b-۱}{۲} = \frac{۹۹}{۲}$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$\frac{101}{2}-\frac{99}{2}=1$$

تذکر: در حالت سوم، نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a-3<b-2 \Rightarrow a-b<1 \\ b+2<a+3 \Rightarrow a-b>-1 \end{cases} \Rightarrow |a-b|<1$$

بنابراین اختلاف مقدار b (میانه در این حالت) از مقادیر میانه در حالت‌های دیگر، قطعاً کمتر از ۱ است و داریم:

$$\frac{99}{2}<b<\frac{101}{2}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۸- **گزینهٔ «۲»** (ایمان ساریخانی)

چون واریانس ۱۱ دادهٔ اولیه، صفر است، پس همهٔ داده‌ها با هم برابرند:

$$\underbrace{x,x,...x}_{\text{۱۱ تا}}=\bar{x}$$

از طرفی طبق فرض، میانگین ۱۴ دادهٔ جدید با ۱۱ دادهٔ قدیم برابر است، پس میانگین مورد نظر برابر با میانگین سه دادهٔ اضافه شده خواهد بود:

$$\bar{x}=x=\frac{26+16+24}{3}=22$$

در نتیجه ۱۴ داده به صورت زیر است: $\underbrace{22,22,...,22}_{\text{۱۱ تا}},26,16,24$

واریانس این ۱۴ داده نیز برابر می‌شود با:

$$\sigma^2=\frac{11(22-22)^2+(26-22)^2+(16-22)^2+(24-22)^2}{14}$$

$$=\frac{56}{14}=4 \Rightarrow \text{انحراف معیار: } \sigma=\sqrt{4}=2$$

$$\text{ضریب تغییرات: } CV=\frac{2}{22}=\frac{1}{11}$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۹- **گزینهٔ «۱»** (روح‌اله حسنی)

چون تعداد کل داده‌ها برابر ۳۶ است، پس تعداد داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و بزرگ‌تر از چارک سوم، هر کدام برابر ۹ و تعداد داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۱۸ است. بنابراین:

$$\text{مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک اول} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} = 9a$$

$$\text{مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} = 9(a+8)$$

$$\text{مجموع داده‌های بین چارک اول و چارک سوم} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} = 18(a+7)$$

$$\text{مجموع تمام داده‌ها} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} = 36 \times 27/5 = 990$$

داریم:

$$9a+9(a+8)+18(a+7)=990$$

$$\Rightarrow 36a+72+126=990 \Rightarrow 36a=792 \Rightarrow a=\frac{792}{36}=22$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** (نیلوفر مهدوی)

x فقط می‌تواند برابر ۶ باشد، زیرا در این صورت، همهٔ داده‌ها فراوانی یکسانی دارند و در نتیجه، مطابق فرض، فاقد مد هستند. پس $2x-3=9$

دادهٔ ۴ به داده‌های اولیه اضافه می‌کنیم. داده‌های مرتب شده به صورت زیر خواهند بود:

$$1,1,3,\underbrace{3,4}_{Q_1=\frac{3+4}{2}=3/5},4,4,4,4,\underbrace{4}_{Q_2},4,4,4,\underbrace{4,5}_{Q_3=\frac{4+5}{2}=4/5},5,6,6$$

$$\Rightarrow \text{دامنهٔ میان چارکی} = IQR = Q_3-Q_1 = 4/5-3/5=1$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۳، ۹۱ و ۹۲)

۱- **گزینهٔ «۳»** *(نرگس کارگر)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) مقدار آماره ممکن است با مقدار پارامتر برابر باشد.

۲) آماره مشخصهٔ عددی است که توصیف کنندهٔ جنبهٔ خاصی از نمونه است.

۴) مقدار آماره از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر، ممکن است تغییر کند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸، ۱۰۸ و ۱۰۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

ابتدا تعداد اعداد را به دست می‌آوریم که برابر است با: $۸۲-۸+۱=۷۵$

از طرفی باید آن‌ها را به ۱۵ طبقه تقسیم‌بندی کنیم. پس در هر طبقه $d=\frac{۷۵}{۱۵}=۵$ **عدد قرار می‌گیرد. پس جملهٔ اول برابر ۱۱ و قدرنسبت برابر ۵ می‌باشد و جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت** $a_n=۱۱+(n-۱)\times ۵$ **می‌باشد. چون یازدهمین عددی که انتخاب می‌شود مورد نظر است پس** $n=۱۱$ **و در نتیجه:** $a_{۱۱}=۱۱+(۱۱-۱)\times ۵=۱۱+۱۰\times ۵=۶۱$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(رسول حاجی‌زاده)*

$$\frac{P_۱}{P_۲}=\frac{\frac{۲۴\times ۲۰}{n}}{\frac{۳۲\times ۵۰}{n}}=\frac{۴۸}{۱۶۰}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(نرگس کارگر)*

$\mu=\frac{۳+۴+۸+۸+۱۰+۱۱+۱۲}{۷}=\frac{۵۶}{۷}=۸$ **(میانگین جامعه)**

در صورتی نمونهٔ دو عضوی $\{a,b\}$ **میانگین جامعه را درست برآورد می‌کند که:**

$$\bar{x}=\frac{a+b}{۲}=۸\Rightarrow a+b=۱۶$$

فقط برای دو نمونهٔ $\{۴,۱۲\},\{۸,۸\}$ **رابطهٔ اخیر برقرار است، پس:**

تعداد کل نمونه‌های دو عضوی $=\binom{۷}{۲}=۲۱\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۲۱}$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(رسول حاجی‌زاده)*

بدون در نظر گرفتن m**، با ۵ دادهٔ دیگر به تعداد** $\binom{۵}{۲}$ **یعنی ۱۰ حالت میانگین به صورت‌های** $۵,۴,۴,۴,۴,۳,۳,۳,۲,۲$ **مواجه خواهیم شد. بنابراین سومین میله از سمت چپ که ارتفاعی برابر** $۴p$ **دارد، مربوط به دادهٔ ۴ است که ۴ بار تکرار شده است. پس اولین میله مربوط به ۲، دومین میله مربوط به ۳ و چهارمین میله نیز که ارتفاعی برابر** p **دارد مربوط به میانگین ۵ خواهد شد. یعنی میانگین ۵ (و یا کم‌تر) دیگر نباید تولید شود:**

$$\frac{۱+m}{۲}>۵\Rightarrow m>۹$$

به ازای $m=۱۱$ **طول میله‌های دیگر با نمودار رسم شده مطابقت دارد.**

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

$$\text{میانگین جامعه}=\frac{۲+۴+۶+\ldots+۲n}{n}=\frac{۲(۱+۲+\ldots+n)}{n}$$

$$=\frac{۲(\frac{n(n+۱)}{۲})}{n}=n+۱$$

$$\text{میانگین نمونه}=\frac{۲+۸+۱۶+۱۰}{۴}=\frac{۳۶}{۴}=۹$$

میانگین نمونه، برآوردی از میانگین جامعه است پس داریم:

$$n+۱=۹\Rightarrow n=۸$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید تعداد اعضای نمونهٔ اول برابر n **باشد. در این صورت تعداد اعضای نمونهٔ دوم برابر** $n+۱۲۸$ **است و در نتیجه داریم:**

$$\frac{(\sigma_{\bar{x}})_2}{(\sigma_{\bar{x}})_1}=\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}=\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\to\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{n}{n+128}}$$

$$\Rightarrow\frac{n}{n+128}=\frac{1}{9}\Rightarrow 9n=n+128\Rightarrow 8n=128\Rightarrow n=16$$

بنابراین مجموع تعداد اعضای دو نمونه برابر است با:

$$n_1+n_2=16+(16+128)=160$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۱۵)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

میانگین و انحراف معیار چهار نمونه را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}=\frac{0+1+3+4}{4}=2$$

$$\text{واریانس: }\sigma^2=\frac{(0-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(4-2)^2}{4}=\frac{10}{4}$$

$$\text{انحراف معیار: }\sigma=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

در نتیجه بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت زیر است:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\underbrace{2-\frac{\sqrt{10}}{2}}_{\simeq 0/4}\le\mu\le\underbrace{2+\frac{\sqrt{10}}{2}}_{\simeq 3/6}$$

اعداد ۱، ۲ و ۳ اعداد صحیح در این بازه هستند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۱۶)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهروی)*

برآورد بازه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت $[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ است. داریم:

$$\bar{x}=\frac{40/5+47/5}{2}=\frac{88}{2}=44$$

$$47/5-40/5=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 7=\frac{4\times 19/25}{\sqrt{n}}\Rightarrow 7=\frac{77}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=11\Rightarrow n=121$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\bar{x}=121\times 44=5324$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۱۶)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

ابتدا میانگین اعضای نمونهٔ انتخابی را محاسبه می‌کنیم: $(n=10)$

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+0+1+1+2+2+0+3}{10}=\frac{15}{10}=1/5$$

از طرفی واریانس برابر ۳/۲۴ می‌باشد. پس:

$$\sigma^2=3/24\Rightarrow\sigma=\sqrt{3/24}=1/8$$

بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه، عبارتست از:

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 1/5-\frac{2\times 1/8}{\sqrt{10}}\le\mu\le 1/5+\frac{2\times 1/8}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{3/6}{3/2}\le\mu\le\frac{3}{2}+\frac{3/6}{3/2}\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\le\mu\le\frac{3}{2}+\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{8}\le\mu\le\frac{21}{8}\Rightarrow a=\frac{3}{8}\ ,\ b=\frac{21}{8}$$

$$\Rightarrow 2a+b=\frac{6}{8}+\frac{21}{8}=\frac{27}{8}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۱۶)

۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

روش اول: طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د

یعنی ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ همواره درست است.

روش دوم: طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee (\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee (p \vee q)$$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۱)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(ندا صالح‌پور)*

گزینهٔ «۱»: رابطهٔ داده شده برای هر عدد حقیقی x برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $x = \frac{\pi}{2}$ باشد، $\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده و در نتیجه رابطه بی‌معنی است.

گزینهٔ «۲»: دو عدد صحیح x و $x+3$ با هم ۳ واحد اختلاف دارند و قطعاً یکی زوج و یکی فرد است و حاصل‌ضرب آن‌ها زوج می‌باشد.

گزینهٔ «۳»: رابطهٔ $x^2+1=0$ به ازای هیچ عدد حقیقی x برقرار نیست، زیرا x^2 همواره نامنفی و در نتیجه x^2+1 عددی مثبت است.

گزینه «۴»: عدد ۲، عددی زوج و اول است، پس گزارهٔ سوری نادرست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$(A - B') \cup [(A \cap B) \cap ((A - B) \cup B')]$$
$$= (A \cap B) \cup [(A \cap B) \cap ((A - B) \cup B')]$$

حال طبق قانون جذب، حاصل این عبارت برابر مجموعهٔ $(A \cap B)$ است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۴- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهروی)*

مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ دارای $2^8 = 256$ زیرمجموعه است. زیرمجموعه‌هایی که بزرگ‌ترین عضو آن‌ها از ۴ بزرگ‌تر باشد، متمم زیرمجموعه‌هایی است که هیچ عضوی بزرگ‌تر از ۴ ندارند که تعداد این دسته از زیرمجموعه‌ها برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$، یعنی $2^4 = 16$ است. در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با:

$$256 - 16 = 240$$

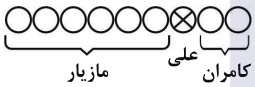
(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

برای محاسبهٔ تعداد اعضای فضای نمونهٔ کاهش یافته ابتدا از بین ۹ جایگاهی که برای اعضای تیم وجود دارد، باید ۳ تا انتخاب کنیم. علی را در جایگاه وسطی و مازیار را در جایگاه کوتاه‌تر و کامران را در جایگاه بلندتر قرار بدهیم، بنابراین:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7$$

پیشامد مطلوب آن است که علی در رتبه سوم باشد، پس:



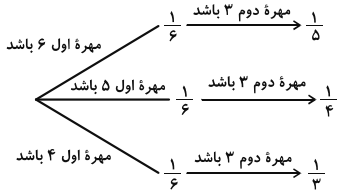
$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{6}{1} = 2 \times 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2 \times 6}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{7}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

تنها در صورتی شمارهٔ دومین مهرهٔ خارج شده می‌تواند ۳ باشد که شمارهٔ اولین مهرهٔ خارج شده، ۴، ۵ یا ۶ باشد. اگر A پیشامد شمارهٔ ۳ بودن دومین مهره و B_1 و B_2 و B_3 به‌ترتیب پیشامد شمارهٔ ۶، ۵ و ۴ بودن اولین مهره باشند، آنگاه طبق نمودار درختی داریم:



$$P(A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۷}{۶۰}$$

$$P(B_۲\mid A)=\frac{\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۶}\times\frac{۴۷}{۶۰}}=\frac{۱۵}{۴۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۲)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهروی)*

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱,۲,۲,۴,۷,۷,۷,۸,۹,۱۲,۱۳,۱۷,۱۷

مد داده‌ها برابر ۷ است و مجموع داده‌های کوچک‌تر از مد برابر است با:

$۱+۲+۲+۴=۹$

تعداد داده‌ها برابر ۱۳ است، پس دادهٔ هفتم میانه و میانگین داده‌های سوم و چهارم برابر چارک اول است.

$Q_۱=\frac{۲+۴}{۲}=۳$

مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک اول برابر است با: $۱+۲+۲=۵$

بنابراین اختلاف بین مجموع این دو دسته از داده‌ها برابر است با: $۹-۵=۴$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۵)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(خرشاد فرامرزی)*

فرض کنید ضریب تغییرات سن فعلی دانش‌آموزان این کلاس را با $CV_۱$ و ضریب تغییرات سن ۴ سال بعد آنها را با $CV_۲$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$\frac{CV_۲}{CV_۱}=\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}}{\frac{\sigma_۱}{\bar{x}_۱}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}\times\frac{\bar{x}_۱}{\bar{x}_۲}=\frac{۳}{۴}$$

اضافه شدن ۴ واحد به هر یک از داده‌ها، تأثیری روی انحراف معیار ندارد اما ۴ واحد به میانگین داده‌ها اضافه می‌کند، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow[\bar{x}_۲=\bar{x}_۱+۴]{\sigma_۱=\sigma_۲}\frac{\bar{x}_۱}{\bar{x}_۱+۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴\bar{x}_۱=۳\bar{x}_۱+۱۲\Rightarrow\bar{x}_۱=۱۲$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

بازهٔ $\left]\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\right[$ بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه است، یعنی طول بازهٔ اطمینان برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=۱۳/۲-۱۲/۶\xrightarrow{n=۱۰۰}\frac{۴\sigma}{۱۰}=۰/۶\Rightarrow ۴\sigma=۶\Rightarrow\sigma=۱/۵$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر بخواهیم n را به کمک پارامتر میانگین برآورد کنیم آن‌گاه میانگین نمونه و جامعه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{میانگین نمونه}=\frac{۱+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰}{۵}=۱۵\\ \text{میانگین جامعه}=\frac{n+۱}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{n+۱}{۲}=۱۵\Rightarrow n=۲۹$$

همچنین برای برآورد n به کمک پارامتر میانه، باید میانهٔ نمونه را با میانهٔ جامعه برابر قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{میانهٔ نمونه: }۱,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\Rightarrow Q_۲=۱۸\\ \text{میانهٔ جامعه}=\frac{n+۱}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{n+۱}{۲}=۱۸\Rightarrow n=۳۵$$

بنابراین اختلاف برآورد n برابر ۶ است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

ارزش گزارهٔ شرطی فوق زمانی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد:

$$\underbrace{(p \Leftrightarrow (r \vee s))}_{\text{درست}} \Rightarrow \underbrace{(p \vee q)}_{\text{نادرست}}$$

از نادرست بودن $p \vee q$ نیز نتیجه می‌گیریم که p و q هر دو نادرست‌اند.

از درست بودن $p \Leftrightarrow (r \vee s)$ و نادرست بودن p نتیجه می‌شود که گزارهٔ $r \vee s$ نادرست است، یعنی r و s هر دو نادرست‌اند.

داریم $p \wedge q \equiv F$ و در بین گزاره‌های داده شده، تنها ارزش $s \wedge r$ نادرست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۴ تا ۱۱)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(رسول هاشی‌زاده)*

راه‌حل اول: با توجه به جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی داده شده فقط در سطر چهارم محقق می‌شود که در آن $q \equiv p \equiv F$ و در نتیجه $\sim p \wedge \sim q$ ارزش درستی پیدا می‌کند.

p	q	~ p	~ q	p ∨ q	سمت‌چپ	~ p ∨ q	سمت‌راست
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	(T)	T	(T)

راه‌حل دوم: استفاده از جبر گزاره‌ها:

$$(p \vee q) \Rightarrow \sim q \equiv p \Rightarrow (\sim p \vee q)$$

$$\underbrace{\sim (p \vee q)}_{(\sim p \wedge \sim q)} \vee \sim q \equiv \sim p \vee (\sim p \vee q)$$

$$\xrightarrow{\text{جذب}} \sim q \equiv \sim p \vee q \xrightarrow{q \wedge} q \wedge \sim q \equiv q \wedge (\sim p \vee q)$$

$$\xrightarrow{\text{جذب}} F \equiv q$$

$$\sim q \equiv \sim p \vee q \Rightarrow T \equiv \sim p \vee F \Rightarrow \sim p \equiv T \Rightarrow p \equiv F$$

$$\Rightarrow \sim p \wedge \sim q \equiv T$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۴ تا ۱۱)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز، ابتدا گزارهٔ هم‌ارز $(p \Leftrightarrow q) \wedge p$ را می‌یابیم:

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge p \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \wedge p$$

$$\equiv ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \wedge p$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge ((\sim q \vee p) \wedge p) \xrightarrow{\text{جذب}} \equiv (\sim p \vee q) \wedge p$$

$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) \equiv F \vee (q \wedge p) \equiv p \wedge q$$

بنابراین: $\sim [((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim p] \equiv \sim [(p \wedge q) \Rightarrow \sim p]$

$$\equiv \sim [\sim (p \wedge q) \vee \sim p] \equiv (p \wedge q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۴ تا ۱۱)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(نرگس کارگر)*

می‌دانیم عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ است. در نتیجه عکس نقیض گزارهٔ مورد نظر برابر است با:

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۷ و ۸)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(رسول حاجی‌زاده)*

برای حداکثر شدن $5m-n$ باید m حداکثر و n حداقل باشد. برای درست شدن ارزش گزارهٔ اول، حداکثر مقدار m برابر ۴ است زیرا $5^2 - 23$ کمتر از صفر نیست. کوچک‌ترین عدد طبیعی که به جای x بتوان قرار داد تا $\frac{7x+2}{11}$ عددی طبیعی شود برابر $n=6$ است. بنابراین:

$$(5m-n)_{max} = 5\times 4 - 6 = 14$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

برای هر عدد حقیقی مثبت t داریم:

$$(t-1)^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 0 \Rightarrow t^2 + 1 \geq 2t$$

$$\xrightarrow{+t>0} t + \frac{1}{t} \geq 2$$

اکنون اگر قرار دهیم $t = x-3 > 0$ آنگاه $x > 3$ و داریم:

$$x - 3 + \frac{1}{x-3} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x-3} \geq 5$$

بنابراین گزارهٔ «$\forall x \in (a, +\infty)\ ;\ x + \frac{1}{x-3} \geq b$» وقتی درست است که $a \geq 3$ و $b \leq 5$ باشد، پس $m=3$ و $n=5$ و در نتیجه $m+n=8$.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(عباس الهی)*

با توجه به جدول داده شده از عبارت یا گزارهٔ $p \Rightarrow q$ متوجه می‌شویم که (q نادرست) یا (q درست و p نیز درست) بوده است ولی با توجه به نادرست بودن گزارهٔ $p \wedge q$ نتیجه می‌گیریم که حداقل یکی از دو گزارهٔ p و q نادرست بوده‌اند پس یعنی q حتماً نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) عبارت $\frac{6x+1}{5} \neq -1$ به ازای $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ درست است و تنها به ازای $x=-1$ برقرار نیست و لذا ارزش گزارهٔ اول درست است.

۳) عبارت $۲^{x}-۱$ به ازای $x=۲$ عددی مرکب است و در نتیجه بـه ازای هر x طبیعی لزوماً اول نیست و لذا ارزش گزارهٔ سوم درست است.

۴) عبارت داده شده به ازای $x=-۲$ تعریف نشده است پس لزوماً بـه ازای هر x حقیقی برقرار نیست و لذا ارزش گزارهٔ چهارم درست است.

تنها گزینهٔ «۲» باقی می‌ماند که مثلاً به ازای $x=۱$ برابر ۳ می‌شود کـه عضـو اعداد اول است، پس این‌طور نیست که به ازای هر x طبیعـی، حاصـل $۲^{x}+۱$ متعلق به اعداد اول نباشد، پس ارزش این گزاره نادرست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(روح‌اله حسنی)*

مجموعهٔ A شامل اعداد طبیعی است که ۳۶ بر آن‌ها بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های A برابر $۵۱۲=۲^{۹}$ است. با جای‌گذاری مقادیر $۱,۲,...,۱۰$ در عبـارت $\frac{x-۱}{۳}$، مـی‌بینـیم بـه ازای $x=۴$، $x=۷$ و $x=۱۰$، حاصل آن عددی طبیعی است پس: $B=\{۴,۷,۱۰\}$

پس تعـداد زیرمجموعـه‌هـای B برابـر اسـت بـا $۸=۲^{۳}$. بنـابراین تعـداد زیرمجموعـه‌هـای مجموعـهٔ A، $۵۰۴=۸-۵۱۲$ واحـد بیشـتر از تعـداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

فرض کنیم مجموعـهٔ A دارای n عضـو باشـد. در ایـن صـورت مجموعـهٔ A دارای ۲^{n} زیرمجموعه و همچنین $۲^{n-۲}$ زیرمجموعه شامل اعداد ۱ و ۲ اسـت.

پس طبق فرض داریم: $۲^{n}-۲^{n-۲}=۹۶\Rightarrow ۲^{n-۲}(۲^{۲}-۱)=۹۶$

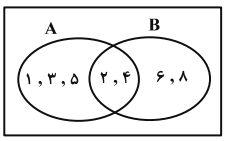
$$\Rightarrow ۲^{n-۲}=۳۲\Rightarrow n-۲=۵\Rightarrow n=۷$$

$P(A)$ یا مجموعه توانی A شامل $۱۲۸=۲^{۷}$ عضو است که عضوهای آن همگی زیرمجموعه‌های A هستند. در مجموعهٔ $P(A)$، تعداد مجموعـه‌هـای سه عضوی برابر هستند با: $\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳!}=۳۵$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با توجه به نمودار ون زیر، مجموعهٔ C باید یک عضو از $A-B$ و یک عضـو از $B-A$ و یک عضو از $A\cap B$ داشته باشـد کـه در ایـن صـورت تعـداد حالت‌ها برابر است با: $\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱۲$



توجه: نشـان دهیـد کـه رابطـهٔ $n(A\cap C)=n(B\cap C)=m$ بـه ازای مقادیر ۳، ۱ و صفر برای m برقرار نیست و فقط $m=۲$ قابل قبول است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها، عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$(A-B')\cup[(A\cup B)\cap((A-B)\cup B')]$$

$$=(A\cap B)\cup[(A\cup B)\cap(\underbrace{(A\cap B')\cup B'}_{=B'\ \text{قانون جذب}})]$$

$$=(A\cap B)\cup[\underbrace{(A\cup B)\cap B'}_{(A\cup B)-B}]=(A\cap B)\cup(A-B)=A$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

با توجه به نمودار داده شده، $A=(4,+\infty)$ و $B=(2,+\infty)$ است.

بنابراین: $A'=(-\infty,4]\ ,\ B'=(-\infty,2]$

پس $B'\times A'=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\ ,\ x\le 2\ ,\ y\le 4\}$ و بنابراین:

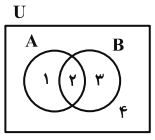
$$\mathbb{N}^2\cap(B'\times A')=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N}\ ,\ x\le 2\ ,\ y\le 4\}$$

پس این مجموعه، شامل زوج مرتب‌های (x,y) است که در آن $x\in\{1,2\}$ و $y\in\{1,2,3,4\}$ می‌باشد. بنابراین تعداد عضوهای این مجموعه برابر است با: $2\times 4=8$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر نواحی ایجاد شده توسط مجموعه‌های A و B را مطابق شکل شماره‌گذاری کنیم، آنگاه با توجه به فرض داریم:



$$(A-B)\cup(B-A)=\{1\}\cup\{3\}=\{1,3\}$$

$$A'\cup B'=\{3,4\}\cup\{1,4\}=\{1,3,4\}$$

طبق فرض، دو مجموعهٔ فوق برابر یکدیگرند، پس ناحیهٔ (۴) تهی است. از طرفی داریم: $A'\cap B'=\{3,4\}\cap\{1,4\}=\{4\}$

بنابراین $A'\cap B'=\varnothing$ است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(رسول حاجی‌زاده)*

داریم: $|(A\times C)-(B\times D)|=|A\times C|-|(A\times C)\cap(B\times D)|$

$$=|A||C|-|(A\cap B)\times(C\cap D)|$$

$$=4\times 5-|A\cap B||C\cap D|=20-3\times 2=14$$

توجه: منظور از $|A|$، همان تعداد اعضای مجموعهٔ A، یعنی $n(A)$ است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

در بین اعداد ۱ تا ۲۰، مجموعه‌های A و B را به ترتیب مجموعه اعداد با سه مقسوم‌علیه طبیعی و مجموعهٔ اعداد مربع کامل می‌گیریم. داریم:

$A=\{4,9\}$: اعداد با سه مقسوم‌علیه طبیعی

$B=\{1,4,9,16\}$: اعداد مربع کامل

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{2+4-2}{20}=\frac{1}{5}=0/2$$

روش دوم: عددی که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن فرد باشد، حتماً مربع کامل است، پس $A\subseteq B$ و در نتیجه $A\cup B=B$ است. بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

(آمار و احتمال- احتمال- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(رسول حاجی‌زاده)*

پیشامد مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$A-B=\{(1,1),(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}$$

$n(S)=6\times 6=36$: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید $P(B-A)=x$ باشد. در این صورت طبق فرض، $P(A)=\frac{۳}{۲}x$

و $P(A'\cap B')=۳x$ است. طبق قوانین احتمال داریم:

$$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=۱-P(A\cup B)$$

$$=۱-(P(A)+\underbrace{P(B)-P(A\cap B)}_{P(B-A)})$$

$$\Rightarrow ۳x=۱-(\frac{۳}{۲}x+x)\Rightarrow \frac{۱۱}{۲}x=۱\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۱}$$

در نتیجه: $P(A'\cap B')=۳x=\frac{۶}{۱۱}\Rightarrow P(A\cup B)=۱-\frac{۶}{۱۱}=\frac{۵}{۱۱}$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(شبنم غلامی)*

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۸ و ۱۲ بخش‌پذیر هستند. در این صورت داریم:

$$n(A)=[\frac{۲۰۰}{۸}]=۲۵$$

$$n(B)=[\frac{۲۰۰}{۱۲}]=۱۶$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۲۰۰}{۲۴}]=۸$$

زیرمجموعه‌ای از S که اعضای آن دقیقاً بر یکی از دو عدد ۸ یا ۱۲ بخش‌پذیر باشند، معادل مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)$$

$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$=\frac{۲۵}{۲۰۰}+\frac{۱۶}{۲۰۰}-\frac{۲\times ۸}{۲۰۰}=\frac{۲۵}{۲۰۰}=\frac{۱}{۸}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیی)*

مجموع احتمال‌ها روی فضای نمونه‌ای برابر ۱ است، لذا طبق فرض داریم:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}+(\frac{۱}{۱۰}+d)+(\frac{۱}{۱۰}+۲d)+(\frac{۱}{۱۰}+۳d)$$

$$+(\frac{۱}{۱۰}+۴d)+(\frac{۱}{۱۰}+۵d)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۰}+۱۵d=۱\Rightarrow ۱۵d=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow d=\frac{۴}{۱۵۰}=\frac{۲}{۷۵}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(۱)+P(۲)=\frac{۱}{۱۰}+(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۴}{۱۵۰})=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۴}{۱۵۰}=\frac{۳۴}{۱۵۰}=\frac{۱۷}{۷۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(روح‌اله حسنی)*

داریم: $P(a_k)=\frac{a}{k(k+۱)}=a(\frac{۱}{k(k+۱)})=a(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱})$

چون $P(S)=۱$ پس: $P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_۹)=۱$

$$\Rightarrow a(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲})+a(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+a(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴})+...+a(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۰})=۱$$

$$\Rightarrow a[(۱-\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴})+...+(\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۰})]=۱$$

$$\Rightarrow a(۱-\frac{۱}{۱۰})=۱\Rightarrow a\times\frac{۹}{۱۰}=۱\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۹}$$

بنابراین: $P(A)=P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۴)+P(a_۵)$

$$=a(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+a(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴})+a(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵})+a(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶})$$

$$=a(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶})=\frac{a}{۳}=\frac{۱۰}{۹}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۲۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با توجه به فرض داریم:

$$\begin{cases} A: \text{پیشامد این‌که هر دو مهرهٔ خارج شده، قرمز باشند} \\ B: \text{پیشامد این‌که دو مهرهٔ خارج شده، همرنگ باشند} \end{cases}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

ابتدا احتمال پیشامد $A'\cap B'$ را می‌یابیم:

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)$$
$$=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$
$$=۱-(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶})=۱-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

داریم:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A'\cap B')}{۱-P(B)}$$
$$=\frac{\frac{۷}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۷}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۷}{۸}$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A'\cap B')}{۱-P(A)}$$
$$=\frac{\frac{۷}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۷}{۱۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۷}{۹}$$

در نتیجه:

$$P(A'|B').P(B'|A')=\frac{۷}{۸}\times\frac{۷}{۹}=\frac{۴۹}{۷۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

پیشامد اعلام تعطیلی توسط وزارت بهداشت را B و توسط وزارت آموزش و پرورش را A درنظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} P(B)=۰/۴ \\ P(A)=۰/۳ \\ P(A|B)=۰/۵\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۵\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲ \end{cases}$$

احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(B)}$$
$$=\frac{۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))}{۱-P(B)}$$
$$=\frac{۱-(۰/۴+۰/۳-۰/۲)}{۱-۰/۴}=\frac{۱-۰/۵}{۰/۶}=\frac{۰/۵}{۰/۶}=\frac{۵}{۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

حالت‌هایی که مجموع دو تاس عددی دو رقمی باشد، عبارتند از:

$$\{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

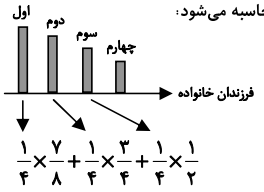
پس احتمال دو رقمی بودن مجموع دو تاس برابر $\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$ و در نتیجه احتمال یک رقمی بودن مجموع دو تاس برابر $۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$ است. در پرتاب ۴ سکه، احتمال یکسان بودن تعداد پشت و رو، برابر $\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}$ و همین احتمال در پرتاب ۶ سکه، برابر $\frac{\binom{۶}{۳}}{۲^۶}$ است، بنابراین در صورتی که پیشامد مورد نظر سوال را با A نمایش دهیم، آنگاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=\underbrace{\frac{۵}{۶}}_{\text{مجموع یک‌رقمی}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}+\underbrace{\frac{۱}{۶}}_{\text{مجموع دو رقمی}}\times\frac{\binom{۶}{۳}}{۲^۶}$$
$$=\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۱۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۲۰}{۶۴}=\frac{۳۰}{۹۶}+\frac{۵}{۹۶}=\frac{۳۵}{۹۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

احتمال آنکه فرزندی که انتخاب می‌شود خواهر کوچک‌تر داشته باشد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}$$

احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۸}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۷}{۷+۶+۴}=\frac{۷}{۱۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۷)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(روح‌اله حسنی)*

A و B به ترتیب پیشامدهای انتخاب محصول تولیدی از دستگاه‌های A و B هستند. طبق فرض داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{11}{9}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}=\frac{11}{20}$$

$$\xrightarrow{P(A)+P(B)=P(A\cup B)=1} P(A)=\frac{11}{20}\ ,\ P(B)=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$$

همچنین M را پیشامد معیوب بودن محصول در نظر می‌گیریم. پس اگر $P(M\mid A)=\frac{x}{100}$ آن‌گاه $P(M\mid B)=\frac{x+2}{100}$، اما بنابر قانون بیز داریم:

$$P(A\mid M)=\frac{P(M\mid A)P(A)}{P(M\mid A)P(A)+P(M\mid B)P(B)}$$

$$\xrightarrow{P(A\mid M)=\frac{11}{26}} \frac{11}{26}=\frac{\frac{11}{20}(\frac{x}{100})}{\frac{11}{20}(\frac{x}{100})+\frac{9}{20}(\frac{x+2}{100})}$$

$$\Rightarrow\frac{11}{26}=\frac{11x}{\underbrace{11x+9x+18}_{20x+18}}\Rightarrow 26x=20x+18$$

$$\Rightarrow 6x=18\Rightarrow x=3$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(M\mid B)=\frac{3+2}{100}=\frac{5}{100}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۰)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(عباس الهی)*

چون دو پیشامد $\{a,d\}$ و $\{a,b\}$ مستقل‌اند، پس:

$$P(\{a,b\}\cap\{a,d\})=P(\{a,b\})\times P(\{a,d\})$$

$$\Rightarrow P(a)=P(\{a,b\})\times P(\{a,d\})\qquad (*)$$

از طرفی:

$$\begin{cases}P(\{a,d\})=P(a)+P(d)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}\\ P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=\frac{1}{4}+P(b)\end{cases}$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ (*) داریم:

$$\frac{1}{4}=(\frac{1}{4}+P(b))\times\frac{11}{12}\Rightarrow\frac{1}{4}+P(b)=\frac{3}{11}$$

$$\Rightarrow P(b)=\frac{3}{11}-\frac{1}{4}=\frac{1}{44}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(روح‌اله حسنی)*

اگر در پنجمین پرتاب، برای دومین بار عدد ۳ رو شود، آنگاه در ۴ پرتاب اول قطعاً فقط یک بار عدد ۳ رو شده است که با توجه به مستقل بودن پرتاب‌ها، احتمال آن برابر است با:

$$\binom{4}{1}\times\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

با در نظر گرفتن پرتاب پنجم، احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$4\times(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3=4\times\frac{1}{36}\times\frac{125}{216}=\frac{125}{9\times216}=\frac{125}{1944}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

احتمال بسته بودن هر کلید $\frac{1}{4}$ است. برای این‌که جریان در لامپ L برقرار باشد باید کلید A حتماً بسته باشد و از دو شاخهٔ B و $\{C,D\}$ نیز حداقل یکی از شاخه‌ها بسته باشد. احتمال برقراری جریان در یکی از شاخه‌های B یا $\{C,D\}$ برابر است با:

$$P\{C,D\}+P(B)-P(\{C,D\}\cap B)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{4+16-1}{64}=\frac{19}{64}$$

در نتیجه احتمال روشن شدن لامپ L برابر می‌شود با:

$$P=\frac{1}{4}\times\frac{19}{64}=\frac{19}{256}$$

تذکر: احتمال بسته بودن کلیدها دوبه‌دو مستقل از یکدیگرند.

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید پیشامد خارج شدن دو مهرهٔ همرنگ در حالت بدون جای‌گذاری را با A و همین پیشامد در حالت با جای‌گذاری را با B نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$P(A)=\underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}}_{\text{دو مهرهٔ آبی}}+\underbrace{\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}}_{\text{دو مهرهٔ قرمز}}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

$$P(B)=\underbrace{\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}}_{\text{دو مهرهٔ آبی}}+\underbrace{\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}}_{\text{دو مهرهٔ قرمز}}+\underbrace{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}_{\text{دو مهرهٔ زرد}}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$$

بنابراین خواستهٔ سوال برابر است با:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{18}}=\frac{24}{35}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

آمار و احتمال

۱- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

مطابق فرض داریم:

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 4 \\ CV = \frac{1}{2} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \end{cases}$$: داده‌های اولیه

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\text{واریانس داده‌های اولیه} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = 4 \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 4n$$

حال اگر سه دادهٔ ۴ (برابر میانگین داده‌های قبلی)، به این داده‌ها اضافه کنیم میانگین داده های جدید تغییر نکرده و مجموع مجذورهای انحراف از میانگین داده‌ها نیز تغییری نخواهد کرد.

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n , 4 , 4 , 4$$: داده‌های جدید

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}' = 4 \\ (CV)' = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sigma'}{4} \Rightarrow \sigma' = \sqrt{3} \Rightarrow \sigma'^2 = 3 \end{cases}$$

$$\sigma'^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}')^2}{n'} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+3} = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{4n}{n+3} \Rightarrow 3n + 9 = 4n \Rightarrow n = 9$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر فراوانی نمرات ۱ تا ۵ را با $f_1 , \dots , f_5$ و فراوانی نسبی آن‌ها را با $F_1 , \dots , F_5$ نمایش دهیم، آن‌گاه طبق رابطهٔ میانگین وزنی داده‌ها داریم: (N تعداد کل داده‌ها است.)

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{N} = \frac{f_1}{N} x_1 + \frac{f_2}{N} x_2 + \dots + \frac{f_n}{N} x_n$$
$$= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n$$

از طرفی فراوانی نسبی هر داده در نمودار دایره‌ای برابر نسبت زاویهٔ متناظر با آن داده به 360° است، پس داریم:

$$F_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} \quad , \quad F_2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6} \quad , \quad F_3 = \frac{75^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{5}{24} \times 3 + F_4 \times 4 + F_5 \times 5 = \frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow 4F_4 + 5F_5 = \frac{17}{6} - \frac{29}{24} = \frac{39}{24} = \frac{13}{8}$$

از طرفی مجموع فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$F_4 + F_5 = 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{5}{24}) = 1 - \frac{15}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} F_4 + F_5 = \frac{3}{8} \\ 4F_4 + 5F_5 = \frac{13}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_4 = \frac{2}{8} \\ F_5 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_5}{F_4} = \frac{1}{2}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۷۲، ۷۳ و ۸۱)

۳- **گزینهٔ «۳»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اعضای دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\underbrace{a}_{} \ , \ \underbrace{a+4}_{} \ , \ \underbrace{a+8}_{} \ , \ \underbrace{a+12}_{} \ , \ \underbrace{a+16}_{} \ , \ \underbrace{a+20}_{}$$

اگر جمله‌های مشخص شده را از هم کم کنیم، اعضای دنبالهٔ دوم برابر ۴ , ۸ , ۱۶ است و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{میانگین دنبالهٔ اول}: \bar{x}_1 = a + 10 \\ \text{میانگین دنبالهٔ دوم}: \bar{x}_2 = \frac{28}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{28}{3} = a + 10 - \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 6$$

پس $a + b = 8$ به دست می‌آید.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

برای حل سریع سؤال، همهٔ داده‌ها را منهای عددی دلخواه مانند ۱۳ (که بیشترین فراوانی را دارد) می‌کنیم.

$x_i - 13$	-6	-1	0	4	6
f_i	۱۲	۱۸	۳۵	۱۰	۲۵

در نتیجه میانگین داده‌ها به صورت زیر می‌شود:

$$x = \frac{-72 - 18 + 0 + 40 + 150}{12 + 18 + 35 + 10 + 25} + 13 = 1 + 13 = 14$$

داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد مد نام دارد، پس: $\text{مد} = 13$

۱۰۰ داده داریم که میانگین دو دادهٔ وسط، برابر میانهٔ داده‌ها است، پس:

میانگین داده‌های پنجاهم و پنجاه و یکم = میانه $= 13$

در نتیجه: $\text{میانگین} = \text{میانه} + \text{مد} + \text{میانه} = 14 + 13 + 13 = 40$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

فرض می‌کنیم تعداد داده‌های اولیهٔ n و واریانس آن‌ها σ^2 می‌باشد، طبق فرض:

$$\begin{cases} \frac{n}{n+3} \sigma^2 = 27 \\ \frac{n}{n-3} \sigma^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \frac{n-3}{n+3} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5n - 15 = 3n + 9 \Rightarrow 2n = 24 \Rightarrow n = 12$$

بنابراین:

$$\frac{۱۲}{۱۲+۳}\sigma^۲ = ۲۷ \Rightarrow \sigma^۲ = ۲۷\times\frac{۱۵}{۱۲} = ۲۷\times\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱۳۵}{۴} = ۳۳/۷۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۶- **گزینهٔ «۱»** (نیلوفر مهدوی)

ابتدا داده‌ها را بدون در نظر گرفتن دادهٔ k مرتب می‌کنیم:

$$۸ , ۸ , ۸ , ۱۳ , ۲۱ , ۲۲ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۷$$

واضح است که مقدار k هر چه باشد، مد داده‌ها تغییری نمی‌کند و برابر ۸ است. از طرفی حاصل‌ضرب میانه و مد برابر ۱۳۶ است پس مقدار میانه برابر می‌شود با:

$$\frac{۱۳۶}{۸} = ۱۷$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $k = ۱۰ : ۸ , ۸ , ۸ , ۱۰ , \underbrace{۱۳ , ۲۱}_{Q_۲} , ۲۲ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۷$

$$Q_۲ = \frac{۱۳+۲۱}{۲} = ۱۷$$

۲) $k = ۲۳ : ۸ , ۸ , ۸ , ۱۳ , \underbrace{۲۱ , ۲۲}_{Q_۲} , ۲۳ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۷$

$$Q_۲ = \frac{۲۱+۲۲}{۲} = ۲۱/۵$$

۳) $k = ۱۷ : ۸ , ۸ , ۸ , ۱۳ , \underbrace{۱۷ , ۲۱}_{Q_۲} , ۲۲ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۷$

$$Q_۲ = \frac{۱۷+۲۱}{۲} = ۱۹$$

۴) $k = ۱۴ : ۸ , ۸ , ۸ , ۱۳ , \underbrace{۱۴ , ۲۱}_{Q_۲} , ۲۲ , ۲۳ , ۲۴ , ۲۷$

$$Q_۲ = \frac{۱۴+۲۱}{۲} = ۱۷/۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۵)

۷- **گزینهٔ «۲»** (شبنم غلامی)

می‌دانیم اگر انحراف معیار و واریانس داده‌های $x_۱ , x_۲ , ... , x_n$ به ترتیب برابر σ و $\sigma^۲$ باشد، آن‌گاه انحراف معیار و واریانس داده‌های $ax_۱+b , ax_۲+b , ... , ax_n+b$ به ترتیب برابر $|a|\sigma$ و $a^۲\sigma^۲$ است. با توجه به این موضوع، انحراف معیار داده‌های x , y , z نصف انحراف معیار داده‌های $۲x+۳ , ۲y+۳ , ۲z+۳$ یعنی برابر ۴ و انحراف معیار داده‌های $\frac{x}{۲}-۱ , \frac{y}{۲}-۱ , \frac{z}{۲}-۱$ نصف انحراف معیار داده‌های x , y , z یعنی برابر ۲ است و در نتیجه واریانس این دسته از داده‌ها برابر ۴ خواهد بود.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۸- **گزینهٔ «۱»** (شبنم غلامی)

می‌دانیم برای هر سری داده‌های آماری، مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است، یعنی مجموع تفاضل میانگین از داده‌ها (یا برعکس، مجموع تفاضل داده‌ها از میانگین) همواره برابر صفر می‌شود، پس میانگین داده‌های اولیه برابر ۶ است. از طرفی با ۲ برابر شدن داده‌ها، واریانس آن‌ها ۴ برابر می‌شود، پس واریانس داده‌های اولیه برابر $\frac{۱۶}{۴} = ۴$ و انحراف معیار آن‌ها برابر ۲ است. در نتیجه ضریب تغییرات این داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۹- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرده و میانه و چارک‌های اول و سوم آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$۱۰ , ۱۲ , ۱۴ , \underset{Q_۱}{۱۵} , ۱۶ , ۱۸ , ۱۹ , \underset{Q_۲}{۲۳} , ۲۵ , ۲۷ , ۳۱ , \underset{Q_۳}{۳۲} , ۳۴ , ۴۱ , ۴۲$$

بنابراین داده‌های داخل و روی جعبه عبارتند از:

$$۱۵ , \underbrace{۱۶ , ۱۸}_{Q'_۱} , ۱۹ , \underset{Q'_۲}{۲۳} , ۲۵ , \underbrace{۲۷ , ۳۱}_{Q'_۳} , ۳۲$$

چارک‌های اول و سوم داده‌های این دسته را محاسبه می‌کنیم:

$$Q'_۱ = \frac{۱۶+۱۸}{۲} = ۱۷$$

$$Q'_۳ = \frac{۲۷+۳۱}{۲} = ۲۹$$

در نتیجه دامنهٔ میان چارکی داده‌های داخل و روی جعبه برابر است با:

$$IQR = Q'_۳ - Q'_۱ = ۲۹ - ۱۷ = ۱۲$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا به کمک میانگین نمرات اولیه، مقدار a یعنی فراوانی نمرهٔ ۱۴ را محاسبه می‌کنیم. طبق رابطهٔ میانگین وزنی داده‌ها داریم:

$$۱۲/۵ = \frac{۲\times۸+۵\times۱۰+۵\times۱۲+a\times۱۴+۳\times۱۶}{۲+۵+۵+a+۳}$$

$$\Rightarrow ۱۲/۵ = \frac{۱۴a+۱۷۴}{a+۱۵} \Rightarrow ۱۲/۵a+۱۸۷/۵ = ۱۴a+۱۷۴$$

$$\Rightarrow ۱/۵a = ۱۳/۵ \Rightarrow a = ۹$$

با حذف نمرات ۸ و ۱۰، میانگین جدید داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۵\times۱۲+۹\times۱۴+۳\times۱۶}{۵+۹+۳} = \frac{۲۳۴}{۱۷} = ۱۳/۷۶$$

توجه: میانگین نمرات کلاس (یا همان معدل کلاس)، تا دو رقم اعشار بیان می‌شود.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۱- **گزینهٔ «۲»** *(جواد ترکمن)*

چون ۱۵ نفر انتخاب شده است، پس ۱۵ طبقه وجود دارد. چون $\frac{۲۱۰}{۱۵}=۱۴$، پس تعداد افراد داخل هر طبقه ۱۴ نفر است و فاصلهٔ دو شماره متوالی منتخب (قدرنسبت) برابر ۱۴ است. از طرفی $۱۰+(۱۴)\times۶=۹۴$، پس عدد ۹۴ از طبقهٔ هفتم می‌باشد و نفر دهم این طبقه است. پس از هر طبقه نفر دهم انتخاب می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(جواد ترکمن)*

$$|\mu-\bar{x}|\le\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\xrightarrow{|\mu-\bar{x}|<۱}\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}<۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲\times۳}{\sqrt{n}}<۱\Rightarrow\sqrt{n}>۶\Rightarrow n>۳۶\Rightarrow \min(n)=۳۷$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

می‌دانیم میانگین جامعه (μ)، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، عددی در بازهٔ $[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{n}]$ است، پس طبق فرض داریم:

$$\bar{x}=\frac{۴/۱+۴/۷}{۲}=۴/۴$$

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=۴/۷-۴/۱\Rightarrow\frac{۴\times۲/۲۵}{\sqrt{n}}=۰/۶\Rightarrow\sqrt{n}=۱۵\Rightarrow n=۲۲۵$$

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n}{n}\Rightarrow ۴/۴=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n}{۲۲۵}$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n=۹۹۰$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(شبنم غلامی)*

بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای برآورد میانگین به صورت زیر است:

$$[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$$

بنابراین طول فاصلهٔ اطمینان برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بدیهی است با افزایش اندازهٔ نمونه، مخرج کسر بزرگ شده و در نتیجه طول فاصلهٔ اطمینان کاهش می‌یابد و برعکس با افزایش انحراف معیار، صورت کسر بزرگ شده و در نتیجه طول فاصلهٔ اطمینان افزایش پیدا می‌کند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(سولماز روشنی)*

می‌دانیم کران بالای بازهٔ اطمینان $\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ است که σ انحراف معیار جامعه و n اندازهٔ نمونه است.

$$۱۵+\frac{۲\sigma}{\sqrt{۲۵۰۰}}=۱۵/۱۲\Rightarrow\frac{۲\sigma}{۵۰}=\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۶}{۵۰}\Rightarrow\sigma=۳$$

اگر تعداد اعضای نمونه ۹۰۰ واحد کاهش یابد، $n=۱۶۰۰$ خواهد شد و داریم:

$$\text{طول بازهٔ اطمینان}:\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۴(۳)}{\sqrt{۱۶۰۰}}=\frac{۴(۳)}{۴۰}=۰/۳$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

هیچ دادگان ثبت شده‌ای برای تعداد عابرانی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند، وجود ندارد و بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها در این زمینه، روش مشاهده است. در مورد سایر موضوعات، اطلاعات ثبتی در سازمان‌های مربوطه وجود دارد و می‌توان از دادگان استفاده کرد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \text{جامعهٔ آماری}: \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\} \\ \text{نمونه}: \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, a_۷\} \end{cases}$$

$$\bar{x}_{\text{جامعه}} = \frac{۱+۹}{۲} = ۵$$

$$n(S) = \binom{۹}{۷} = ۳۶$$

$$\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + \ldots + a_۷}{۷} = ۵ \Rightarrow a_۱ + a_۲ + \ldots + a_۷ = ۳۵$$

می‌دانیم: $۱+۲+۳+\ldots+۹ = \frac{۹\times۱۰}{۲} = ۴۵ \Rightarrow ۴۵ - ۳۵ = ۱۰$

باید جمع دو عضو غیرواقع در نمونه ۷ عضوی برابر ۱۰ باشد، پس:

۴ حالت $\Rightarrow \{۴, ۶\}, \{۳, ۷\}, \{۲, ۸\}, \{۱, ۹\}$

احتمال مورد نظر: $P = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری اریب است. همهٔ موارد ذکر شده در روش‌های «الف» تا «ت» اریب هستند. دقت کنید که در موارد «ب» و «پ» ممکن است بخش‌هایی از جامعه فاقد ایمیل باشند و یا دسترسی به خط تلفن نداشته باشند، بنابراین شانسی برای حضور در نمونه‌گیری ندارند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

برای تعیین نمونهٔ ۱۰ عضوی باید هر طبقه $\frac{۲۰۰}{۱۰} = ۲۰$ عضو داشته باشد.

پس احتمال انتخاب هر فرد $\frac{۱}{۲۰} = ۰/۰۵$ خواهد شد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(شبنم غلامی)*

بهترین روش نمونه‌گیری در این شرایط، نمونه‌گیری خوشه‌ای است که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه همان دبیرستان‌ها (کلاس‌های دبیرستان‌ها) هستند و سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده (تمام دانش‌آموزان هر کلاس) را به عنوان نمونه درنظر می‌گیریم. دقت کنید که در سه روش دیگر به فهرست دانش‌آموزان نیاز داریم.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

1 **p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است. ارزش گزاره‌های $(p \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ و $\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)$ به ترتیب چگونه است؟**

۱) F ـ T

۲) T ـ F

۳) T ـ مانند r

۴) T ـ مانند $\sim r$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اگر p درست باشد، $p \vee r$ و $r \Rightarrow p$ صرف نظر از ارزش r، درست هستند.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** در گزارهٔ شرطی «$r \Rightarrow p$» اگر p درست باشد، صرف نظر از ارزش r، گزاره درست است؛ پس داریم:

$$\underbrace{(p \vee r)}_{T} \Rightarrow \underbrace{(r \Rightarrow p)}_{T}$$

بنابراین گزارهٔ شرطی اول درست است.

گام دوم: چون q نادرست است، اگر r درست باشد، $q \vee r$ درست و اگر r نادرست باشد، $q \vee r$ نادرست است، اما $\sim p$ نادرست است؛ پس داریم:

$\sim p$	q	r	$q \vee r$	$(q \vee r) \Leftrightarrow \sim p$
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د

برعکس هم

بنابراین ارزش گزارهٔ دوم مثل $\sim r$ است.

2 **گزارهٔ $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$، نادرست است. گزارهٔ $((p \Rightarrow s) \wedge (q \vee s)) \Rightarrow r$، هم‌ارز کدام گزاره است؟**

۱) s

۲) $\sim s$

۳) $r \Rightarrow s$

۴) $s \Rightarrow p$

مشاوره به نادرست‌بودن گزارهٔ «$p \Rightarrow q$» خیلی توجه کنید. این گزاره فقط در یک حالت از ۴ ردیف جدول ارزش، نادرست است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ را به صورت $\square \Rightarrow \bigcirc$ ببینید.

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** گزارهٔ شرطی $q \Rightarrow r$، $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ نادرست است، پس فرض p درست و حکم $q \Rightarrow r$ نادرست است.

گام دوم: چون $q \Rightarrow r$ نادرست است، q درست و r نادرست است.

گام سوم: چون q درست است، $q \vee s$ درست است، اما ارزش «$p \Rightarrow s$» چون p درست است، هم‌ارز s است (یعنی اگر s درست باشد، درست و اگر s نادرست باشد، نادرست است).

گام چهارم: چون $p \wedge T = p$ داریم: $(p \Rightarrow s) \wedge (q \vee s) \equiv (p \Rightarrow s) \equiv s$

گام پنجم: باید ببینیم ارزش گزارهٔ «$s \Rightarrow r$» چگونه است. چون r نادرست است، داریم:

s	r	$s \Rightarrow r$
د	ن	ن
ن	ن	د

برعکس هم

$\Rightarrow s \Rightarrow r \equiv \sim s$

3 عکس نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ به کدام صورت است؟

مشاوره هم‌ارزی ترکیب شرطی و نقیض و عکس نقیض و نقیض عکس آن خیلی مهم است و پای ثابت همهٔ کنکورهای آزمایشی و کنکور اصلی و فرعی و ... است.

۱) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۲) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

۴) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

هم‌ارزی ترکیب شرطی به صورت $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ است.

درس Box

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که هم‌ارزی ترکیب شرطی به صورت مقابل است: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

هم‌ارزبودن دو گزاره: اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند، p هم‌ارز است با q و می‌نویسیم $p \equiv q$.

هم ارزی‌های مهم:

$p \wedge F \equiv F \quad p \wedge \sim p \equiv F \quad p \vee \sim p \equiv T \quad p \wedge T \equiv p \quad p \vee F \equiv p \quad p \vee T \equiv T$

۱) شرکت پذیری: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

۲) پخشی: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۳) دمورگان: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۴) ترکیب شرطی:

		فارسی	نکته‌ها
عکس ترکیب شرطی	$q \Rightarrow p$	جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم.	هم‌ارز خود ترکیب $p \Rightarrow q$ نیست.
عکس نقیض ترکیب شرطی	$\sim q \Rightarrow \sim p$	جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض می‌کنیم.	$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
نقیض عکس	$\sim (q \Rightarrow p)$	جای فرض و حکم را عوض کرده و کل عبارت را نقیض می‌کنیم.	$\sim (q \Rightarrow p) \equiv \sim (\sim q \vee p) \equiv q \wedge \sim p$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عکس نقیض گزارهٔ $\square \Rightarrow \bigcirc$، به صورت $\sim \bigcirc \Rightarrow \sim \square$ است. پس عکس نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

$\sim (\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$

گام دوم: طبق قانون دمورگان، $\sim (\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ است.

گام سوم: طبق هم‌ارزی ترکیب شرطی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$، پس داریم:

$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

پس عکس نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

$(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

4 p و q گزاره‌های دلخواهی هستند. گزارهٔ $[p \vee (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $\sim p \vee \sim q$ ۲) $\sim p \wedge q$

۳) $p \wedge q$ ۴) $p \vee q$

مشاوره سؤال خیلی خوبی است، مشابه سؤال کنکورهای اخیر. حتماً آن را بررسی کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint کروشهٔ سمت راست ساده می‌شود و بعد از جدول ارزش استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بهتر است گزارهٔ داده‌شده را کمی ساده‌تر کنیم:

$$p \vee (p \Rightarrow q) \equiv p \vee (\sim p \vee q) \equiv \overbrace{(p \vee \sim p)}^{T} \vee q \equiv T$$

گام دوم: برای کروشهٔ سمت چپ داریم:

p	q	$p \Leftrightarrow \sim q$	$p \vee (p \Leftrightarrow \sim q)$	$p \vee (p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow T$	$p \vee q$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن

گام سوم: با توجه به جدول ارزش گزینه‌ها متوجه می‌شویم که گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز $p \vee q$ است.

کنکور گزارهٔ $p \Leftrightarrow \sim q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ *(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$

۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

5 نقیض گزارهٔ «برخی از مقادیر گویا، با جذر خودشان برابر هستند.» به کدام صورت است؟

۱) $\exists x \in Q\,;\, x \neq \sqrt{x}$

۲) $\forall x \in Q'\,;\, x \neq \sqrt{x}$

۳) $\forall x \in Q\,;\, (x > \sqrt{x}) \vee (x < \sqrt{x})$

۴) $\exists x \in Q\,;\, (x > \sqrt{x}) \wedge (x < \sqrt{x})$

مشاوره از سور و نقیض آن فقط یک بار در سال ۹۸ سؤال مطرح شده است، پس بعید نیست که سؤال منطق کنکور ۱۴۰۵ از سور باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با نقیض‌کردن سور، نوع آن عوض می‌شود (سور عمومی و وجودی).

درس Box

سور	نماد	فارسی	چه موقع درست است؟	نقیض
عمومی	$\forall$	به ازای هر	$\forall x \in U\,;\, p(x)$ وقتی به ازای هر x عضو U عبارت $p(x)$ درست باشد.	$\sim (\forall x \in U\,;\, p(x)) \equiv \exists x \in U\,;\, \sim p(x)$
وجودی	$\exists$	به ازای برخی یا وجود دارد	$\exists x \in U\,;\, p(x)$ وقتی $x \in U$ وجود داشته باشد که $p(x)$ درست باشد.	$\sim (\exists x \in U\,;\, p(x)) \equiv \forall x \in U\,;\, \sim p(x)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: صورت ریاضی عبارت داده‌شده می‌شود: $\exists x \in Q\,;\, x = \sqrt{x}$

گام دوم: برای نقیض عبارت بالا، $\exists$ تبدیل به $\forall$ و $x = \sqrt{x}$ نیز نقیض می‌شود:

1 **تعداد زیرمجموعه‌های A، ۲۸تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های B نیز ۱۲تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ است. تعداد زیرمجموعه‌های $A - B$ چندتا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های $B - A$ است؟**

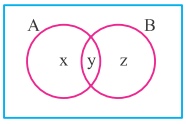
۱) ۱۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

مشاوره با این‌که مجموعه‌ها حجم نسبتاً کمی دارد، اما طراحان کنکور همیشه یک سؤال از آن می‌دهند، پس از آن غافل نباشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یک نمودار ون بکشید. اگر A دارای n عضو باشد، ۲^n زیرمجموعه دارد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** یک نمودار ون به صورت زیر می‌کشیم و تعداد عضوهای هر قسمت را در آن می‌نویسیم:



گام دوم: A دارای $x+y$ عضو و B دارای $y+z$ عضو است، پس داریم:

$$\begin{cases} \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A = ۲^{x+y} \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های } B = ۲^{y+z} \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A \cap B = ۲^{y} \end{cases}$$

گام سوم: معادله‌های گفته‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۲^{x+y} = ۲۸ + ۲^{y} \Rightarrow ۲^{x+y} - ۲^{y} = ۲۸ \Rightarrow ۲^{y}(۲^{x} - ۱) = ۲۸ \\ ۲^{y+z} = ۱۲ + ۲^{y} \Rightarrow ۲^{y+z} - ۲^{y} = ۱۲ \Rightarrow ۲^{y}(۲^{z} - ۱) = ۱۲ \end{cases}$$

گام چهارم: x, y, z اعداد صحیح و نامنفی هستند. با کمی جست‌وجو داریم:

$$۲^{y}(۲^{x} - ۱) = ۴ \times ۷ \Rightarrow x = ۳, y = ۲$$

$$۲^{y}(۲^{z} - ۱) = ۴ \times ۳ \Rightarrow z = ۲, y = ۲$$

گام پنجم:

$$\begin{matrix} \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A - B = ۲^{x} = ۲^{۳} = ۸ \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های } B - A = ۲^{z} = ۲^{۲} = ۴ \end{matrix} \Rightarrow ۸ - ۴ = ۴$$

2 **A و B دو مجموعهٔ ناتهی هستند که $A\times B = B\times A$. اگر مجموعه‌های X و Y به گونه‌ای باشند که $Y - X \subseteq A$ و $Y - X \subseteq B'$، کدام گزاره درست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)**

۱) $\forall x;(x \in Y \Rightarrow x \in X)$

۲) $\forall x;(x \in X \Rightarrow x \in Y)$

۳) $\exists x \in U; x \in A - B$

۴) گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر سه درست هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از فرض داده‌شده نتیجه می‌شود؛ $A = B$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** چون A و B دو مجموعهٔ ناتهی بوده و $A\times B = B\times A$، طبق نکته $A = B$.

گام دوم: به جای B' می‌توانیم A' قرار دهیم، پس داریم:

$$\begin{cases} Y - X \subseteq A \\ Y - X \subseteq A' \end{cases} \xrightarrow{\cap} (Y - X) \subseteq \underbrace{A \cap A'}_{\varnothing} \Rightarrow Y - X = \varnothing$$

گام سوم: مجموعهٔ $Y - X$ برابر $\varnothing$ شده است، پس هر عضوی که در Y بوده، در X هم بوده است. به زبان دیگر $Y \subseteq X$ و داریم:

$$\forall x;(x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

نکته $A\times B = B\times A \xrightarrow{A, B\neq\varnothing} A = B$

سنجش‌لاد

3 بین ۳ مجموعهٔ A، B و C رابطهٔ $A-B\subseteq C$ برقرار است. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

۱) $A-C\subseteq B$

۲) $A\cap C\subseteq B$

۳) $A\cap B\subseteq C$

۴) $C-A\subseteq B$

مشاوره در سال‌های اخیر چندین بار مشابه این سؤال در کنکور آمده است. حواستان باشد روش شماره‌گذاری معمولاً سریع‌تر از جبر مجموعه‌ها جواب می‌دهد.

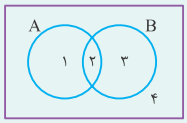
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint یک نمودار ون برای سه مجموعه رسم کرده و نواحی را شماره‌گذاری کنید. ببینید چه‌جوری می‌شود که شرط $A-B\subseteq C$ درست باشد.

درس Box

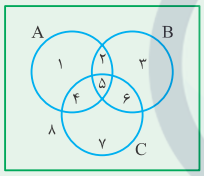
روش شماره‌گذاری برای ساده‌سازی عبارت‌های مجموعه:

اگر یک عبارت مجموعه‌ای شامل A, B داشته باشیم، یک نمودار ون به صورت زیر رسم می‌کنیم و نواحی را شماره‌گذاری می‌کنیم.



حالا فرض می‌کنیم: $A=\{۱,۲\}$, $B=\{۲,۳\}$ و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. در پایان می‌بینیم ساده‌شدهٔ کدام گزینه با عبارت به‌دست‌آمده برابر است.

نکته اگر عبارت داده‌شده شامل ۳ مجموعهٔ A، B و C باشد، نمودار ون را به صورت زیر رسم می‌کنیم:

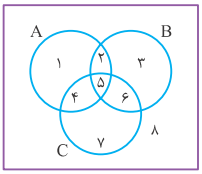


- اگر یک تساوی مجموعه‌ای داشته باشیم، بررسی می‌کنیم که دو طرف تساوی شامل چه نواحی‌ای هستند.

نواحی یکسان را خط می‌زنیم و نتیجه می‌گیریم که عضوی در نواحی باقی‌مانده نباید وجود داشته باشد، یعنی آن‌ها برابر $\varnothing$ هستند.

- اگر یک رابطه زیرمجموعه‌ای به صورت $\bigcirc\subseteq\square$ (مثل این سؤال) داشته باشیم، بررسی می‌کنیم که $\square$ و $\bigcirc$ هر کدام شامل چه نواحی‌ای هستند. اگر ناحیه‌ای در $\square$ باشد، ولی در $\bigcirc$ نباشد، نتیجه می‌گیریم که نباید عضوی در آن ناحیه وجود داشته باشد و آن را $\varnothing$ در نظر می‌گیریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** بهتر است از روش شماره‌گذاری استفاده کنیم. یک نمودار ون به صورت زیر رسم کرده و نواحی را شماره‌گذاری می‌کنیم:



گام دوم: $A-B=\{۱,۴\}$ و $C=\{۴,۵,۶,۷\}$ است. اگر $A-B\subseteq C$ باشد، $۱\in A-B$ ولی $۱\notin C$، پس هیچ عضوی در ناحیهٔ ۱ نباید وجود داشته باشد، پس $A=\{۲,۵,۴\}$ باید باشد. (ناحیهٔ ۱ باید $\varnothing$ باشد.)

گام سوم: حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A-C\subseteq B \Rightarrow \{2,5,4\}-\{4,5,6,7\}=\{2\}\subseteq B$ (همین گزینه درست است)

گزینهٔ (۲): $A\cap C\subseteq B \Rightarrow \{4,5\}\subseteq B$ ✗ (ناحیهٔ ۴ در B نیست)

گزینهٔ (۳): $A\cap B\subseteq C \Rightarrow \{2,5\}\subseteq C$ ✗ (ناحیهٔ ۲ در C نیست)

گزینهٔ (۴): $C-A\subseteq B \Rightarrow \{6,7\}\subseteq B$ ✗ (ناحیهٔ ۷ در B نیست)

کنکور

A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U هستند. اگر $A\cap B\subseteq A\cup B'$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟

(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $B=U$ ۲) $A=U$

۳) $B=A$ ۴) $A=\varnothing$

4 **$A\times B$ مجموعه‌ای ۶عضوی بوده و $(1,3)$ و $(3,4)$ دو عضو آن هستند. زوج‌مرتب ..... حتماً عضو $A\times B$ بوده و زوج‌مرتب ..... قطعاً عضو $A\times B$ نیست.**

۱) $(1,2)-(1,4)$ ۲) $(2,3)-(1,4)$

۳) $(3,2)-(3,3)$ ۴) $(2,1)-(3,3)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اگر $(x,y)\in A\times B$، آن‌گاه $x\in A$ و $y\in B$.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق تعریف، $A\times B$ شامل زوج‌مرتب‌هایی مثل (x,y) است که $x\in A$ و $y\in B$.

پس داریم:

$$\begin{cases}(1,3)\in A\times B \Rightarrow 1\in A\,,\,3\in B\\(3,4)\in A\times B \Rightarrow 3\in A\,,\,4\in B\end{cases}$$

گام دوم:

$$\begin{cases}1\in A\,,\,4\in B \Rightarrow (1,4)\in A\times B\\3\in A\,,\,3\in B \Rightarrow (3,3)\in A\times B\end{cases}$$

پس زوج‌مرتب‌های $(1,4)$ و $(3,3)$ قطعاً عضو $A\times B$ هستند.

گام سوم: مجموعهٔ $A\times B$ دارای ۶ عضو است، پس دو حالت داریم:

۱) A دارای ۲ عضو و B دارای ۳ عضو بوده است: در این صورت $A=\{1,3\}$ و $B=\{3,4,x\}$ بوده است. اگر $x=2$ باشد، زوج‌مرتب‌های $(1,2)$ و $(3,2)$ عضو $A\times B$ هستند.

۲) A دارای ۳ عضو و B دارای ۲ عضو بوده است: در این صورت $A=\{1,3,x\}$ و $B=\{3,4\}$ بوده است. اگر $x=2$ باشد، زوج‌مرتب $(2,3)$ عضو $A\times B$ است.

گام چهارم: در هیچ‌کدام از حالت‌های بالا، زوج‌مرتب $(2,1)$ عضو $A\times B$ نیست.

1 چه تعداد از گزاره‌های زیر **نادرست** است؟

الف) متغیرهای کیفی ترتیبی را اندازه‌گیری کرده و رتبه‌بندی می‌کنیم.

ب) اگر در نمودار دایره‌ای ۱/۵ قسمت از ده قسمت رنگ شده باشد، فراوانی نسبی آن متغیر $\frac{۱۵}{۳۶۰}$ است.

پ) برای نمونه به اندازهٔ ۴۰ از جامعه‌ای به اندازهٔ ۲۰۰، جامعه را به ۵ قسمت تقسیم کرده و یکی را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم. نوع روش نمونه‌گیری خوشه‌ای است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

انواع روش‌های نمونه‌گیری (اندازهٔ نمونه برابر n و اندازهٔ جامعه برابر N است.)

روش	تعریف	شانس انتخاب هر عضو
تصادفی ساده	نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همهٔ واحدهای آماری برای انتخاب‌شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.	$\frac{n}{N}$
خوشه‌ای	نمونه‌گیری که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند. سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب‌شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$
طبقه‌ای	روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزا یک نمونهٔ تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.	اگر از هر طبقه متناسب با تعداد عضوها برداریم، همان $\frac{n}{N}$ است.
سامانمند (سیستماتیک)	نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازهٔ طبقات با هم برابر است. فقط از طبقهٔ اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.	$\frac{n}{N}$

متغیرهای کمّی: به متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند متغیرهای کمّی می‌گوییم؛ مثل قد، وزن، زمان، تعداد، دما.

متغیرهای کیفی: به متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند متغیرهای کیفی می‌گوییم؛ مثل گروه خونی، مراحل تحصیلی، جنسیت افراد، انواع خودرو، رنگ پوست و وضعیت هوا (از نظر ابری، آفتابی و ...)

نکته مقدار متغیرهای کمّی معمولاً با وسیله‌ای خاص اندازه‌گیری می‌شوند. آن‌ها قابل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم هستند، در حالی که مقدار متغیرهای کیفی قابل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم نیستند.

انواع متغیرهای کمّی

متغیرهای کمّی دو نوع هستند:

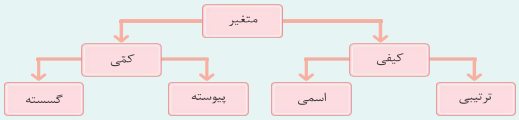
۱) کمّی پیوسته: متغیری است که اگر بتواند دو مقدار a و b را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند؛ به عبارت دیگر مجموعهٔ مقادیر آن‌ها همهٔ اعداد در بازهٔ (a, b) بتواند قرار گیرد، مثلاً قد، وزن، زمان و طول همگی کمّی پیوسته هستند.

۲) کمّی گسسته: متغیری که پیوسته نباشد و مجموعهٔ مقدارهای آن قابل شمردن باشد؛ مثلاً تعداد بیماران یک بیمارستان کمّی گسسته است.

انواع متغیرهای کیفی

متغیر کیفی ترتیبی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند و بین مقدارهای آن‌ها ترتیب منطقی و طبیعی وجود دارد، متغیر کیفی ترتیبی می‌گوییم. (مراحل تحصیل)

متغیر کیفی اسمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نبوده و بین مقدارهای آن‌ها ترتیب خاصی وجود ندارد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم. (گروه خونی)



پاسخ خیلی تشریحی ✔ الف) نادرست است. متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند.

ب) نادرست است. ۱/۵ قسمت از ۱۰ قسمت؛ پس فراوانی نسبی برابر $\frac{۱۵}{۱۰۰}$ می‌شود. $= \frac{۱/۵}{۱۰}$

پ) درست است. در نمونه‌گیری خوشه‌ای کل خوشه را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.

پس دوتا از عبارت‌ها نادرست هستند.

2 در ۷ دادهٔ آماری $Q_1 = 3$ و چارک دوم و سوم و میانگین برابر ۵ هستند. اگر داده‌ها دارای دو مد باشند، max داده‌ها کدام است؟

۱) ۵
۲) ۷
۳) ۱۱
۴) هر عدد بزرگ‌تر از ۵ ممکن است باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

هفت جایگاه مرتب‌شدهٔ ◯،◯،◯،◯،◯،◯ و◯ را در نظر بگیرید و اطلاعات را وارد کنید.

درس Box

بررسی میانه و نمودار جعبه‌ای: اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، میانه دادهٔ وسطی است.

برای محاسبهٔ میانه (Q_2) به صورت زیر عمل می‌کنیم:

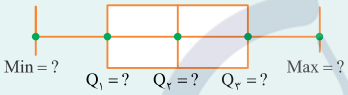
۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۲) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه مقدار وسط می‌باشد؛ یعنی $\frac{n+1}{2}$ امین داده.

۳) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه متوسط دو مقدار وسطی است؛ یعنی متوسط داده‌های $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

چارک‌ها: میانهٔ داده‌های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) و میانهٔ داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم.

نمودار جعبه‌ای



مد: به داده‌هایی که بیشترین فراوانی را داشته باشند، مد می‌گوییم. اگر دو داده دارای فراوانی یکسان و بیشتر از بقیه باشند، جامعه را دومدی می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ۷ عدد به صورت زیر در نظر می‌گیریم و اطلاعات داده‌شده را وارد می‌کنیم:

$$\bigcirc,\ \overset{Q_1}{\textcircled{3}},\ \bigcirc,\ \overset{Q_2}{\textcircled{5}},\ \bigcirc,\ \overset{Q_3}{\textcircled{5}},\ \bigcirc$$

گام دوم: چون داده‌ها مرتب‌شده هستند، دادهٔ شمارهٔ ۵ نیز باید برابر ۵ باشد. از طرفی چون جامعه دو مد دارد، داده‌های شماره‌های ۱ و ۳ نیز باید برابر ۳ باشند؛ پس داده‌ها به صورت مقابل درمی‌آیند:

$$\textcircled{3},\textcircled{3},\textcircled{3},\textcircled{5},\textcircled{5},\textcircled{5},\textcircled{x}$$

گام سوم:

$$\bar{x} = 5 \Rightarrow \frac{3+3+3+5+5+5+x}{7} = 5$$

$$\Rightarrow 24 + x = 35 \Rightarrow x = 11$$

3 میانگین دستهٔ اول با ۵ دادهٔ مختلف برابر با میانگین دستهٔ دوم با ۶ داده است؛ به طوری که تنها دادهٔ متفاوت دو دسته، عدد a است. اگر واریانس دستهٔ اول ۱/۵ واحد بیشتر از واریانس دستهٔ دوم باشد، نسبت ضریب تغییرات دستهٔ اول به ضریب تغییرات دستهٔ دوم کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۶}{۵}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

مشاوره از بحث شاخص‌های پراکندگی معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید. در سال‌های اخیر، سؤال‌های مهمی از این قسمت (مثل همین سؤال) آمده است، حتماً آن‌ها را ببینید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

عدد a همان میانگین دو گروه است.

درس Box

شاخص‌های پراکندگی

۱) **دامنهٔ تغییرات:** $R = x_{max} - x_{min}$

۲) **واریانس جامعه:** $\sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲$ $\quad \sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^۲$ (x_i دادهٔ دارای فراوانی f_i است.)

۳) **انحراف معیار:** برابر با جذر واریانس است.

واریانس پنج عدد متوالی همواره ۲ است.

اگر n داده تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند، واریانس برابر است با $\sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲}d^۲$.

۴) **ضریب تغییرات:** $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

گام اول: عضوهای دو دسته به صورت مقابل هستند:

$$\begin{cases} A \text{ دستهٔ: } x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵ \\ B \text{ دستهٔ: } x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, \underbrace{a}_{\bar{x}} \end{cases}$$

گام دوم: با اضافه‌شدن a به دستهٔ A، دستهٔ B ساخته می‌شود. چون میانگین دو گروه مساوی است، پس عدد a که به دستهٔ A اضافه شده، همان میانگین دستهٔ A بوده است. این میانگین را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم.

گام سوم: واریانس دو دسته را می‌نویسیم:

$$\sigma_A^۲ = \frac{\overbrace{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_۵ - \bar{x})^۲}^{s}}{۵} = \frac{s}{۵}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_۵ - \bar{x})^۲ + (\bar{x} - \bar{x})^۲}{۶} = \frac{s + ۰}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{۵} - \frac{s}{۶} = ۱/۵ \Rightarrow \frac{s}{۳۰} = ۱/۵ \Rightarrow s = ۴۵$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \sigma_A^۲ = \frac{۴۵}{۵} = ۹ \Rightarrow \sigma_A = ۳ \\ \sigma_B^۲ = \frac{۴۵}{۶} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow \sigma_B = \sqrt{\frac{۱۵}{۲}} \end{cases}$$

گام چهارم: نسبت ضریب تغییرات دستهٔ A به B برابر است با:

$$\frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sigma_A}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_B}{\bar{x}}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{۳}{\sqrt{\frac{۱۵}{۲}}} = \sqrt{\frac{۹}{\frac{۱۵}{۲}}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۱۵}} = \sqrt{\frac{۶}{۵}}$$

4 **انحراف از میانگین ۷ دادهٔ آماری تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر انحراف معیار داده‌ها برابر ۱۰ و کوچک‌ترین داده برابر ۱۱ باشد، میانگین کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اعداد را به صورت $a+3d$، $a+2d$، $a+d$، a و $a-d$، $a-2d$، $a-3d$ بگیرید.

درس Box انحراف از میانگین دادهٔ x_i به صورت $x_i-\bar{x}$ تعریف می‌شود (یعنی کافی است دادهٔ x_i را منهای میانگین کنیم.)

نکته مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر صفر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انحراف از میانگین ۷ عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس خود داده‌ها نیز تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. داده‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-3d,\ a-2d,\ a-d \text{ و } a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$$

گام دوم: طبق درس‌باکس سؤال ۳۷ داریم:

$$\sigma^2=\frac{7^2-1}{12}d^2 \xrightarrow{\sigma=10} 100=4d^2 \Rightarrow d=5$$

گام سوم:

$$\text{کوچک‌ترین داده}=a-3d=a-3(5)=a-15=11 \Rightarrow a=26$$

گام چهارم: میانگین هفت عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، همان عدد وسطی یعنی a است؛ پس: $\bar{x}=26$.

۵ در یک کار آماری، جامعه اعداد طبیعی یک‌رقمی است. با کدام احتمال یک نمونهٔ ۳عضوی، پارامتر میانگین را بدون خطا برآورد می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint تعداد ۳عضوی‌هایی که میانگین آن‌ها برابر ۵ است، در نظر بگیرید.

درس Box

برآورد نقطه‌ای

- پارامتر یا پارامتر جامعه: یک مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است (مانند میانگین جامعه).
- میانگین جامعه را با μ نمایش می‌دهیم.
- آماره یا آمارهٔ نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید (مانند میانگین نمونه). میانگین نمونه را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم.
- فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه براساس نمونه، آمار استنباطی است.
- برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونهٔ تصادفی در آمارهٔ نظیر این پارامتر. به بیان دیگر، مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند. مثلاً برای برآورد میانگین جامعه، از جامعه نمونه می‌گیریم و میانگین نمونه را به دست می‌آوریم (آمارهٔ نمونه در این‌جا میانگین نمونه می‌شود). میانگین نمونه برآوردی از میانگین جامعه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جامعه به صورت $\{۱,۲,.....,۹\}$ است. تعداد نمونه‌های ۳عضوی برابر با انتخاب ۳ عضو از مجموعهٔ جامعه است؛ پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}=۸۴$$

گام دوم: میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu=\frac{۱+۲+۳+.....+۹}{۹}=\frac{\frac{۹\times۱۰}{۲}}{۹}=۵$$

گام سوم: میانگین نمونه برآوردی از میانگین جامعه است؛ پس نمونه‌های ۳عضوی که میانگین آن‌ها برابر ۵ باشد، میانگین جامعه را بدون هیچ خطایی برآورد می‌کنند. این نمونه‌ها عبارت‌اند از:

$\{۱,۶,۸\}$ و $\{۱,۵,۹\}$

$\{۲,۶,۷\}$ و $\{۲,۴,۹\}$ و $\{۲,۵,۸\}$

$\{۳,۵,۷\}$ و $\{۳,۴,۸\}$

$\{۴,۵,۶\}$

گام چهارم: از بین ۸۴ نمونهٔ ۳عضوی، ۸ حالت مطلوب وجود دارد؛ پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۸}{۸۴}=\frac{۲}{۲۱}$$

6 **با استفاده از یک نمونهٔ ۱۰۰عضوی، میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ به صورت $(۱/۷, a)$ برآورد شده است. اگر این بازه شامل ۳ عدد صحیح باشد، بیشترین مقدار انحراف معیار جامعه کدام است؟**

۱) ۱۶۵ ۲) ۸۲/۵

۳) ۱۶/۵ ۴) ۸/۲۵

مشاوره از بحث برآورد بازه‌ای تا حالا سؤالی در کنکور نیامده است؛ ولی آمادهٔ آمدن آن در کنکور باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

کران بالای بازهٔ داده‌شده حداکثر برابر ۵ می‌تواند باشد.

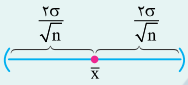
درس Box

برآورد بازه‌ای

برآورد بازه‌ای یا بازهٔ اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان شهرت دارد.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$$



در شکل فوق μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

نکته وسط بازهٔ اطمینان همان میانگین نمونه $(\bar{x})$ است.

نکته طول بازهٔ اطمینان برابر با $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بازهٔ داده‌شده شامل ۳ عدد صحیح ۲، ۳ و ۴ است؛ پس: باید $۵ \le a < ۴$ (که بازه شامل دقیقاً ۳ عدد صحیح شود) باشد.

گام دوم:

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{۱۰۰}} = ۱/۷ \Rightarrow \bar{x} = ۱/۷ + \frac{\sigma}{۵}$$

گام سوم: کران بالای بازه (یعنی a) برابر است با:

$$a = \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{۱۰۰}} = \bar{x} + \frac{\sigma}{۵} \Rightarrow a = ۱/۷ + \frac{\sigma}{۵} + \frac{\sigma}{۵} = ۱/۷ + \frac{۲\sigma}{۵}$$

گام چهارم:

$$۱/۷ + \frac{۲\sigma}{۵} \le ۵ \Rightarrow \frac{۲\sigma}{۵} \le ۳/۳ \Rightarrow \sigma \le \frac{۱۶/۵}{۲} \Rightarrow \sigma \le ۸/۲۵$$

۱- گزارهٔ $r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \sim$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ۲) $\sim p \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ ۳) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۵)

با استفاده از هم‌ارزیِ تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی داریم:

$$\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \equiv r \vee (\sim p \vee \sim q) \overset{\text{شرکت‌پذیری}}{\equiv} \sim q \vee (\sim p \vee r) \equiv q \Rightarrow (\sim p \vee r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

یک هم‌ارزی خیلی خیلی مهم! (تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی)

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

قانون دمورگان

$$\text{قانون دمورگان} \begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

هم‌ارزی‌های مهم در گزاره‌ها

اگر p یک گزاره باشد، نقیضِ نقیضِ گزارهٔ p را به‌صورت $\sim (\sim p)$ نشان می‌دهند که همواره هم‌ارز منطقی با خود گزارهٔ p است، یعنی:

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی

جذب $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$	شرکت‌پذیری $\begin{matrix} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{matrix}$	خود توانی $\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases}$
هم‌پوشانی $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$	توزیع‌پذیری $\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$	جابه‌جایی $\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$

۲- عکس و نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزارهٔ زیر است؟

۱) $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$
۳) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ۴) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۵)

با به یاد داشتن هم‌ارزی مهم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ابتدا عکس و نقیض گزاره را نوشته و در پرانتز دوم، ترکیب شرطی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم:

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q) \overset{\text{عکس و نقیض}}{\equiv} \sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow r) \equiv (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim (\sim p \vee r) \equiv (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$$

۳- نقیض گزارهٔ $(\frac{۱}{x^۲+۱}\geq ۰)\wedge(۳x+۱=۰);\forall x\in\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) $\exists x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}<۰)\wedge(۳x+۱\neq ۰)$

۲) $\forall x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}>۰)\vee(۳x+۱\neq ۰)$

۳) $\exists x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}<۰)\vee(۳x+۱\neq ۰)$

۴) $\forall x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}<۰)\wedge(۳x+۱\neq ۰)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۳)

نقیض سور عمومی، سور وجودی است و نقیض $(p\wedge q)$ طبق قانون دمورگان با $(\sim p\vee\sim q)$ هم‌ارز است، پس:

$$\sim\left(\forall x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}\geq ۰)\wedge(۳x+۱=۰)\right)\equiv\exists x\in\mathbb{R};(\frac{۱}{x^۲+۱}<۰)\vee(۳x+۱\neq ۰)$$

۴- اگر p گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای درست و r گزارهٔ دلخواهی باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) $(p\Rightarrow r)\vee(p\Rightarrow q)$

۲) $(p\vee\sim r)\wedge(q\vee\sim r)$

۳) $(r\Rightarrow q)\vee(r\Rightarrow p)$

۴) $(\sim r\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۵)

چون p نادرست و q درست است به جای آن‌ها به ترتیب F و T می‌گذاریم.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\underbrace{(F\Rightarrow r)}_{T}\vee\underbrace{(F\Rightarrow T)}_{T}\equiv T$

۲) $\underbrace{(F\vee\sim r)}_{\sim r}\wedge\underbrace{(T\vee\sim r)}_{T}\equiv\sim r$ ← ارزش آن به r بستگی دارد.

۳) $\underbrace{(r\Rightarrow T)}_{T}\vee(r\Rightarrow F)\equiv T\vee(r\Rightarrow F)\equiv T$

۴) $(\sim r\Rightarrow T)\wedge\underbrace{(T\Rightarrow F)}_{F}\equiv(\sim r\Rightarrow T)\wedge F\equiv F$

ترکیب فصلی

اگر p و q دو گزاره باشند، **ترکیب فصلی** آن‌ها را به‌صورت $p\vee q$ نشان می‌دهند و «p یا q» خوانده می‌شود.

ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزارهٔ مرکب، درست است.

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب عطفی

اگر p و q دو گزاره باشند، **ترکیب عطفی** آن‌ها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و «p و q» خوانده می‌شود.

ارزش گزارهٔ حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در غیر این‌صورت ارزش این گزارهٔ مرکب، نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

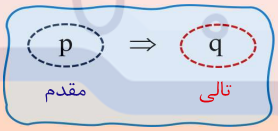
گزارهٔ شرطی

توجه کنید در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به p «مقدم» و به q «تالی» می‌گویند. ارزش این گزاره زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد و در بقیهٔ حالت‌ها این گزارهٔ شرطی درست است. به جدول زیر توجه کنید:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	د	د
ن	ن	د

توجه!

در حالتی که ارزش گزارهٔ p نادرست باشد، گزارهٔ $p \Rightarrow q$ ارزش درستی دارد (چه گزارهٔ q درست و چه نادرست باشد) که در این حالت می‌گوییم **گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم، درست است.**



۵- گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}$ با کدام گزاره‌نمای $p(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $xy = ۷$ ۲) $x + y = ۷$ ۳) $x^۲ + y^۲ = ۷$ ۴) $y - x = ۷$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۲)

بررسی گزینه‌ها:

۱) برای این گزینه مثال نقض وجود دارد. به‌ازای هر x طبیعی، یک y طبیعی وجود ندارد که حاصل‌ضرب آن در x برابر ۷ شود.

$$x = ۲ \Rightarrow y = \frac{۷}{۲} \notin \mathbb{N}$$

۲) برای این گزینه مثال نقض وجود دارد. به‌ازای هر x طبیعی، یک y طبیعی وجود ندارد که مجموع آن‌ها ۷ شود.

$$x = ۸ \Rightarrow y = -۱ \notin \mathbb{N}$$

۳) برای این گزینه مثال نقض وجود دارد. به‌ازای هر x طبیعی، یک y طبیعی وجود ندارد که جمع مجذور آن‌ها ۷ شود.

$$x = ۱ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۶} \notin \mathbb{N}$$

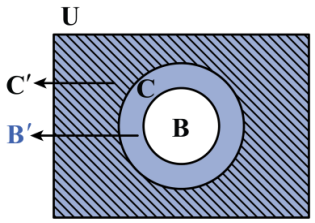
۴)

$$y - x = ۷ \Rightarrow y = x + ۷ \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} y \in \mathbb{N}$$

۱- اگر $B-C=\varnothing$ باشد، متمم مجموعهٔ $[(B'\cup C')\cup[(A\cup B)'\cup(C\cup A)']$ کدام است؟

۱) B ۲) C' ۳) $B'\cup C$ ۴) $B'\cap C'$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۱۰۱)



وقتی اعضای C از اعضای B برداشته شده و دیگر هیچ چیز باقی نمانده و مجموعه تهی شده است، یعنی B تمام اعضایش در C بوده که این یعنی B زیرمجموعهٔ C بوده است:

$$B-C=\varnothing\Rightarrow B\subseteq C\Rightarrow B\cap C=B\Rightarrow B'\cup C'=B'$$

با جای‌گذاری آن در عبارت صورت سؤال داریم:

$$\text{عبارت سوال}=B'\cup[(A'\cap B')\cup(C'\cap A')]\xrightarrow[A'\text{ از}]{\text{فاکتورگیری}}B'\cup(A'\cap(B'\cup C'))=B'\cup(A'\cap B')\overset{\text{قانون جذب}}{=}B'$$

$$\xrightarrow{\text{متمم}}(B')'=B$$

۲ - اگر A مجموعهٔ اعداد دو رقمی و $B=\{5k\,|\,k\in A\}$ باشد، مجموعهٔ $A\cap B$ چند زیرمجموعهٔ سره غیرتهی دارد؟

۱) ۱۰۲۳ ۲) ۱۰۲۲ ۳) ۵۱۱ ۴) ۱۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

در واقع اشتراک A و B همان اعداد مضارب ۵ دو رقمی است:

$$A=\{10,11,12,\ldots,99\}\Rightarrow B=\{10\times5,11\times5,\ldots,99\times5\}$$

$$\Rightarrow A\cap B=\{50,55,60,65,70,75,80,85,90,95\}$$

تعداد زیرمجموعه‌های محض یا سره یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n-1 است و تعداد زیرمجموعه‌های محض غیرتهی برابر است با: 2^n-2

$$\Rightarrow \text{تعداد}=2^{10}-2=1024-2=1022$$

زیرمجموعه‌های سره

زیرمجموعه‌های محض یا سره یعنی همهٔ زیرمجموعه‌هایی که با خود مجموعه برابر نیستند. یعنی همهٔ زیرمجموعه‌ها به غیر از خود مجموعه.

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه

تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با ۲^n.

راهنمای زرنگ‌بازی!

اگه بدونی هر فرمولی از کجا اومده هیچ وقت نیاز نیست فرمول‌ها رو حفظ کنی. حالا اگه دوست داری بدونی فرمول تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه چطوری به‌دست اومده این راهنمای زرنگ‌بازی رو از دست نده!

فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و B زیر مجموعه‌ای از آن باشد، هر عضو A می‌تواند در B باشد یا نباشد، یعنی برای هر عضو A دو انتخاب وجود دارد:

$$\underbrace{\underbrace{۲}_{\text{عضو اول}} \times \underbrace{۲}_{\text{باشد یا نباشد}} \times \cdots \times \underbrace{۲}_{\text{عضو آخر}}}_{n \text{ عضو}} = ۲^n$$
باشد یا نباشد

پس در نهایت به ۲^n راه می‌توان یک زیرمجموعه از A انتخاب کرد. این یعنی A، ۲^n زیرمجموعه دارد.

مثال

۳- اگر $A=\{x,y+۲,-۳,۱\}$ و $B=\{a,۷,۳,b+۱\}$ باشد و $A\times B=B\times A$، آن‌گاه حداکثر مجموع y,x و a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۱۰۱)

چون A و B ناتهی‌اند و حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها مساوی شده پس خودشان هم با هم برابرند:

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ y+۲=۳ \Rightarrow y=۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a=۱ \\ b+۱=-۳ \Rightarrow b=-۴ \end{cases} \quad (۱)$$

یا

$$\begin{cases} b+۱=۱ \Rightarrow b=۰ \\ a=-۳ \end{cases} \quad (۲)$$

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}y+2=7\Rightarrow y=5\\x=3\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}a=1\\b+1=-3\Rightarrow b=-4\end{cases}\ (3)$$

یا

$$\begin{cases}a=-3\\b+1=1\Rightarrow b=0\end{cases}\ (4)$$

پس مسئله ۴ سری جواب دارد.

حالت اول $x+y+a=7+1+1=9$

حالت دوم $x+y+a=7+1+(-3)=5$

حالت سوم $x+y+a=3+5+1=9$

حالت چهارم $x+y+a=3+5+(-3)=5$

پس بیش‌ترین مقدار مجموع x,y و a مساوی ۹ می‌شود.

اگه ضرب دکارتیشون برابر شد خودشونم برابرن؟! نه همیشه!

اگر برای دو مجموعهٔ ناتهی A و B داشته باشیم $A\times B=B\times A$، آن‌گاه: $A=B$.

۴- در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$، حاصل‌جمع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مضرب ۷ می‌شود؟

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۷۱ ۴) ۱۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا تمام جفت اعدادی را که جمع آن‌ها بر ۷ بخش‌پذیر است، پیدا می‌کنیم:

$$\{10,11\},\{10,18\},\{11,17\},\{12,16\},\{13,15\},\{17,18\}$$

حال در هر مورد، بین این دو عدد یا اعداد دیگری قرار می‌گیرد یا قرار نمی‌گیرد، پس برای هر کدام تعداد حالت‌ها را می‌شماریم:

تعداد

$\{10,11\}\Rightarrow 1$

$\{10,18\}\Rightarrow \overset{11}{2}\times\overset{12}{2}\times\overset{13}{2}\times\overset{14}{2}\times\overset{15}{2}\times\overset{16}{2}\times\overset{17}{2}\times 2=2^7=128$

$\{11,17\}\Rightarrow \overset{12}{2}\times\overset{13}{2}\times\overset{14}{2}\times\overset{15}{2}\times\overset{16}{2}=2^5=32$

$\{12,16\}\Rightarrow \overset{13}{2}\times\overset{14}{2}\times\overset{15}{2}=8$

$\{13,15\}\Rightarrow \overset{14}{2}$

$\{17,18\}\Rightarrow 1$

$\Rightarrow$ تعداد کل زیرمجموعه‌ها با شرایط مذکور $=1+128+32+8+2+1=172$

۵- اگر $A=\{a\}$، $B=\{a,\{a\},\varnothing\}$ و $C=\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A\subseteq C$ ۲) $A\in C$ ۳) $B\subseteq C$ ۴) $\{A\}\in C$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۱۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱) $C=\{\boxed{a},\{a\},\{\{a\}\}\} \Rightarrow a$ عضو شامل زیرمجموعهٔ تک عضوی $=\{a\}=A$

۲) $C=\{a,\boxed{\{a\}},\{\{a\}\}\} \Rightarrow \{a\}$ عضوی از C است.

۳) اگر $\varnothing$ در B نباشد می‌توانیم ادعا کنیم $B\subseteq C$ است ولی با این‌که تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست، ولی عضو همهٔ مجموعه‌ها نیست! وقتی به عنوان عضو به مجموعه‌ای اضافه می‌شود حتما باید درنظر گرفته شود. پس گزینهٔ ۳ نادرست است.

۴) $C=\{a,\{a\},\boxed{\{\{a\}\}}\} \Rightarrow \{\{a\}\}$ عضوی از C است. $=\{A\}$

تذکر!

تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست، عضو همهٔ مجموعه‌ها نیست.

راز طراح!

طراح می‌خواست ببینه فرق عضو و زیرمجموعه رو خوب می‌دونی یا نه؟ تهی به عنوان زیرمجموعه خودش عضوی نداره ولی وقتی به عنوان یه عضو می‌ره توی یه مجموعهٔ دیگه حتما باید یه عضو مستقل در نظر گرفته بشه. یه وقت نگی چون عضوی نداره انگار که هیچی نیست و $B=\{a,\{a\},\varnothing\}$ مثل همون $B=\{a,\{a\}\}$ می‌مونه که صددرصد غلطه! اولی سه تا عضو داره که یکی a، یکی $\{a\}$ و یک عضوشم تهی هست و دومی دو تا عضو داره یکی a و یکی $\{a\}$.

۱- جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. در استخراج چهار مهره به تصادف از درون آن، احتمال آن‌که تعداد مهره‌های سبز منتخب از تعداد مهره‌های قرمز منتخب بیش‌تر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۴۷ ـ ۱۰۰۷)**

وقتی در کل ۴ مهره استخراج می‌کنیم، برای این‌که تعداد مهره‌های سبز بیش‌تر از مهره‌های قرمز باشد، یا باید تمام مهره‌ها سبز باشند و هیچ مهرهٔ قرمزی خارج نشود یا باید تعداد مهره‌های سبز ۳ تا و تعداد مهره‌های قرمز یکی باشد. بنابراین طبق اصل جمع احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=P(\text{۴سبز})+P(\text{۳سبز و ۱ قرمز})=\frac{\binom{۴}{۴}\times\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۴}}+\frac{\binom{۴}{۳}\times\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۲۵}{۲۱۰}=\frac{۵}{۴۲}$$

بلد بودن محل به‌کار گیری اصل جمع و اصل ضرب از نون شب واجب‌تره!

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ روش وجود دارد.

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m\times n$ روش قابل انجام است.

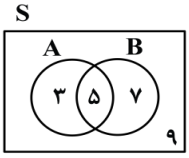
ترکیب r شیء از n شیء متمایز

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\quad (۰\le r\le n)$$

۲- در فضای نمونهٔ S دو پیشامد A و B و تعداد اعضای موجود در ناحیه‌های چهارگانه نمایش داده شده‌اند. اگر تمام اعضای فضای نمونهٔ S هم‌شانس باشند، آن‌گاه احتمال آن‌که فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، چقدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۱۰۲)

چون فضای نمونه هم‌شانس است، پس احتمال رخ دادن هر کدام از پیشامدهای تک‌عضوی برابر و برابر با $\frac{۱}{n(S)}$ است. در این صورت داریم:

$$P(A-B)+P(B-A)=\frac{۳}{n(S)}+\frac{۷}{n(S)}=\frac{۳}{۲۴}+\frac{۷}{۲۴}=\frac{۱۰}{۲۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

فرق فضای احتمال هم‌شانس و غیرشانس چیه؟!

در **فضای احتمال هم‌شانس** همون‌طور که توی متن پاسخ هم گفتیم احتمال رخ دادن هر کدوم از پیشامدهای تک‌عضوی برابره با $\frac{۱}{n(S)}$.

اما در فضای احتمال غیرهم‌شانس دیگه اینطور نیست که احتمال رخ دادن همهٔ پیشامدهای تک عضوی با هم برابر باشه. اگر حداقل دوتاشون هم احتمالشون با همدیگه برابر نباشه دیگه اون فضای احتمال، **فضای احتمال غیرهم‌شانس** می‌شه.

معنی «فقط یکی» رو همیشه یادت باشه!

اعضایی که فقط به یکی از مجموعه‌های A یا B تعلق دارند، یعنی اعضایی که **فقط در A** یا **فقط در B** هستند. تعداد اعضایی که فقط در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارند برابر است با:

$$n(A-B)+n(B-A)$$

یا به بیان دیگر برابر است با:

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)$$

بسته به اطلاعاتی که از مسئله داریم، از فرمول اولی یا دومی استفاده می‌کنیم.

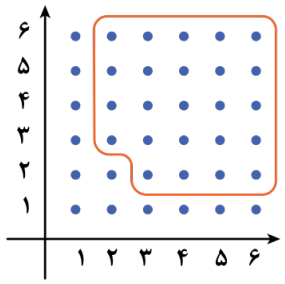
۳- در پرتاب دو تاس با یکدیگر احتمال آن‌که مجموع دو تاس کم‌تر از حاصل‌ضرب آن دو تاس باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

فضای نمونه و پیشامد مطلوب در شکل مقابل نمایان شده‌اند:



$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۲}{۳}$$

روش دوم

ابتدا صورت سؤال را به زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم. فضای نمونه:

$$S=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 6, 1\le y\le 6\}$$

اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم داریم:

$$A=\{(x,y)\in S\,|\,x+y<xy\}$$

با ساده‌تر کردن شرط $x+y<xy$ داریم:

$$x+y<xy \Rightarrow x<xy-y \Rightarrow x<(x-1)y \Rightarrow \frac{x}{x-1}<y$$

$$A=\left\{(x,y)\in S\,\middle|\,y>\frac{x}{x-1}\right\}$$

اکنون با رسم تابع هموگرافیک $y=\frac{x}{x-1}$ به همراه فضای نمونه در یک صفحهٔ مختصات می‌توانیم زوج مرتب‌های قابل قبول را پیدا کنیم.

چون شرط مطلوب $y>\frac{x}{x-1}$ است پس نقاطی را می‌خواهیم که بالای نمودار $y=\frac{x}{x-1}$ قرار بگیرند. این نقاط که در شکل بالا مشخص‌اند ۲۴ تا هستند و داریم:

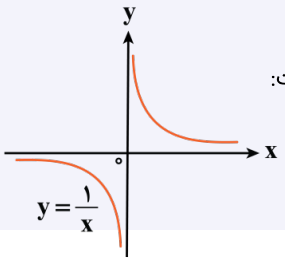
$$P(A)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

ترکیب حسابان و احتمال رو حال کردی؟!

گاهی برای محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب در احتمال نیاز داریم که یک معادله یا نامعادلهٔ ریاضی را حل کنیم. در این مواقع از اطلاعات ریاضی که از قبل داریم استفاده می‌کنیم.

یادآوری تابع هموگرافیک

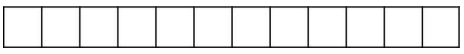
معروف‌ترین و ساده‌ترین تابع هموگرافیک، تابع $y=\frac{1}{x}$ است که در حالت کلی نمودار آن به‌صورت زیر است:



۴- در یک تیم والیبال ۱۲ نفری هیچ دو نفری با هم قد یکسانی ندارند. آن‌ها به تصادف در یک صف پشت سرهم می‌ایستند. احتمال آن‌که بین بلندقدترین و کوتاه‌قدترین آن‌ها، دقیقاً یک نفر ایستاده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{5}{11}$ ۲) $\frac{5}{33}$ ۳) $\frac{5}{22}$ ۴) $\frac{5}{66}$

معلوم است که $|S|=12!$



برای پیدا کردن $|A|$، ابتدا سه خانهٔ مجاور جهت قرار دادن بلندقدترین و کوتاه‌قدترین افراد در ابتدا و انتهای این ۳ خانهٔ جدول انتخاب می‌کنیم که به ۱۰ طریق امکان‌پذیر است. سپس بلندقدترین و کوتاه‌قدترین والیبالیست را به ۲! طریق در ابتدا و انتهای خانهٔ ۳ تایی انتخاب شده قرار داده و سایر افراد را به ۱۰! در خانه‌های باقی‌مانده می‌چینیم:

$$P(A)=\frac{10\times 2!\times 10!}{12!}=\frac{10\times 2\times 10!}{12\times 11\times 10!}=\frac{5}{33}$$

جایگشت

هر طریقهٔ قرار گرفتن n شیء متمایز در یک ردیف و در کنار هم را یک «جایگشت خطی» از آن n شیء می‌گوییم. جایگشت خطی n شیء متمایز برابر $n!$ است.

قِلِقشو یاد بگیر!

اگر در مسائل مربوط به جایگشت خطی اشیاء، چند شیء بخواهند کنار هم باشند اصطلاحاً اشیاء را به هم می‌بندیم و به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت اشیاء کلی را در جایگشت اشیاء داخل دسته، ضرب می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

۳ مهندس و ۴ پزشک را به چند طریق می‌توان در یک ردیف صندلی کنار هم نشاند به طوری که مهندس‌ها کنار هم باشند؟

۳ مهندس را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم. ببینید: پزشک، پزشک، پزشک، پزشک، (مهندس،مهندس،مهندس)

کل دستهٔ مهندس‌ها را یک شیء در نظر می‌گیریم. بنابراین:

جواب = ۵! × ۳!

↑ جایگشت کلی افراد

↓ جایگشت افراد داخل دسته

توجه!

توجه کنید که در این سؤال این‌که یک نفر بین بلندقدترین فرد و کوتاه‌قدترین فرد قرار بگیرد تفاوتی در نحوهٔ قرار گیری این دو نفر بین جایگاه‌های اول یا سوم در خانهٔ ۳ تایی ایجاد نمی‌کند و به ۲! طریق می‌توانند قرار بگیرند.

۵- عددی به تصادف از مجموعه اعداد $A=\{74,75,...,273\}$ انتخاب می‌شود، احتمال آن‌که مضرب ۳ بوده و شامل رقم ۲ نباشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۷ ۲) ۰/۱۹ ۳) ۰/۲۱ ۴) ۰/۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

یافتن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای:

فضای نمونه شامل ۷۳ − ۲۷۳ یعنی ۲۰۰ عضو است.

گام دوم

حذف بازه‌ای که به وضوح نامطلوب است:

در بازهٔ $[200,273]$ تمام اعداد شامل رقم ۲ هستند و نامطلوب‌اند، پس در ابتدا این عضوها را کنار می‌گذاریم.

گام سوم

در بین اعداد ۷۴ تا ۱۹۹، تعداد اعدادی که مضرب ۳ هستند را می‌یابیم:

روش اول

به تعداد ۱۲۶ عدد بین اعداد ۷۴ تا ۱۹۹ وجود دارد که $\frac{۱}{۳}$ از آن‌ها یعنی ۴۲ تا از آن‌ها مضرب ۳ هستند.

روش دوم

$$\left[\frac{۱۹۹}{۳}\right]-\left[\frac{۷۳}{۳}\right]=۶۶-۲۴=۴۲$$

گام جهارم

حذف اعداد نامطلوب بین ۴۲ عددی که مضارب ۳ هستند:

اعداد ۱۰۲، ۱۳۲، ۱۶۲، ۱۹۲ و نیز اعداد ۱۲۰، ۱۲۳، ۱۲۶ و ۱۲۹ از آن ۴۲ عدد مضرب ۳ بوده و شامل رقم ۲ هستند.

گام آخر

محاسبهٔ حالات مطلوب:

بنابراین پیشامد مطلوب ۸ − ۴۲ یعنی ۳۴ عضو خواهد داشت، پس:

$$P(A)=\frac{۳۴}{۲۰۰}=\frac{۱۷}{۱۰۰}=۰/۱۷$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر n

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر n در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,m\}$ برابر است با:

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

[ ] نماد جزء صحیح است.

۱- جعبه‌ای شامل ۱۰ گوی با شماره‌های ۱۰,...,۳,۲,۱ است. گوی‌ها را یکی پس از دیگری از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم گوی ۲ زودتر از گوی ۷ بیرون آمده است. چقدر احتمال دارد که گوی ۵ به عنوان اولین گوی آمده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

احتمال اولین بودن هر گوی از گوی‌های دهگانه مستقل از یکدیگر و برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است. با علم به این‌که ۲ زودتر از ۷ بیرون آمده است مانند آن است که گوی ۷ شانس خود را به ۲ داده باشد و شانس اولین بودن ۲ برابر $\frac{۲}{۱۰}$ و شانس اولین بودن گوی ۷ برابر صفر شده و شانس اول بودن هر یک از گوی‌های دیگر از جمله گوی ۵ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است.

روش دوم

فضای نمونهٔ کاهش یافته:

توجه کنید که گوی‌ها می‌توانند به $۱۰!$ طریق یکی پس از دیگری از جعبه بیرون بیایند. اما چون می‌دانیم که ۲ زودتر از ۷ بیرون آمده تعداد حالت‌ها نصف می‌شود، چون در نیمی از حالت‌ها ۷ زودتر از ۲ خارج می‌شود و در نیمی دیگر ۲ زودتر از ۷.

حال اگر بخواهیم که ۵ اولین گوی بیرون آمده باشد، پس اولین گوی مشخص است و ۹ گوی بعدی به $۹!$ طریق می‌توانند خارج شوند. اما باز هم چون می‌دانیم که ۲ زودتر از ۷ خارج شده، تعداد حالت‌ها نصف می‌شود. اگر پیشامد اولین عدد بودن ۵ را A بنامیم، داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۹!}{۲}}{\frac{۱۰!}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}$$

روش سوم

اگر پیشامد زودتر آمدن ۲ از ۷ را B و اولین عدد بودن ۵ را A بنامیم، داریم:

چون در نیمی از حالت‌ها ۷ زودتر از ۲ خارج می‌شود و در نیمی دیگر ۲ زودتر از ۷:

$$P(B)=\frac{۱}{۲}$$

چون دو پیشامد مستقل هستند داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}$$

پس در نهایت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}$$

دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه وقوع هر یک بر وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. برای دو پیشامد مستقل داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

احتمال شرطی

اگر B پیشامدی باشد که احتمال وقوع آن ناصفر است، پیشامد «**وقوع A به شرط وقوع B**» را با $A|B$ نشان می‌دهیم و احتمال آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

۲- اگر فضای نمونهٔ $S=\{a,b,c,d,e\}$ چنان باشد که $P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})$ ، $P(a)=۲P(d)$ و $P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}$، آن‌گاه $P(a)$ کدام خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۲)

از فرض $P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}$ داریم:

$$P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(\{a,c,d\})=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}\ (۱)$$

و از فرض‌های $P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})$ و $P(a)=۲P(d)$ داریم:

$$P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})\Rightarrow P(a)+P(c)=۳P(a)+۳P(d)\Rightarrow P(c)=۲P(a)+۳P(d)\xrightarrow{P(a)=۲P(d)}P(c)=۷P(d)\ (۲)$$

اکنون با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$P(\{a,c,d\})=\frac{۵}{۸}\Rightarrow P(a)+P(c)+P(d)=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۲P(d)+۷P(d)+P(d)=\frac{۵}{۸}\Rightarrow P(d)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(a)=۲P(d)\Rightarrow P(a)=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

فضای احتمال غیرهم‌شانس

یک فضای احتمال را **فضای احتمال غیرهم‌شانس** گوییم، اگر حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک عضوی) از فضای نمونه احتمالشان با یکدیگر برابر نباشد.

اما در **فضای احتمال هم‌شانس** احتمال رخ دادن هر کدوم از پیشامدهای تک‌عضوی برابر و مساوی با $\frac{1}{n(S)}$ است.

مثال

۳- در درون جعبه‌ای ۵ کارت وجود دارد که ۳ تا از آن‌ها هر دو رو قرمز، یکی از آن‌ها هر دو رو سفید و بالاخره یکی از آن‌ها چنان است که یک رو سفید و یک رو قرمز است. از درون جعبه کارتی برداشته و به یک روی آن نگاه می‌کنیم. اگر آن رو، سفید باشد دو سکه و اگر قرمز باشد سه سکه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً دو تا از سکه‌ها پشت باشند، حدوداً چند درصد است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۱۰۲)

برای محاسبهٔ احتمال سفید بودن روی مشاهده شده یا قرمز بودن آن دو روش داریم:

روش اول

در مجموع ۵×۲ یعنی ۱۰ وجه وجود دارد، که از بین آن‌ها ۷ وجه قرمز و ۳ وجه سفید هستند و همگی وجوه با یکدیگر شانس یکسانی دارند.

پس: $P(\text{قرمز})=\frac{7}{10}$ و $P(\text{سفید})=\frac{3}{10}$

روش دوم

استفاده از قانون احتمال کل:

$$P(\text{قرمز})=(\frac{3}{5}\times 1)+(\frac{1}{5}\times 0)+(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2})=\frac{7}{10}$$ و $$P(\text{سفید})=(\frac{1}{5}\times 1)+(\frac{3}{5}\times 0)+(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2})=\frac{3}{10}$$

حال برای محاسبهٔ احتمال مطلوب بنابر قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{۲تا پشت})=P(\text{سفید}).P(\text{۲تا پشت}|\text{سفید})+P(\text{قرمز}).P(\text{۲تا پشت}|\text{قرمز})$$

$$P(\text{۲تا پشت})=\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{7}{10}\times\frac{\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{6+21}{80}=\frac{27}{80}=0/3375$$

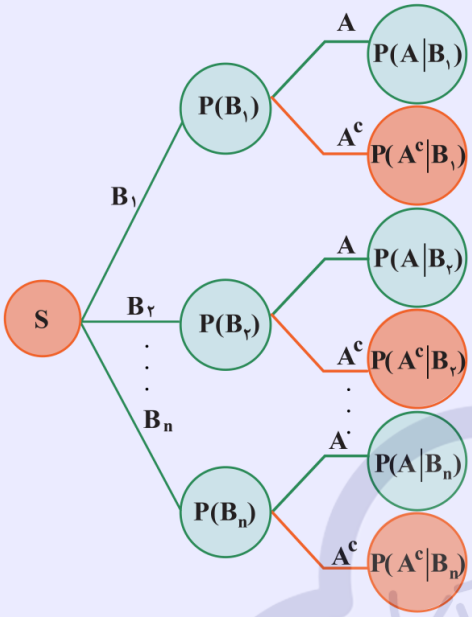
$$0/3375\times 100=33/75\simeq \%34$$

قانون احتمال کل

در مسائل مربوط به قانون احتمال کل می‌خواهیم احتمال وقوع پیشامدی مانند A را به دست آوریم به طوری که وقوع این پیشامد به پیشامدهای $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ وابسته است، یعنی ممکن است B_1 رخ داده باشد و A رخ دهد یا B_2 رخ داده باشد و A رخ دهد و ... و در نهایت این احتمال‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به این فرآیند (قانون احتمال کل) می‌گوییم.

$$P(A)=P(B_1)\times P(A|B_1)+P(B_2)\times P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\times P(A|B_n)$$

استفاده از رسم نمودار درختی برای احتمال کل:



۴- **جعبهٔ A دارای ۴ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز و جعبهٔ B دارای ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن بیرون کشیده شده است. اگر بدانیم مهرهٔ خارج شده قرمز است، احتمال آن‌که جعبهٔ B انتخاب شده باشد، چقدر است؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۱۰۲)

طبق خواستهٔ صورت سؤال مشخص است که از کل به جزء می‌رسیم و باید از قانون بیز استفاده کنیم:

$$P(B|\text{قرمز}) = \frac{P(B)P(\text{قرمز}|B)}{P(\text{قرمز})} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

قانون بیز

در احتمال کل، احتمال قسمت‌های جزئی را پیدا می‌کردیم و سپس با جمع کردن احتمال‌های به‌دست آمده، به احتمال کل می‌رسیدیم. حالا تصور کنید که در سوال، پیشامد مطلوب به صورت احتمال شرطی بیان شود و احتمال یکی از قسمت‌های جزئی خواسته شود یعنی باید از کل به جزء برسیم، این سبک احتمال را **«قانون بیز»** می‌نامیم.

یک قسمت از محاسبهٔ احتمال کل

$$P(A|B) = \frac{P(A)\times P(B|A)}{P(B)}$$

احتمال کل

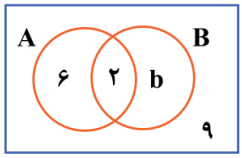
۵- اگر پیشامدهای A و B چنان باشند که $n(A)=۸$، $n(A\cap B)=۲$ و $n(A'\cap B')=۹$ و تمام اعضای فضای نمونه هم‌شانس باشند، آن‌گاه با فرض مستقل بودن A و B، P(B) کدام خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ⑥ ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

شرط مستقل بودن در احتمال اشتراک:



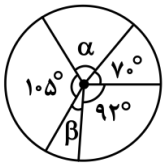
$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\Rightarrow \frac{۲}{۱۷+b}=\frac{۸}{۱۷+b}\times\frac{۲+b}{۱۷+b}\Rightarrow ۸+۴b=۱۷+b\Rightarrow b=۳$$
$$P(B)=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم

شرط مستقل بودن در احتمال شرطی:

$$P(B|A)=P(B)\Rightarrow \frac{۲}{۸}=\frac{۲+b}{۱۷+b}\Rightarrow b=۳$$
$$P(B)=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

۱- افراد یک جامعه بر اساس علاقه به تیم فوتبال به ۵ گروه متمایز تقسیم شده‌اند که نمودار مربوط به این آمارگیری در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر تعداد افراد موجود در ناحیهٔ متناظر به زاویهٔ مرکزی α، ۲۰ درصد از کل افراد آن جامعه باشند، آن‌گاه اندازهٔ β کدام است؟



۱) 19°
۲) 29°
۳) 21°
۴) 31°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۷۲ ـ ۱۱۰۳)

بررسی سریع:

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{20}{100}\Rightarrow\alpha=72^\circ$$

$$\alpha+\beta=360^\circ-(70^\circ+105^\circ+92^\circ)\Rightarrow\beta=21^\circ$$

از این‌که افراد متناظر با زاویهٔ مرکزی α، ۲۰ درصد جامعه را تشکیل می‌دهند داریم:

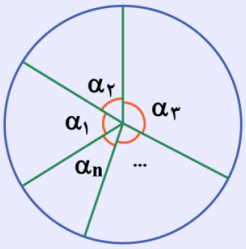
$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{20}{100}\Rightarrow\alpha=72^\circ$$

حال چون دایره 360° است، داریم:

$$\alpha+\beta=360^\circ-(70^\circ+105^\circ+92^\circ)\Rightarrow\beta=21^\circ$$

نمودار دایره‌ای برای نمایش داده‌ها

برای نمایش داده‌ها با استفاده از نمودار دایره‌ای نسبت هر گروه از جامعه به کل جامعه را در نظر گرفته و آن را به منزلهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر این گروه در دایره قرار می‌دهیم. به عنوان مثال اگر جامعه n دسته داشته باشد برای هر $1\le i\le n$ داریم:



$$\alpha_i=\frac{\text{تعداد اعضای گروه i-ام}}{\text{تعداد اعضای کل جامعه}}\times 360^\circ$$

۲- در داده‌های $۲۴,۲۲,۲۷,۲۵,a,۲۳$، مد و میانگین دو عدد طبیعی متوالی هستند. a کدام ویژگی را دارد؟

۱) عددی اول است. ۲) مربع کامل است. ۳) مکعب کامل است. ۴) بخش‌پذیر بر ۳ است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۸۴ ـ ۱۱۰۳)

بررسی سریع:

$S: ۴,۲,۷,۵,a',۳$

اگر a' با یکی از داده‌ها برابر نباشد، آن‌گاه آن جامعه مد ندارد، پس a' با یکی از داده‌ها برابر بوده و مد همان a' است، چون مد و میانگین اعدادی طبیعی و متوالی هستند و مجموع داده‌ها به غیر از a' برابر ۲۱ است، پس a' برابر ۳ شده و میانگین ۴ می‌شود، پس $a'=۳$ و $a=۲۳$. و ۲۳ عددی اول است.

بدون آن‌که از کلیت مسئله کم شود از هر داده ۲۰ واحد کم می‌کنیم:

$S: ۴,۲,۷,۵,a',۳$

اگر a' با یکی از داده‌ها برابر نباشد، آن‌گاه جامعه مد ندارد، پس a' با یکی از داده‌ها برابر بوده و مد همان a' است، چون میانگین هم عددی طبیعی و تعداد داده‌ها ۶تا است، پس باید مجموع داده‌ها مضرب ۶ باشد، یعنی:

$$\frac{۲۱+a'}{۶}=\bar{x}$$

از آن‌جایی که با بررسی مُد متوجه می‌شویم که a' باید یکی از اعداد $۲,۳,۴,۵,۷$ باشد، بررسی می‌کنیم که به‌ازای کدام مقادیر میانگین هم عددی طبیعی می‌شود:

$a'=۲ \Rightarrow ۲۱+۲=۲۳$ غ ق ق

$a'=۳ \Rightarrow ۲۱+۳=۲۴$ ✓

$a'=۴ \Rightarrow ۲۱+۴=۲۵$ غ ق ق

$a'=۵ \Rightarrow ۲۱+۵=۲۶$ غ ق ق

$a'=۷ \Rightarrow ۲۱+۷=۲۸$ غ ق ق

پس a' برابر ۳ شده و میانگین ۴ می‌شود، پس:

$a=a'+۲۰=۲۳$

و ۲۳ عددی اول است.

معیارهای گرایش به مرکز

میانگین ($\bar{x}$): اگر مجموع تمام داده‌ها را به تعدادشان تقسیم کنیم، میانگین به‌دست می‌آید.

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

(به میانگین مرکز ثقل هم گفته می‌شود.)

میانه (Q_2): ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها فرد بود $\Leftarrow$ داده‌ٔ وسط $=Q_2=$ میانه

اگر تعداد داده‌ها زوج بود $\Leftarrow$ میانگین دو داده‌ٔ وسط $=Q_2=$ میانه

مُد (نَما): داده‌ای که بیش‌ترین فراوانی را در بین داده‌ها دارد، مُد یا نمای داده‌ها نامیده می‌شود.

نکات مهم مد!

۱) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، مد ندارند.

۲) اگر دو داده بیش‌ترین فراوانی را داشته باشند، داده‌ها دو مُد دارند.

قِلقِشو یاد بگیر!

الف) برای راحت‌تر شدن محاسبات میانگین، می‌توان عدد ثابت $k\in\mathbb{R}$ را به تمام داده‌ها اضافه کرد و بعد از محاسبهٔ میانگین k واحد از آن کم کرد. زیرا:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{(x_1+k)+(x_2+k)+\ldots+(x_n+k)}{n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+k=\bar{x}+k$$

$$\bar{x}=\bar{x}_{\text{جدید}}-k$$

ب) برای محاسبهٔ مد نیز می‌توان عمل بالا رو انجام داد زیرا بزرگ‌تر یا کوچک‌تر کردن داده‌ها تأثیری در فراوانی آن‌ها ندارد.

۳- می‌خواهیم به یکی از داده‌های زیر ۲ واحد اضافه کنیم تا دامنهٔ میان چارکی داده‌های جدید نسبت به داده‌های قبلی ۱ واحد افزایش پیدا کند. دادهٔ تغییریافته (قبل از تغییر) چند شمارندهٔ مثبت دارد؟

۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۸۴ ـ ۱۱۰۳)

بررسی سریع:

$$\underset{\downarrow}{1,2}\quad,\quad 3,4,\underset{\downarrow}{5},6,7\quad,\quad \underset{\downarrow}{8,9}$$

$Q_1=2/5$ Q_2 $Q_3=7/5$

با اضافه کردن ۲ واحد به هر یک از داده‌های ۱ تا ۶، مقدار Q_1 یا افزایش پیدا می‌کند و یا تغییر نمی‌کند و مقدار Q_3 برابر $7/5$ باقی می‌ماند و در این حالت دامنهٔ میان‌چارکی افزایش پیدا نمی‌کند.

اما با افزایش ۲ واحد به هر یک از اعداد ۷، ۸ و ۹ مقدار Q_3 به ترتیب تبدیل به $8/5$، ۸ و $7/5$ تبدیل شده و چون Q_1 تغییر نمی‌کند، دامنهٔ میان‌چارکی به ترتیب برابر ۶، $5/5$ و ۵ خواهد شد که افزایش ۲ واحدی ۷ حالت مطلوب می‌شود، عدد ۷ فقط دو شمارندهٔ مثبت دارد.

در داده‌های فعلی، $Q_۱$ و $Q_۳$ به ترتیب ۲/۵ و ۷/۵ شده و دامنهٔ میان‌چارکی ۵ است:

$$۱ , ۲ \underset{Q_۱}{\downarrow} , ۳ , ۴ , \underset{Q_۲}{\downarrow} ۵ , ۶ , ۷ \underset{Q_۳}{\downarrow} , ۸ , ۹$$

حالت اول

با اضافه کردن ۲ واحد به هر یک از داده‌های ۱,۲,۳,۴,۵,۶، مقدار $Q_۱$ یا افزایش پیدا می‌کند و یا تغییر نمی‌کند و این در حالی است که مقدار $Q_۳$ برابر ۷/۵ باقی می‌ماند و در این صورت دامنهٔ میان‌چارکی (IQR) افزایش پیدا نمی‌کند.

حالت دوم

اما با افزایش ۲ واحد به هر یک از اعداد ۷، ۸ و ۹ مقدار $Q_۳$ به ترتیب تبدیل به ۸/۵، ۸ و ۷/۵ شده و چون $Q_۱$ تغییر نمی‌کند، دامنهٔ میان‌چارکی (IQR) به ترتیب برابر ۶، ۵/۵ و ۵ خواهد شد که افزایش ۲ واحدی ۷ مطلوب می‌شود، عدد ۷ فقط دو شمارندهٔ مثبت دارد.

کلاس درس چارک‌ها!

چارک‌ها (Q): چارک اول و دوم و سوم مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

چارک دوم همان میانه $(Q_۲)$ است.

روش محاسبهٔ چارک اول $(Q_۱)$ و چارک سوم $(Q_۳)$:

۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرده و میانه را می‌یابیم.

۲) میانهٔ داده‌های مرتب شدهٔ قبل از میانه را چارک اول $(Q_۱)$ می‌نامیم.

۳) میانهٔ داده‌های مرتب شدهٔ بعد از میانه را چارک سوم $(Q_۳)$ می‌نامیم.

۴- از ۲۰ دادهٔ آماری با انحراف معیار ۴ به تعداد چهار داده با انحراف معیار ۶ حذف کرده‌ایم. اگر میانگین داده‌های حذف‌شده با میانگین کل داده‌های اولیه یکسان باشد، آن‌گاه واریانس شانزده دادهٔ باقی‌مانده کدام خواهد شد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۱۰۳)

چون میانگین چهار دادهٔ حذف‌شده با میانگین کل داده‌ها یکسان بوده است، پس میانگین شانزده دادهٔ دیگر نیز با میانگین آن‌ها برابر است که آن را $\bar{x}$ می‌نامیم:

انحراف معیار تمام داده‌ها، ۴ دادهٔ حذف شده و ۱۶ دادهٔ باقی‌مانده را به ترتیب $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ می‌نامیم:

$$\sigma_۱ = ۴ \Rightarrow \sigma_۱^۲ = ۱۶ \Rightarrow \frac{(x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\dots+(x_{۲۰}-\bar{x})^۲}{۲۰} = ۱۶$$

$$\Rightarrow (x_۱-\bar{x})^۲+(x_۲-\bar{x})^۲+\dots+(x_{۲۰}-\bar{x})^۲ = ۳۲۰$$

$$\sigma_۲ = ۶ \Rightarrow \sigma_۲^۲ = ۳۶ \Rightarrow \frac{(x_{۱۷}-\bar{x})^۲+(x_{۱۸}-\bar{x})^۲+(x_{۱۹}-\bar{x})^۲+(x_{۲۰}-\bar{x})^۲}{۴} = ۳۶$$

$$\Rightarrow (x_{۱۷}-\bar{x})^۲+(x_{۱۸}-\bar{x})^۲+(x_{۱۹}-\bar{x})^۲+(x_{۲۰}-\bar{x})^۲ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۶}(x_i-\bar{x})^۲ = ۳۲۰-۱۴۴ = ۱۷۶$$

$$\sigma_۳^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۶}(x_i-\bar{x})^۲}{۱۶} = \frac{۱۷۶}{۱۶} = ۱۱$$

معیارهای پراکندگی

۱) واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

۲) انحراف معیار:

$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$$

۳) ضریب تغییرات:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

۴) دامنهٔ تغییرات:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

مثال

۵- ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟

۱۲,۱۲,۱۲,۶۰

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۱۰۳)

داده‌ها را تقسیم بر ۱۲ می‌کنیم:

$$S: ۱,۱,۱,۵ \Rightarrow \bar{x} = ۲$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-۱)^2+(-۱)^2+(-۱)^2+(۳)^2}{۴} = ۳ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{واقعی}} = ۱۲\sqrt{۳} \quad , \quad \bar{x}_{\text{واقعی}} = ۱۲ \times ۲ = ۲۴$$

$$\Rightarrow CV_{\text{واقعی}} = \frac{\sigma_{\text{واقعی}}}{\bar{x}_{\text{واقعی}}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۲۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کدام تغییرات روی داده‌ها واریانس و انحراف معیار را تغییر می‌دهد؟

۱) اگر همهٔ داده‌ها با مقداری ثابت جمع شوند واریانس تغییری نمی‌کند.

۲) اگر داده‌ها k برابر شوند، واریانس k^2 برابر می‌شود.

۳) اگر داده‌ها k برابر شوند، انحراف معیار k برابر می‌شود.

۴) اگر داده‌ها با عددی جمع شوند یا عددی از آن‌ها کم شود، یا در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، روی میانگین هم اعمال می‌شود:

$$\forall ۱ \le i \le n, k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \quad ; \quad x_i' = kx_i + b \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = k\bar{x} + b$$

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

الف) نمونه‌گیری سامانمند نوعی نمونه‌گیری خوشه‌ای محسوب می‌شود.

ب) اگر تفاوت داده‌ها در هر یک از گروه‌ها نوسان زیاد داشته ولی از گروهی به گروه دیگر نوسان میانگین کم باشد، آن‌گاه برای نمونه‌گیری، نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب‌تر است.

ج) واحد آماری زیر مجموعه‌ای از جامعه است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۰۱ ـ ۱۱۰۴)

هیچ کدام از گزاره‌ها صحیح نیستند. هر سه گزاره بنابر دلایل زیر نادرست هستند:

بررسی موارد:

الف) نمونه‌گیری سامانمند نوعی نمونه‌گیری **طبقه‌ای** است نه خوشه‌ای.

ب) برای توضیحات اشاره شده نمونه‌گیری **خوشه‌ای** مناسب‌تر است نه طبقه‌ای.

ج) واحد آماری **عضوی** از جامعه است نه زیرمجموعه.

روش‌های نمونه‌گیری

روش‌های نمونه‌گیری تصادفی (احتمالی) عبارتند از:

۱) نمونه‌گیری تصادفی ساده: در این روش از الگوی خاصی استفاده نمی‌شود و هر کدام از اعضای جامعه، با احتمال برابر ممکن است در نمونه انتخاب شوند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

قرعه‌کشی بین افراد شرکت‌کننده در یک مسابقه

۲) نمونه‌گیری خوشه‌ای: طبق ویژگی‌های اعضای جامعه، جامعه دارای خوشه‌هایی مجزا است که خود این خوشه‌ها از نظر تعداد لزوماً با هم برابر نیستند. ابتدا از بین خوشه‌ها تعدادی خوشه انتخاب می‌شود و اعضای خوشه‌های انتخاب شده اعضای نمونه را تشکیل می‌دهند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

برای انتخاب یک نمونه از شهروندان تهران، مناطق مختلف شهر را به منزلهٔ خوشه‌ها در نظر می‌گیریم. سپس تعدادی از مناطق شهرداری از بین ۲۲ منطقه را انتخاب کرده و در نهایت تمام شهروندان مناطق انتخاب‌شده را به عنوان نمونه معرفی می‌کنیم.

۳) نمونه‌گیری طبقه‌ای: در این روش ابتدا بر اساس یک معیار، جامعه به طبقاتی مجزا تقسیم می‌شود. سپس از هر طبقه یک نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب می‌شود. (پس احتمال انتخاب اعضای هم طبقه با هم مساوی است.)

یه نمونهٔ باحال ببین!

در یک شرکت ۵ مدیر، ۱۵ کارمند و ۳۰ کارگر وجود دارد. طبقات را مدیران، کارمندان و کارگران در نظر می‌گیریم. حال برای انتخاب یک نمونهٔ ۱۰ تایی از این شرکت از طبقهٔ مدیران ۱، از طبقهٔ کارمندان ۳ و از طبقهٔ کارگران ۶ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

فرض کنید در یک کارخانه ۱۰۰۰ نفر مشغول به کار هستند و یک نمونهٔ ۱۰۰ عضوی از این کارخانه می‌خواهیم. اسامی افراد به‌صورت لیستی و بر اساس الفبا مرتب شده‌اند. برای اجرای نمونه‌گیری سیستماتیک از ۱۰ شمارهٔ اول یک نقطه را برای شروع در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال ۶. از شمارهٔ ۶ به بعد هر ۱۰ نفر را به ترتیب از لیست انتخاب می‌کنیم، که لیست به‌صورت انتخاب نفرات ۶، ۱۶، ۲۶، ۳۶، ۴۶ و ... می‌شود و تا زمانی که ۱۰۰ نمونه را جمع آوری نمایید نمونه گیری را ادامه می‌دهید.

توجه!

در نمونه‌گیری سیستماتیک اعضای هر طبقه لزوما از نظر ویژگی شبیه به هم نیستند و احتمال اریبی وجود دارد.

نمونه‌گیری غیرتصادفی (نمونه‌گیری غیراحتمالی)

در یک نمونه گیری غیر تصادفی، افراد بر اساس معیارهای **غیرتصادفی** انتخاب می‌شوند و هر فرد شانس یکسان و معین انتخاب شدن در نمونه را ندارد. این نوع از نمونه‌گیری از نظر هزینه و دسترسی آسان‌تر است. اما در آن‌ها **خطر اریبی** بالاتر می‌باشد. از این روش نمونه‌گیری نمی‌توانید استنباط آماری معتبری را دربارهٔ کل جامعه داشته باشید. استفاده از نمونه‌گیری غیرتصادفی چه در مرحلهٔ طراحی و چه در مرحلهٔ اجرا ساده‌تر از نمونه‌گیری تصادفی است و به زمان و سرمایهٔ کمتری نیاز دارد.

جمع‌بندی روش‌های نمونه‌گیری

- روش‌های نمونه‌گیری
  - ۱) نمونه‌گیری احتمالی (اتفاقی یا تصادفی)
    - الف) نمونه‌گیری تصادفی ساده
    - ب) نمونه‌گیری خوشه‌ای
    - ج) نمونه‌گیری طبقه‌ای
    - د) نمونه‌گیری سامانمند (سیستماتیک)
  - ۲) نمونه‌گیری غیراحتمالی ← خطر اریبی بالا

مثال

۲- در یک جامعهٔ ۶ عضوی با مقادیر ۳،۱۱،۱۲،۱۷،۱۹و۲۲ اگر در انتخاب نمونه‌ای دو عضوی اعضای ۱۱ و ۱۹ انتخاب شود و پارامتر و آماره را به ترتیب a و b بنامیم، آن‌گاه $3a+b$ به کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۵۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۶۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

بررسی سریع:

$$\text{پارامتر} = \frac{3+11+12+17+19+22}{6} = 14 \qquad \text{آماره} = \frac{11+19}{2} = 15$$

$$\Rightarrow 3a+b = 3\times 14+15 = 57 = 3\times 19$$

بر اساس فعالیت کتاب درسی، مشخصهٔ عددی که برای محاسبهٔ پارامتر و آماره درنظر می‌گیریم میانگین است:

$$\text{پارامتر} = \text{میانگین جامعه} = \frac{3+11+12+17+19+22}{6} = 14$$

$$\text{آماره} = \text{میانگین نمونه} = \frac{11+19}{2} = 15$$

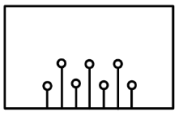
$$\Rightarrow 3a+b = 3\times 14+15 = 57$$

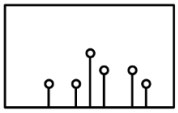
چون $3\times 19 = 57$ پس با توجه به گزینه‌ها ۱۹ پاسخ مورد نظر است.

قِلِقشو یاد بگیر!

هر مشخصهٔ عددی (مانند میانگین، میانه ، مد، واریانس و ...) وقتی برای **کل جامعه** محاسبه شود **پارامتر (پارامتر جامعه)**، و وقتی برای یک **نمونه** محاسبه شود **آماره (آمارهٔ نمونه)** است.

۳- در جامعهٔ ۱۰,۱۰,۸,۴,۲ جدول احتمال برای نمونه‌ای با اندازهٔ $n=2$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳)

۴)

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۴ ـ ۱۱۰۴)

بررسی سریع:

به تعداد $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ نمونهٔ دو عضوی وجود دارد که میانگین اعضای آن ۱۰ نمونه از کوچک به بزرگ به‌صورت ۱۰,۹,۹,۷,۷,۶,۶,۶,۵,۳ است، بنابراین در محور افقی اعداد ۱۰,۹,۷,۶,۵,۳ و در محور عمودی احتمالات آن‌ها نوشته می‌شود که احتمالات موردنظر به ترتیب $\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{2}{10},\frac{2}{10},\frac{1}{10}$ است که در گزینهٔ ۲ به درستی نمایش داده شده است.

به تعداد $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ نمونهٔ دو عضوی وجود دارد:

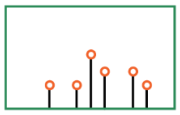
$10,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 10$ $\quad 8,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 9$ $\quad 4,8 \xrightarrow{\text{میانگین}} 6$ $\quad 2,4 \xrightarrow{\text{میانگین}} 3$

$8,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 9$ $\quad 4,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 7$ $\quad 2,8 \xrightarrow{\text{میانگین}} 5$

$4,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 7$ $\quad 2,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 6$

$2,10 \xrightarrow{\text{میانگین}} 6$

میانگین اعضای این ۱۰ نمونه از کوچک به بزرگ به‌صورت ۱۰,۹,۹,۷,۷,۶,۶,۶,۵,۳ است، بنابراین در محور افقی اعداد ۱۰,۹,۷,۶,۵,۳ و در محور عمودی احتمالات آن‌ها نوشته می‌شود. احتمالات موردنظر به ترتیب $\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{2}{10},\frac{2}{10},\frac{1}{10}$ است. پس نمودار به‌صورت زیر است که در گزینهٔ ۲ به درستی نمایش داده شده است.



۴- بازهٔ اطمینان ٪۹۵ برای میانگین جامعه‌ای به‌صورت (۱۸/۲,۱۹/۸) است. اگر بین n (تعداد اعضای نمونه) و σ (انحراف معیار جامعه) رابطهٔ $n+5\sigma=48$ برقرار باشد، آن‌گاه رقم یکان مجموع اعضای نمونه کدام است؟

۱) ۲ $\quad$ ۲) ۴ $\quad$ ۳) ۶ $\quad$ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۶ ـ ۱۱۰۴)

با توجه به این‌که بازهٔ برآورد میانگین با اطمینان بیش از ٪۹۵ به‌صورت $(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ است، داریم:

$$(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})=(18/2,19/8)$$

$$\Rightarrow \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}=19/8-18/2=1/6 \Rightarrow \sigma=\frac{2}{5}\sqrt{n} \quad (I)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$۵\sigma + n = ۴۸ \xrightarrow{(I)} ۲\sqrt{n} + n = ۴۸ \Rightarrow n + ۲\sqrt{n} - ۴۸ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{n} - ۶)(\sqrt{n} + ۸) = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sqrt{n} = ۶ \Rightarrow n = ۳۶ \\ \bar{x} = \dfrac{۱۹/۸ + ۱۸/۲}{۲} = ۱۹ \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۳۶} x_i = ۳۶ \times ۱۹ = ۶۸۴$$

بازهٔ برآورد میانگین با اطمینان بیش از ۹۵ درصد

بازهٔ برآورد میانگین با اطمینان بیش از ٪۹۵ به فرم زیر است:

$$\left[\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

که n حجم نمونه و σ انحراف معیار جامعه و $\bar{x}$ میانگین نمونه می‌باشد.

نتیجه) طول بازهٔ برآورد میانگین برابر است با:

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$$

تاز

۱- مجموعه‌های $A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $B=\{k,k+۱,k+۲,...,۶۰\}$ مفروض‌اند. حداکثر مقدار k که به‌ازای آن گزارهٔ سوری $\exists x\in B;\ \forall y\in A: x^۲.y\leq ۱۴۰۴$ ارزش درست داشته باشد، کدام رقم یکان را دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۱۰۱)

چون فرض کرده‌ایم گزارهٔ سوری ارزش درست دارد، به‌ازای هر عضوی از A نابرابری داده شده برقرار است. پس می‌توان y را ۹ قرار داد:

$$۹x^۲\leq ۱۴۰۴\Rightarrow x^۲\leq ۱۵۶\Rightarrow x\leq ۱۲$$

بنابراین باید در B عضوی کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ موجود باشد، پس با نابرابری موجود به حداکثر مقدار $k_{max}=۱۲$ خواهیم رسید که رقم یکان آن ۲ است.

رفع ابهام!

توجه کنید که اگر با هر یک از اعداد ۴ تا ۸ در A کار می‌کردیم، در این‌صورت مقادیر بزرگ‌تر از ۱۲ برای k به‌دست می‌آمد اما دیگر ارزش گزارهٔ سوری درست نمی‌شد. چرا که گزارهٔ سوری می‌گوید:«عضوی در B وجود دارد، که به‌ازای آن برای هر عضو در A نامساوی مذکور برقرار است.» و طبق این اگر هر عددی بزرگ‌تر از ۱۲ برای k درنظر بگیریم و B شامل ۱۲ نشود، به‌ازای عدد ۹ در A، عددی در B پیدا نمی‌شود که در گزاره صدق کند. پس عدد ۱۲ حداکثر مقداری است که k می‌تواند داشته باشد.

تاز

۲- اگر مجموعهٔ A به‌صورت $A=\{۲,\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه تعداد اعضای مجموعهٔ $P(A)-A$ از تعداد اعضای مجموعهٔ $A-P(A)$ چه تعداد بیش‌تر است؟ (مجموعهٔ $P(A)$ مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A است.)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

تعداد اعضای هر مجموعه را به‌دست می‌آوریم:

$$\left|P(A)-A\right|=\left|P(A)-\left[P(A)\cap A\right]\right|=\left|P(A)\right|-\left|P(A)\cap A\right|=۲^۳-۲=۶$$
$$\left|A-P(A)\right|=\left|A-\left[A\cap P(A)\right]\right|=\left|A\right|-\left|A\cap P(A)\right|=۳-۲=۱$$
$$\Rightarrow ۶-۱=۵$$

لازم به ذکر است که $A\cap P(A)=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ و $\left|A\cap P(A)\right|=۲$.

جرقهٔ ذهنی!

در بین اعضای A $\{۲\}$ و $\{۲,\{۲\}\}$ زیرمجموعه‌های آن نیز هستند، زیرا همین که ۲ عضو A است یعنی $\{۲\}$ یک زیرمجموعهٔ آن است.

از طرفی چون ۲ و $\{۲\}$ اعضای A هستند، پس یک زیر مجموعهٔ دو عضوی آن $\{۲,\{۲\}\}$ است.

پس برای پیدا کردن اشتراک A و $P(A)$ نیازی نیست تمام $P(A)$ را تشکیل دهیم.

مجموعهٔ توانی

اگر همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه را در یک مجموعه بریزیم، به مجموعهٔ حاصل مجموعهٔ توانی می‌گویند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند. (حرف P اولین حرف واژهٔ powerset به معنی مجموعهٔ توانی است.)

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A=\{\varnothing,a,\{b\}\}$ باشد، مجموعهٔ توانی A را به‌دست آورید.

تک عضوی‌ها — دو عضوی‌ها

$$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{a,\{b\}\},\{\varnothing,\{b\}\},A\}$$

مثال

۳- اگر **A**، **B** و **C** سه مجموعهٔ ناتهی متمایز باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $(A-B)-(B\cup C')$ با کدام مجموعه برابر خواهد شد؟

۱) $A-(B\cap C)$ ۲) $(A\cap C)-B$ ۳) $A-(B-C)$ ۴) $(A-B)-C$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۱۰۱)

$$\begin{aligned}&(A-B)-(B\cup C')\\&=(A\cap B')\cap(B\cup C')' && \text{(تبدیل تفاضل به اشتراک)}\\&=(A\cap B')\cap(B'\cap C) && \text{(دمورگان)}\\&=(A\cap C)\cap B' && \text{(توزیع‌پذیری)}\\&=(A\cap C)-B && \text{(تبدیل اشتراک به تفاضل)}\end{aligned}$$

جمع‌بندی قوانین مجموعه‌ها

اگر U مجموعهٔ مرجع و A، B و C زیرمجموعه‌های آن باشند؛ داریم:

تبدیل تفاضل به اشتراک	$\underbrace{A-B}_{A-(A\cap B)}=A\cap B'$
جابه‌جایی	$\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\A\cap B=B\cap A\end{cases}$
توزیع‌پذیری	$\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$
قوانین دمورگان	$\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$
قانون جذب	$\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$
شرکت‌پذیری	$\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\end{cases}$

۴- اگر $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{3,4,5\}$ و $C=\{2,4,6,8,10\}$، آن‌گاه چند زوج‌مرتب وجود دارد که عضوی از $B\times C$ بوده ولی عضوی از $A\times C$ نباشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۱۰۱)

عضوی از $B\times C$ بوده ولی عضوی از $A\times C$ نباشد یعنی $(B\times C)-(A\times C)$ یعنی باید اعضایی که هم در $B\times C$ هستند و هم در $A\times C$ از $B\times C$ حذف شوند.

$$|(B\times C)\cap(A\times C)'|=|(B\times C)-(A\times C)|=|(B-A)\times C|=|B-A|\times|C|$$

$$=|\{5\}|\times|\{2,4,6,8,10\}|=1\times5=5$$

ضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو مجموعهٔ A و B ضرب دکارتی آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

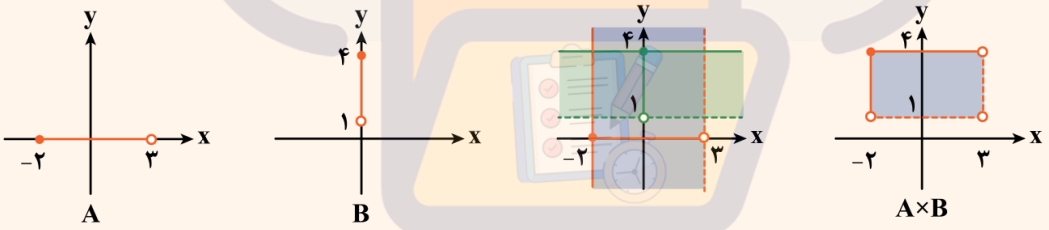
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

نمایش ضرب دکارتی روی محورهای مختصات

ابتدا مجموعهٔ A را روی محور xها، و مجموعهٔ B را روی محور yها مشخص می‌کنیم. سپس هر دو را در امتداد محور دیگر ادامه می‌دهیم. محل تلاقی هر دو ناحیهٔ ذکر شده همان $A\times B$ است.

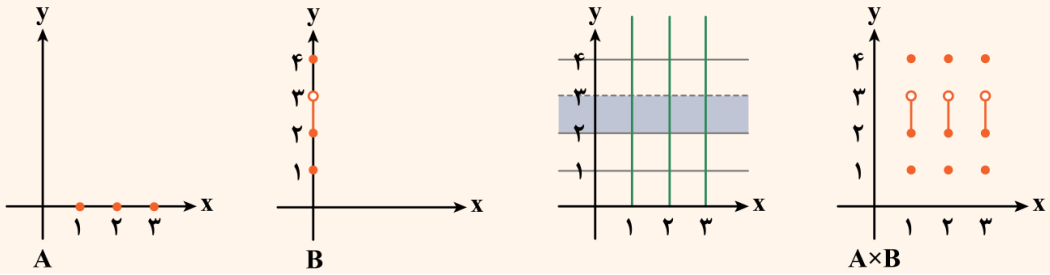
یه نمونهٔ باحال ببین!

$A=[-2,3)$ $B=(1,4]$



یه نمونهٔ باحال ببین!

$A=\{1,2,3\}$ $B=[2,3)\cup\{1,4\}$



خواص ضرب دکارتی

۱) ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

۲)

$$(A-C)\times B=A\times B-C\times B$$

$$(A\cup C)\times B=(A\times B)\cup(C\times B)$$

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^{۲}$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی

$$|A\times B|=|A|\times|B|$$

۱- در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عدد یک، نصف احتمال ظاهر شدن اعداد اول و احتمال ظاهر شدن اعداد ۴ و ۶ باهم مساوی هستند و دو برابر احتمال ظاهر شدن عدد ۲ هستند، با پرتاب این تاس احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۴ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ۲ ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۲)

اگر فرض کنیم احتمال ظاهر شدن اعداد اول یعنی ۲ یا ۳ یا ۵، برابر با x باشد، آن‌گاه: $P(۱)=\frac{x}{۲}\ ,\ P(۴)=P(۶)=۲x$

از طرفی داریم: $P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$$\frac{x}{۲}+x+x+۲x+x+۲x=۱\Rightarrow\frac{۱۵}{۲}x=۱\Rightarrow x=\frac{۲}{۱۵}$$

$$\Rightarrow P(۵)=\frac{۲}{۱۵}\ ,\ P(۶)=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین: احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۴ $=P(\{۵,۶\})=P(۵)+P(۶)=\frac{۲}{۱۵}+\frac{۴}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$

احتمال غیرهم‌شانس

اگر $S=\{S_۱,S_۲,...,S_n\}$ فضای نمونه‌ای متناهی باشد و S_iها غیرهم‌شانس باشند (یعنی مثلاً احتمال وقوع $S_۱$ با احتمال وقوع $S_۲$ فرق داشته باشد) آن‌گاه S را فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس می‌گویند.

به زبون خودمون یعنی اعضای S شانس برابر نداشته باشند و شانس یکی بیشتر از بقیه باشه!

در فضاهای نمونه‌ای غیرهم‌شانس داریم:

۱) $P(S)=۱$ یعنی:

$$\sum_{i=۱}^{n}P(S_i)=P(S_۱)+P(S_۲)+...+P(S_n)=۱$$

(به عبارت دیگه مجموع احتمال‌های فضای نمونه‌ای همیشه برابره یکه.)

۲) اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A=\{a_۱,a_۲,...,a_m\}\subseteq S$، آن‌گاه:

$$P(A)=P(\{a_۱,...,a_m\})=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_m)$$

در این صورت، چون $A\subseteq S$ بنابراین همواره: $۰\le P(A)\le ۱$

یه نمونهٔ باحال ببین!

در پرتاب تاس، اگر احتمال رو شدن اعداد زوج دو برابر اعداد فرد باشد، احتمال این‌که در پرتاب این تاس عددی اول بیاید چقدر است؟

پاسخ تشریحی:

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=x \quad , \quad P(۲)=P(۴)=P(۶)=۲x$$

بنابراین داریم: فضای نمونه $S=\{۱,۲,...,۶\}$

$$\sum_{i=۱}^{۶} P(i)=P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱ \Rightarrow x+۲x+x+۲x+x+۲x=۱ \Rightarrow ۹x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

$$P(\text{فرد})=\frac{۱}{۹} \quad , \quad P(\text{زوج})=\frac{۲}{۹}$$

و اگر A پیشامد اول بودن عدد ظاهرشده باشد، داریم: $A=\{۲,۳,۵\}$

$$P(A)=P(۲)+P(۳)+P(۵)=۲x+x+x=۴x \Rightarrow ۴(\frac{۱}{۹})=\frac{۴}{۹}$$

مثال

۲- در فصل پاییز در شهر تهران تعداد روزهای آلوده بودن هوا، پنج برابر روزهای با هوای پاک است. احتمال آن‌که فردی مسن در هوای پاک برای خرید از منزل خارج شود، ۰/۷ و احتمال آن‌که همین فرد در روزهای با هوای آلوده برای خرید از منزل خارج شود ۰/۴ است. می‌دانیم این شخص در یکی از روزهای پاییز از منزل خارج شده است. احتمال آن‌که هوای آن روز پاک بوده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۷}$ ۲) $\frac{۷}{۲۷}$ ۳) $\frac{۹}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۱۰۲)

$$\text{احتمال پاک بودن هوا}=x \Rightarrow \text{احتمال آلوده بودن هوا}=۵x \Rightarrow x+۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۶} \Rightarrow P(\text{هوای پاک})=\frac{۱}{۶}$$

اگر B پیشامد خارج شدن از منزل باشد و A' پیشامد آلوده بودن هوا باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۶} \, , \, P(A')=\frac{۵}{۶}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}$$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۶}\times ۰/۷}{\frac{۱}{۶}\times ۰/۷+\frac{۵}{۶}\times ۰/۴}=\frac{۰/۷}{۰/۷+۲}=\frac{۰/۷}{۲/۷}=\frac{۷}{۲۷}$$

احتمال شرطی و احتمال کل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $P(A|B)$ یعنی احتمال وقوع A به شرط وقوع B که برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

و آن را **احتمال شرطی** می‌نامند.

در واقع این‌جا چون B رخ داده است، دیگر فضای نمونه‌ای همهٔ S نیست و به B محدود شده و انگار B فضای نمونه‌ای جدیدی است و می‌خواهیم در این فضای جدید احتمال وقوع پیشامد A را بیابیم.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)$$

$P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)$ به **قانون ضرب احتمال** معروف است.

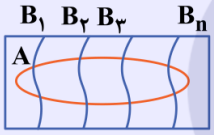
احتمال کل و قانون بیز

اگر $B_1, B_2, \ldots, B_n$ فضای نمونه‌ای S را افراز کنند، یعنی سه شرط زیر را ارضا کنند: (به‌ازای هر $1\le i,j\le n$ ، $i\neq j$)

۱) $P(B_i\cap B_j)=0$

۲) $P(B_i)\neq 0$

۳) $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$



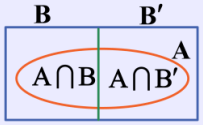
آن‌گاه مطابق شکل داریم:

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_n)$$

و طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)P(A|B_n)$$

به خصوص اگر S را به دو زیرمجموعهٔ B و B' تقسیم کنیم، در این صورت:



$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

با توجه به مطالب گفته‌شده نتیجهٔ مهمی می‌توان گرفت که آن را **قانون بیز** می‌نامند که تحت فرمول زیر بیان می‌شود:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

فرض کنید دو تا تاس در اختیار داریم. تاس سفید، تاس استاندارد است که احتمالِ آمدن هر یک از اعداد باهم برابر است و تاس سیاه که غیراستاندارد است و احتمال آمدنِ هر عدد متناسب با آن عدد است. به‌تصادف یکی از تاس‌ها را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که عددی اول بیاید کدام است؟

پاسخ تشریحی:

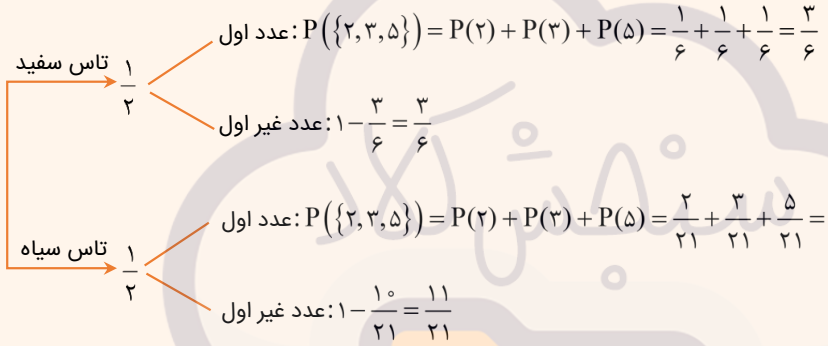
اولاً در تاس سیاه و غیراستاندارد داریم:

$$P(۱)=x\ ,\ P(۲)=۲x\ \ ,\ \ P(۳)=۳x\ ,\ ...,P(۶)=۶x$$

$$\sum_{i=۱}^{۶}P(i)=۱\Rightarrow x+۲x+۳x+۴x+۵x+۶x=۱\Rightarrow ۲۱x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۱}$$

بنابراین داریم: $P(۱)=\frac{۱}{۲۱}\ ,\ P(۲)=\frac{۲}{۲۱},...,P(۶)=\frac{۶}{۲۱}$

طبق نمودار درختی زیر مسئله را بررسی می‌کنیم:

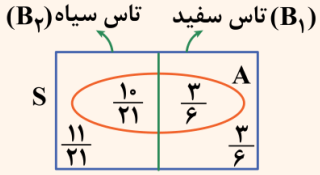


اگر A اول بودن عدد ظاهرشده باشد، و فرض کنیم $B_۱$ پیشامد سفید بودن تاس و $B_۲$ پیشامد سیاه بودن تاس باشد، آن‌گاه $B_۱$ و $B_۲$ فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند و داریم:

$$P(A)=P(A\cap B_۱)+P(A\cap B_۲)=P(A|B_۱)P(B_۱)+P(A|B_۲)P(B_۲)$$

$$=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱۰}{۲۱}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۲۱}=\frac{۲۱}{۸۴}+\frac{۲۰}{۸۴}=\frac{۴۱}{۸۴}$$

حال اگر مسئله گفته بود «عدد رو شده اول است احتمال آن‌که روی تاس سیاه دیده‌شده باشد، چقدر است؟» داشتیم:



$$P(B_۲|A)=\frac{P(A\cap B_۲)}{P(A)}=\frac{P(A|B_۲)P(B_۲)}{P(A|B_۱)P(B_۱)+P(A|B_۲)P(B_۲)}$$

$$=\frac{\frac{۱۰}{۲۱}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱۰}{۲۱}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۵}{۲۱}}{\frac{۴۱}{۸۴}}=\frac{۵\times\cancel{۸۴}^{۴}}{\cancel{۲۱}\times۴۱}=\frac{۲۰}{۴۱}$$

۳- دو سکه و دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع دو تاس عدد اول ظاهر شود یا سکه‌ها هر دو «رو» بیایند، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۲۱}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

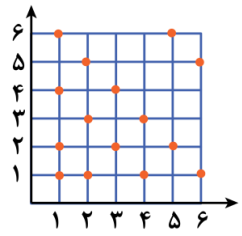
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

اگر A پیشامد رو ظاهر شدن هر دو سکه و B پیشامد اول بودن مجموع دو تاس باشد، آن‌گاه:

احتمال ظاهر شدن هر دو «رو» در پرتاب ۲ سکه برابر است با:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ احتمال اول بودن مجموع دو تاس از جدول زیر استفاده می‌کنیم.



مطابق نمودار مقابل، احتمال اول بودن مجموع دو تاس مساوی $\frac{۱۵}{۳۶}$ است، یعنی:

$$P(B)=\frac{۱۵}{۳۶}$$

از آن‌جا که A و B دو پیشامد مستقل‌اند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۱۵}{۳۶}-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۳۶+۶۰-۱۵}{۳۶\times۴}=\frac{۸۱}{۱۴۴}=\frac{۹}{۱۶}$$

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد باشند به‌طوری‌که احتمال رخ دادن یکی روی دیگری تأثیری نداشته باشد این دو پیشامد را **مستقل** می‌گویند. مثلاً احتمال قبولی سارا و تارا در درس ریاضی مستقل از هم است و فقط به تلاش هر کدام از آن‌ها بستگی دارد.

در پیشامدهای مستقل A و B داریم:

$$P(A|B)=P(A)\quad(\text{چون } B \text{ تأثیری روی } A \text{ نداره!})$$

بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(A)\times P(B)$$

یعنی:

$$A, B \text{ مستقل‌اند} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

۴- در یک سبد، ۴ سیب قرمز و ۳ سیب زرد و ۱ سیب سبز داریم. به‌تصادف و متوالی با جای‌گذاری دو سیب از سبد خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی از سیب‌ها زرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۶۴}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۴}$ ۳) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

چون انتخاب سیب‌ها با جای‌گذاری انجام می‌شود، پس در هر مرحله تعداد سیب‌ها تغییر نمی‌کند و ترتیب انتخاب هم مهم است:

$$P(\text{حداقل یکی زرد}) = P(\text{یک سیب زرد}) + P(\text{دو سیب زرد}) = \underbrace{\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۸}}_{\text{اولی زرد، دومی زرد}} + \underbrace{\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۸}}_{\text{اولی غیرزرد، دومی زرد}} + \underbrace{\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۸}}_{\text{اولی زرد، دومی غیرزرد}} = \frac{۳۹}{۶۴}$$

روش دوم متمم:

$$P(\text{حداقل یکی زرد}) = ۱ - P(\text{هیچ‌کدام زرد نباشند}) = ۱ - \underbrace{\left(\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۸}\right)}_{\text{هر دو غیرزرد}} = ۱ - \frac{۲۵}{۶۴} = \frac{۳۹}{۶۴}$$

پیشامد متمم

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم A که آن را با A' نمایش می‌دهیم، پیشامد رخ ندادن A است، یعنی:

$$A' = S - A$$

همواره داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر A پیشامد باران آمدن و $P(A) = ۰/۳$ باشد، پیشامد متمم A یعنی A' پیشامد باران نیامدن است و احتمال آن برابر است با:

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

۵- **ظرفی شامل ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید است. یک مهره به‌تصادف از ظرف خارج کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و سپس آن را به همراه دو مهرهٔ غیر همرنگ دیگر به ظرف برمی‌گردانیم، حال مهره‌ای را از ظرف خارج می‌کنیم، احتمال سفید بودن آن کدام است؟**

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲۹}{۶۳}$ ۳) $\frac{۲۳}{۶۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۵ و ۵۶ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

از فرمول احتمال کل استفاده می‌کنیم:

A: پیشامد سفید بودن مهرهٔ دوم

$B_۱$: پیشامد سفید بودن مهرهٔ اول $\Leftarrow P(B_۱)=\frac{۳}{۷}$

$B_۲$: پیشامد سیاه بودن مهرهٔ اول $\Leftarrow P(B_۲)=\frac{۴}{۷}$

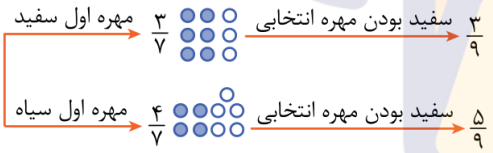
$$P(A)=\underbrace{P(B_۱)P(A|B_۱)}_{P(A\cap B_۱)}+\underbrace{P(B_۲)P(A|B_۲)}_{P(A\cap B_۲)}$$

$$P(A)=(\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۹})+(\frac{۴}{۷}\times\frac{۵}{۹})=\frac{۹}{۶۳}+\frac{۲۰}{۶۳}=\frac{۲۹}{۶۳}$$

توجه کنید که اگر $B_۱$ رخ دهد یعنی مهرهٔ اول سفید باشد، آن مهره را به همراه دو مهرهٔ سیاه به ظرف برمی‌گردانیم. در این حالت، ظرف شامل ۶ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید خواهد بود و احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم $\frac{۳}{۹}$ می‌شود و اگر $B_۲$ رخ دهد، یعنی مهرهٔ اول سیاه باشد، آن مهره را به همراه دو مهرهٔ سفید به ظرف برمی‌گردانیم. در این صورت ظرف شامل ۴ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ سفید خواهد بود و احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم $\frac{۵}{۹}$ می‌شود.

روش دوم

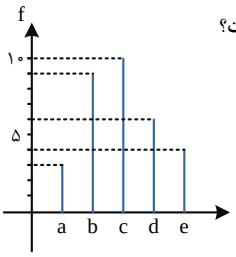
استفاده از نمودار درختی:



$$P(A)=(\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۹})+(\frac{۴}{۷}\times\frac{۵}{۹})=\frac{۹}{۶۳}+\frac{۲۰}{۶۳}=\frac{۲۹}{۶۳}$$

مشابه تمرین کتاب درسی

۱- زاویهٔ مرکزی متناظر به دادهٔ **d** در نمایش دایره‌ای داده‌های متناظر به نمودار میله‌ای مقابل کدام است؟



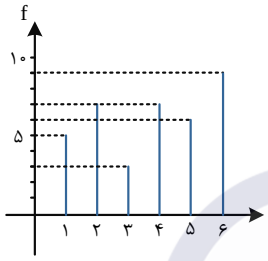
۱) $67/5^\circ$
۲) $62/5^\circ$
۳) 57°
۴) 54°

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{f_d}{\sum f}\Rightarrow\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{6}{3+9+10+6+4}\Rightarrow\alpha=\frac{6\times360^\circ}{32}=67/5^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲- با توجه به نمودار مقابل، اندازهٔ دامنهٔ میان‌چارکی داده‌ها کدام است؟



۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

باید Q_1 و Q_3 را پیدا کنیم. تعداد کل داده‌ها برابر $9+6+7+3+7+5$ یعنی ۳۷ است. دادهٔ نوزدهم Q_2 است که ۱۸ داده در سمت چپ آن و ۱۸ داده در سمت راست آن قرار می‌گیرد.

بنابراین میانگین داده‌های نهم و دهم یعنی $\frac{2+2}{2}$ برابر Q_1 و میانگین داده‌های بیست‌وهشتم (که آخرین ۵ است) و بیست‌ونهم (که اولین ۶ است) یعنی $\frac{5+6}{2}$ برابر Q_3 است، بنابراین:

$$Q_3-Q_1=5/5-2=3/5$$

گروه آموزشی ماز

۳- برای پنج دادهٔ آماری $7,8,9,a,b$ اگر پارامترهای میانگین، میانه و مد (که منحصر به فرد است) یکسان باشند، آن‌گاه برای $a+b$ چند مقدار متمایز یافت می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

اگر $a=b$، آن‌گاه مد a شده و باید تساوی $a=\frac{7+8+9+a+a}{5}$ برقرار باشد که مقدار a برابر ۸ به دست می‌آید:

$$a=b=8\Rightarrow\text{داده‌ها}:7,8,8,8,9$$

اگر $a\neq b$، آن‌گاه برای منحصر به فرد شدن مد لازم است a (و فرقی نمی‌کند یا b) با یکی از داده‌های ۷، ۸ و یا ۹ برابر باشد:

$$a=7\Rightarrow\text{مد}=7\Rightarrow\frac{7+7+8+9+b}{5}=7\Rightarrow b=4$$

$$\text{داده‌ها}:4,7,7,8,9$$

$$a=8\Rightarrow\text{مد}=8\Rightarrow\frac{7+8+8+9+b}{5}=8\Rightarrow b=8$$

با $a\neq b$ بودن در تضاد است.

$$a=9\Rightarrow\text{مد}=9\Rightarrow\frac{7+8+9+9+b}{5}=9\Rightarrow b=12$$

$$\text{داده‌ها}:7,8,9,9,12$$

$$\Rightarrow a+b=16\text{ یا }11\text{ یا }21$$

۴- در داده‌های آماری با جدول فراوانی مقابل، مقدار واریانس کدام است؟

x	۳۷	۴۰	۴۳	۴۶	۴۹
f	۳	۱۰	۲	۴	۶

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

واریانس داده‌های مقابل راحت‌تر محاسبه می‌شود.

y	−۲	−۱	۰	۱	۲
f	۳	۱۰	۲	۴	۶

$$\bar{y}=\frac{۳\times(-۲)+۱۰\times(-۱)+۴\times(۱)+۶\times(۲)}{۲۵}=۰$$

$$\Rightarrow \sigma_y^۲=\frac{۳\times(-۲)^۲+۱۰\times(-۱)^۲+۴(۱)^۲+۶\times(۲)^۲}{۲۵}=۲$$

$$x=۳y+۴۳\Rightarrow \sigma_x^۲=۹\sigma_y^۲\Rightarrow \sigma_x^۲=۱۸$$

گروه آموزشی ماز

۵- با اضافه کردن کدام‌یک از داده‌های زیر به داده‌های ۵,۷,۷,۱۲,۱۷,۱۸، مقدار ضریب تغییرات کاهش بیش‌تری خواهد داشت؟

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

هدف از ارائه این سوال محاسبه نیست، بلکه توجه به مفهوم است. جامعه‌ای ضریب تغییرات کمتری دارد که نوسان کمتری داشته باشد. اگر داده‌ای نزدیک به میانگین، به داده‌ها اضافه کنیم مقدار نوسان را کاهش داده‌ایم که در بین گزینه‌ها ۱۳ این ویژگی را دارد.

گروه آموزشی ماز

۶- در نمایش نمودار جعبه‌ای برای n دادهٔ آماری تعداد داده‌های سمت چپ (بخش الف) برابر ۲۳ شده است. اگر کم‌ترین مقدار ممکن برای n را a و بیش‌ترین مقدار ممکن برای n را b بنامیم، آن‌گاه یکان ۳b−۲a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

روش اول:

اگر $n=۹۲$، آن‌گاه ۲۳ داده در سمت چپ جعبه، ۲۳ داده در سمت راست آن و ۴۶ داده در درون جعبه قرار می‌گیرد و هیچ داده‌ای بر روی جعبه قرار نمی‌گیرد.

اگر $n=۹۳$، آن‌گاه ۲۳ داده در سمت چپ جعبه، ۲۳ داده در سمت راست آن و ۴۷ داده در درون جعبه قرار می‌گیرد.

اگر $n=۹۴$، آن‌گاه ۲۳ داده در سمت چپ جعبه، ۲۳ داده در سمت راست آن، ۴۶ داده در درون جعبه و دو داده بر روی جعبه قرار می‌گیرد.

و بالاخره اگر $n=۹۵$، آن‌گاه ۲۳ داده در سمت چپ جعبه، ۲۳ داده در سمت راست آن، ۴۷ داده در درون آن و دو داده بر روی جعبه قرار می‌گیرد، پس:

$$a=۹۲, b=۹۵\Rightarrow ۳b-۲a=۱۰۱$$

روش دوم:

$$\left[\frac{n}{۴}\right]=۲۳\Rightarrow ۲۳\le\frac{n}{۴}<۲۴\Rightarrow ۹۲\le n<۹۶\Rightarrow ۹۲\le n\le ۹۵\Rightarrow \begin{cases}a=۹۲\\ b=۹۵\end{cases}\Rightarrow ۳b-۲a=۱۰۱$$

۱- در جامعه‌ای به شکل $\{۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ احتمال آن‌که نمونه‌ای ۲ عضوی، میانگین را ۸ برآورد کند، کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

برای آن‌که نمونه‌های دوتایی، میانگین را ۸ برآورد کنند، باید جمع دو عدد ۱۶ شود.

$$\bar{x}=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow a+b=۱۶$$

تنها دو عضوی مطلوب، مجموعه‌های $\{۷,۹\}$ و $\{۶,۱۰\}$ هستند، پس:

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$$

۲- چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

الف: اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است.

ب: متغیرهای کیفی، متغیرهایی هستند که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند.

پ: متغیرهای کمی به دو نوع اسمی و ترتیبی تقسیم می‌شوند.

ت: میزان بارندگی در یک شهر برحسب میلی‌متر، متغیر کمی پیوسته و گروه خونی افراد، متغیر کیفی ترتیبی می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۷)

بررسی سایر موارد:

الف) نمونه زیرمجموعهٔ جامعه است، پس اندازهٔ نمونه کمتر از اندازهٔ جامعه می‌باشد، بنابراین مورد الف نادرست است.

ب) متغیرهای کمی قابل اندازه‌گیری هستند ولی متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند، پس مورد ب درست است.

پ) متغیرهای کمی به دو نوع پیوسته و گسسته و متغیرهای کیفی به دو نوع اسمی و ترتیبی تقسیم می‌شوند، پس مورد پ نادرست است.

ت) میزان بارندگی در یک شهر، قابل اندازه‌گیری بوده و هر عددی می‌تواند باشد، پس متغیر کمی پیوسته است و گروه خونی افراد یک متغیر غیرقابل اندازه‌گیری است که ترتیبی ندارد، پس متغیر کیفی اسمی می‌باشد، پس مورد ت نادرست است.

بنابراین ۳ گزارهٔ نادرست وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۳- در جامعه‌ای، انحراف معیار برابر ۴۵ است. حداقل تعداد اعضای نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین این نمونه، کمتر از ۲/۵ باشد؟

۱) ۲۵۷ ۲) ۳۲۴ ۳) ۳۲۵ ۴) ۲۵۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

اگر $\sigma_{\bar{x}}$ انحراف معیار برآورد میانگین و σ_x انحراف معیار جامعه باشد، برای یک نمونهٔ n عضوی داریم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{۴۵}{\sqrt{n}}<۲/۵\Rightarrow\sqrt{n}>\frac{۴۵}{۲/۵}\Rightarrow\sqrt{n}>۱۸\Rightarrow n>۳۲۴$$

پس حداقل تعداد اعضای نمونه برابر ۳۲۵ است.

گروه آموزشی ماز

۴- **ستاد بازرسی قیمت کالا و ارز برای جلوگیری از گران‌فروشی در ماه آخر سال (شب عید) تصمیم گرفته تا از پاساژ شامل ۵۰ فروشگاه، ۸ فروشگاه را انتخاب کرده و تمامی اقلام و کالاهای فروشگاه را از نظر قیمت بازرسی کند. برای انتخاب این نمونه از کدام روش نمونه‌گیری استفاده شده است؟**

۱) تصادفی ساده ۲) طبقه‌بندی ۳) خوشه‌ای ۴) سامانمند

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۴)

چون از بین تعدادی واحد آماری، چند واحد انتخاب شده و تمامی موارد و جزئیات آن مورد تحقیق قرار گرفته، پس این نمونه‌گیری خوشه‌ای است.

گروه آموزشی ماز

۵- **به چند طریق می‌توان یک دستهٔ گل شامل ۱۰ شاخه از ۴ نوع گل مریم، رز، نرگس و گلایل انتخاب کرد به طوری که از گل مریم حداقل ۳ شاخه و از گل رز بیش از یک شاخه انتخاب کنیم؟**

۱) ۲۸ ۲) ۴۵ ۳) ۵۶ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

۴ نوع گل را با x_1، x_2، x_3 و x_4 نشان می‌دهیم. تعداد جواب‌های این مسئله با تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر با شرایط تعیین شده برابر است.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_1\geq 3 \\ x_2>1\Rightarrow x_2\geq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} x_1=X_1+3 \\ x_2=X_2+2 \end{cases}\Rightarrow X_1+3+X_2+2+x_3+x_4=10\Rightarrow X_1+X_2+x_3+x_4=5$$

تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی $=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$

۱. اگر ارزش گزاره‌ی $p \vee (\sim q \vee r)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره‌ی زیر درست است؟

۱) $(p \vee r) \vee (q \wedge p)$ ۲) $(p \wedge q) \vee r$

۳) $(p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q)$ ۴) $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee p$

پاسخ: گزینه ۳

ارزش یک ترکیب فصلی هنگامی نادرست است که هر دو طرف نادرست باشند.

$$p \vee (\sim q \vee r) \equiv F \rightarrow \begin{cases} p \equiv F \\ \sim q \vee r \equiv F \rightarrow \begin{cases} \sim q \equiv F \rightarrow q \equiv T \\ r \equiv F \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به ارزش گزاره‌های r, q, p تمامی گزینه‌ها به جز گزینه‌ی (۳) نادرست‌اند. برای این گزینه داریم:

$$(p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (F \wedge T) \vee (T \wedge T) \equiv F \vee T \equiv T$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۲. برای برقراری هم‌ارزی $[p \wedge (x \vee \sim p)] \vee [\sim x \wedge (x \vee p)] \equiv \sim p$، x کدام گزاره می‌تواند باشد؟

۱) به ازای هر گزاره x ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \vee \sim q$ ۴) هرگز برقرار نیست.

پاسخ: گزینه ۴

$$[(p \wedge x) \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}] \vee [\underbrace{(\sim x \wedge x)}_{F} \vee (\sim x \wedge p)] \equiv (p \wedge x) \vee (p \wedge \sim x) \equiv p \wedge \underbrace{(x \vee \sim x)}_{T} \equiv p$$

پس هم‌ارزی صورت تست همیشه نادرست است و هرگز برقرار نمی‌شود.

۳. هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(\sim p \Leftrightarrow T) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) $p \Rightarrow q$ ۴) $q \Rightarrow \sim p$

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

ترکیب شرطی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب «اگر p، آن‌گاه q» که به صورت «$p \Rightarrow q$» نوشته می‌شود را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره‌ای $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته **نکات:**

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است و به ارزش q (تالی) ربطی ندارد. به این حالت انتفای مقدم می‌گویند.

۲ ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۳ هم‌ارزی مهمی داریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ترکیب دو شرطی دو گزاره: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $(p \Leftrightarrow q)$ نوشته و آن را ترکیب دو شرطی دو گزاره‌ی p و q می‌نامیم. گزاره‌ی $(p \Leftrightarrow q)$ به صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

«p اگر و تنها اگر q» - «اگر p آن‌گاه q و بالعکس» - «p شرط لازم و کافی است برای q».

نکته ارزش گزاره‌ی «$p \Leftrightarrow q$» هنگامی درست است که p و q، هم‌ارزش باشند. یعنی یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند. در نتیجه هنگامی که p و q هم‌ارزش نباشند، گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ نادرست است.

نکته **به عنوان آخرین نکته بدانید که:**

$p \Leftrightarrow T \equiv p$

$p \Leftrightarrow F \equiv p$

این تست را با دو روش حل خواهیم کرد:

روش اول: جبر گزاره‌ها:

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow T) \equiv (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \equiv ((\sim p \vee q) \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)) \equiv$$

$$(\sim (\sim p \vee q) \vee \sim p) \wedge (\sim (\sim p) \vee (\sim p \vee q)) \equiv \underbrace{((p \wedge \sim q) \vee \sim p)}_{\text{توزیع‌پذیری}} \wedge \underbrace{(p \vee (\sim p \vee q))}_{\text{شرکت‌پذیری}} \equiv$$

$$\underbrace{((p \vee \sim p)}_{T} \wedge (\sim q \vee \sim p)) \wedge \underbrace{((p \vee \sim p)}_{T} \vee q) \equiv (\sim q \vee \sim p) \wedge T \equiv \sim q \vee \sim p \equiv q \Rightarrow \sim p$$

روش دوم: ارزش‌گذاری: به گزاره‌های p و q ارزش دلخواه می‌دهیم و صورت سوال را بررسی می‌کنیم. سپس گزینه‌هایی که با ارزش صورت مسئله یکسان نیستند حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم. شاید نیاز باشد این عمل را چند بار تکرار کنیم!

$p, q \equiv T \rightarrow$ صورت تست: $(T \Rightarrow T) \Leftrightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv$

$T \Leftrightarrow F \equiv F$

گزینه‌هایی که ارزش آن‌ها F نمی‌شود رد می‌شوند:

۱) T ۲) T ۳) T ۴) F

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۴. اگر p و q گزاره‌هایی دلخواه باشند، با کدام احتمال ارزش گزاره‌ی مرکب $(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$ درست است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

صورت سوال	$\sim q \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	q	p
د	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن

همان‌طور که مشخص است گزاره‌ی موردنظر در سه حالت از چهار حالت ارزش درست دارد. بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۵. عکس نقیض گزاره‌ی شرطی $(p \vee q) \Rightarrow r$ کدام است؟

۱) $\sim r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۲) $r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ ۳) $\sim r \vee (\sim p \vee \sim q)$ ۴) $r \vee (\sim p \vee \sim q)$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

گزاره‌ی «$q \Rightarrow p$» عکس ترکیب شرطی «$p \Rightarrow q$» و گزاره‌ی «$\sim q \Rightarrow \sim p$» عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

نکته هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

روش اول:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} \sim r \Rightarrow \sim (p \vee q) \equiv \sim r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (\sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

روش دوم: چون می‌دانیم که عکس نقیض هر گزاره با خود آن هم‌ارزش است، می‌توانیم با ارزش‌گذاری نیز به جواب برسیم.

۱. با توجه به گزاره‌های زیر، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

آ) اگر معدل کوکب بالای ۱۹ شود، از پدرش جایزه می‌گیرد.

ب) برای این‌که معدل کوکب بالای ۱۹ شود، باید ریاضی ۲۰ بگیرد.

پ) اگر معلم ریاضی کوکب به او ارفاق کند، ریاضی ۲۰ می‌شود.

ت) کوکب از پدرش جایزه نگرفت.

۱) معدل کوکب بالای ۱۹ شده است.
۲) نمره ریاضی کوکب ۲۰ شده است.
۳) نمره ریاضی کوکب بالای ۱۹ شده است.
۴) معلم ریاضی کوکب به او ارفاق نکرده است.

پاسخ: گزینه ۴

چون کوکب جایزه نگرفته است پس معدلش بالای ۱۹ نشده است. چون معدل کوکب بالای ۱۹ نشده است، ریاضی ۲۰ نگرفته است. چون ریاضی ۲۰ نگرفته است، پس معلم ریاضی او به وی ارفاق نکرده است.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲. نقیض گزاره $(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) $p\vee q$
۲) $p\wedge q$
۳) $p\Rightarrow q$
۴) $q\Rightarrow p$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌ی شرطی:

نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge\sim q$. زیرا:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$$

$$\sim[(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)]\equiv(p\vee\sim q)\wedge\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\wedge q)$$

حال جدول ارزش گزاره به دست آمده را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$p\wedge q$	عبارت
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

چون ستون به دست آمده با ستون $p \wedge q$ یکسان است پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۳. ارزش گزاره‌ی $(q \wedge r) \Leftrightarrow p$ نادرست است. احتمال این که ارزش گزاره‌ی p درست باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

جدول ارزش گزاره:

حالت‌هایی که ارزش گزاره صورت سوال نادرست هستند، مدنظر است. یعنی ۴ حالت داریم. در ۳ حالت از این ۴ حالت ارزش گزاره‌ی p درست است.

بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

	$p \Leftrightarrow (q \wedge r)$	$q \wedge r$	r	q	p
×	د	د	د	د	د
✓	ن	ن	ن	د	د
✓	ن	ن	د	ن	د
✓	ن	ن	ن	ن	د
✓	ن	د	د	د	ن
×	د	ن	ن	د	ن
×	د	ن	د	ن	ن
×	د	ن	ن	ن	ن

۴. اگر $p \vee q \equiv T$ باشد، گزاره‌ی $(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim (\sim p \Rightarrow q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) p ۲) $\sim q$ ۳) F ۴) T

پاسخ: گزینه ۳

اگر $p \vee q$ درست باشد، حداقل یکی از دو گزاره‌ی p و q درست هستند. اگر فقط یکی از آن‌ها درست و دیگری نادرست باشد، $p \Leftrightarrow q$ نادرست خواهد بود که در نتیجه گزاره‌ی کلی نادرست خواهد بود (تا همین‌جا گزینه‌ی «۴» حذف می‌شود.) اما اگر $p \equiv T$ و $q \equiv T$ آن‌گاه $p \Leftrightarrow q \equiv T$ ولی برای $\sim (\sim p \Rightarrow q)$ داریم:

$$\sim (\sim T \Rightarrow T) \equiv \sim T \equiv F$$

و باز هم گزاره‌ی کلی نادرست است. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۵. نقیض گزاره‌ی سوری $(\exists x; x=3) \Rightarrow (\forall x; x^2=9)$ $(x \in \mathbb{R})$ کدام است؟

۱) $(\forall x; x \neq 3) \Rightarrow (\exists x; x^2 \neq 9)$

۲) $(\forall x; x^2=9) \wedge (\forall x; x \neq 3)$

۳) $(\exists x; x^2 \neq 9) \wedge (\exists x; x=3)$

۴) $(\exists x; x^2 \neq 9) \Rightarrow (\forall x; x \neq 3)$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌های سوری: برای نقیض کردن گزاره‌های سوری، ابتدا سور را عوض می‌کنیم. یعنی اگر سور عمومی داشتیم $(\forall)$، آن را به سور وجودی $(\exists)$ تبدیل می‌کنیم و بالعکس اگر سور وجودی داشتیم به جای آن سور عمومی قرار می‌دهیم، سپس گزاره را نقیض می‌کنیم. خلاصه:

$$\begin{cases} \sim(\forall x; p) = \exists x; \sim p \\ \sim(\exists x; p) = \forall x; \sim p \end{cases}$$

گزاره این تست یک گزاره شرطی است. می‌دانیم $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$. پس مقدم را بدون تغییر گذاشته و تالی را نقیض می‌کنیم. بین آن‌ها هم باید عطف قرار گیرد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۱ . کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \vee \sim(\sim q \Rightarrow p)$ است؟

۱) $p \vee \sim q$ ۲) $p \wedge \sim q$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $\sim p \wedge q$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: از گزاره هم‌ارز با گزارهٔ شرطی استفاده می‌کنیم:

$$(p \Rightarrow q) \vee \sim(\sim q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \vee \sim(\sim(\sim q) \vee p) \equiv (\sim p \vee q) \vee \sim(q \vee p) \equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \equiv \sim p \vee q$$

جدول ارزش رسم می‌کنیم:

عبارت	$\sim q \wedge \sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$\sim p$	q	p
د	ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	د	ن
د	د	د	د	د	ن	ن

روش دوم: ارزش‌گذاری:

$$p \equiv T, q \equiv T \xrightarrow{\text{صورت تست}} (T \Rightarrow T) \vee \sim(F \Rightarrow T) \equiv T$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) چون F می‌شوند، رد خواهند شد.

$$p \equiv F, q \equiv T \xrightarrow{\text{صورت تست}} (F \Rightarrow T) \vee \sim(F \Rightarrow F) \equiv T$$

پس گزینه‌ی (۱) چون F می‌شود، رد خواهد شد.

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۲ . ارزش گزاره‌ی کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ۲) $\sim p \Leftrightarrow q$

۳) $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ ۴) $p \Leftrightarrow \sim q$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

می‌دانیم $p \Leftrightarrow q$ همان $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ است. می‌توانیم به کمک هم‌ارزی مهم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ عبارت خودمان را ساده‌تر کنیم:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

البته که نیاز به حفظ کردن این روابط نیست و به راحتی قابل اثبات هستند.

گزینه‌ی (۲) را به کمک جبر گزاره‌ها ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

عبارت به دست آمده همان گزینه‌ی (۳) است. پس گزینه‌های (۲) و (۳) هم‌ارز هستند.

از طرفی مشخص است که عبارت گزینه‌ی (۴) دقیقاً هم‌ارز عبارت گزینه‌ی (۲) است.

(زیرا فقط اسم p و q جابه‌جا شده است.) اما آن را هم اثبات می‌کنیم:

$$p \Leftrightarrow \sim q \equiv (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)$$

اما گزینه‌ی (۱) با سه گزینه‌ی دیگر متفاوت است.

۳ . در چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{2,3,6,8,14,16,17,18\}$، میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، مضرب ۵ است؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۹۰ ۴) ۹۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر میانگین دو عدد بخواهد مضرب ۵ باشد، یعنی مجموع آن دو عدد مضرب ۱۰ است. حالت‌بندی‌های زیر را داریم. توجه کنید که هر کدام از اعداد بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ۲ حالت دارند. (می‌توانند در مجموعه باشند یا نباشند.)

$(2,18) \xrightarrow{\text{۶ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^6 = 64$

$(3,17) \xrightarrow{\text{۴ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^4 = 16$

$(6,14) \xrightarrow{\text{۱ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^1 = 2$

$(2,8) \xrightarrow{\text{۲ عدد بین آن‌ها قرار دارد.}} 2^2 = 4$

$(14,16) \xrightarrow{\text{عددی بین آن‌ها قرار ندارد.}} 2^0 = 1$

در کل ۸۷ زیرمجموعه با این شرایط خواهیم داشت.

۴ . دو مجموعه‌ی $\{x, x^2\}$ و $\{y, 16, y^2\}$ باهم مساوی‌اند. اختلاف بیشترین و کم‌ترین مقدار ممکن برای $x + y$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

دو مجموعه‌ی مساوی: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی گوییم هرگاه عضوهای یکسان داشته باشند.

$A = \{1,2,3\} = B$ $\quad B = \{1,1,2,2,3\}$ $\quad A = \{1,2,3,3\}$

نکته تکرار در مجموعه‌ها باعث افزایش تعداد اعضا نمی‌شود. تکرار بی‌تأثیر است. یعنی $A = \{1,1,1\}$ همان $A = \{1\}$ است و تنها یک عضو دارد.

تست‌درتست اگر $\{2y - 7\} = \{x + 1, 2x - 3, 4x - 3\}$، آنگاه xy کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

چون مجموعه $\{۷y-۲\}$ تک‌عضوی است پس مجموعه‌ی دیگر نیز فقط باید یک عضو داشته باشد. یعنی:

$$۴x-۳=۲x+۱\rightarrow x=۲$$

حالا $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\{۵,۵\}=\{۷y-۲\}\rightarrow ۷y-۲=۵\rightarrow y=۱$$

در این تست حالت‌های تساوی دو مجموعه را می‌نویسیم، برای آن‌که مجموعه‌ی $\{y,۱۶,y^۲\}$ دو عضو داشته باشد سه حالت داریم:

$$۱)\ y=۱۶\rightarrow\{۱۶,۲۵۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=۱۶$$

$$۲)\ y^۲=۱۶\rightarrow\begin{cases}y=۴\rightarrow\{۴,۱۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=۴\\ y=-۴\rightarrow\{-۴,۱۶\}=\{x,x^۲\}\rightarrow x=-۴\end{cases}$$

$$۳)\ y=y^۲\rightarrow\begin{cases}y=۰\rightarrow\{۰,۱۶\}=\{x,x^۲\}\quad \text{غ ق ق}\times\\ y=۱\rightarrow\{۱,۱۶\}=\{x,x^۲\}\quad \text{غ ق ق}\times\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $x+y$ برابر ۳۲ و کم‌ترین مقدار آن -۸ است.

۵ . سه مجموعه‌ی A,B,C از مجموعه‌ی مرجع U مفروض‌اند. اگر گزاره‌ی p به صورت $(A\subseteq B)$ و گزاره‌ی q برابر $(B\cap C=B)$ باشد و همچنین ارزش گزاره‌ی $p\wedge q$ درست باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A\cup B)\subseteq C$ ۲) $(A\cup C)=C$ ۳) $C-A=B$ ۴) $A\subseteq C$

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

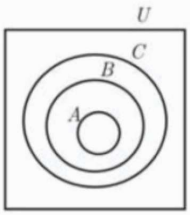
روش عضوگیری دلخواه: هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد.

از آن‌جا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$.

در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.

ویژگی ۱: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به‌طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$؛ ثابت کنید $A\subseteq C$.

اثبات: برای اثبات $A\subseteq C$ باید ثابت کنیم که: $\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in C)$



برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم:

$$\forall x: x\in A\xrightarrow{A\subseteq B} x\in B\xrightarrow{B\subseteq C} x\in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in C)\Rightarrow A\subseteq C$$

اگر گزاره‌ی $p\wedge q$ بخواهد درست باشد باید هر دو گزاره p و q درست باشند. پس داریم:

$$A\subseteq B\ ,\ B\cap C=B$$

از رابطه‌ی $B\cap C=B$ نتیجه می‌شود که $B\subseteq C$. (چرا؟) پس داریم:

$$A\subseteq B, B\subseteq C$$

طبق ویژگی بالا خواهیم داشت $A\subseteq C$. بنابراین $A\cup B\subseteq C$ و $A\cup C=C$. اما رابطه‌ی گزینه‌ی (۳) برقرار نیست.

۱ . اگر برای سه مجموعه‌ی C, B, A از مجموعه‌ی مرجع U داشته باشیم: $B \subseteq A \subseteq C$، آن‌گاه مجموعه‌ی $(B' \cap C') \cup (A \cap B)'$ برابر کدام گزینه است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) B'

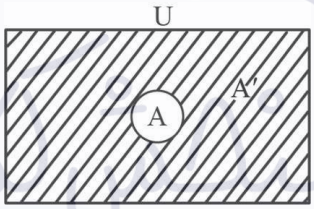
پاسخ: گزینه ۴ متوسط | تحلیلی- زیر مجموعه

درسنامه

فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$. ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر با مجموعه‌ی اعضایی از U است که متعلق به مجموعه‌ی A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x \in A$ آن‌گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ آن‌گاه $x \notin A$.

اثبات: برای این‌که ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه به B مجموعه قوی و به A مجموعه ضعیف می‌گوییم.

* اجتماع قویه رو می‌خواد و اشتراک ضعیفه رو می‌خواد!

$$A \cup B = B$$
$$A \cap B = A$$

در این تست چون $B \subseteq C$ می‌توان نتیجه گرفت $C' \subseteq B'$ و $B' \cap C' = C'$ از طرفی چون $B \subseteq A$ پس $A \cap B = B$.

در نتیجه:

$$(B' \cap C') \cup (A \cap B)' = C' \cup B' = B'$$

۲ . مجموعه‌ی $(A-B)-(C-B)$، با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، برابر است؟

۱) $(B-C)-A$ ۲) $A-(B \cup C')$ ۳) $B-(A \cup C)$ ۴) $(A-B)-C$

پاسخ: گزینه ۴ آسان| محاسباتی- جبر مجموعه

راه‌حل اول:

نکته $A-B=A\cap B'$

$(A-B)-(C-B)=(A\cap B')-(C\cap B')$

$(A\cap B')\cap(C\cap B')'=(A\cap B')\cap(C'\cup B)$

$(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap \underbrace{B'\cap B}_{\varnothing})=A\cap B'\cap C'$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\varnothing}$

$(A-B)\cap C'=(A-B)-C$

درسنامه

اشتراک پریم = تفاضل

نکته $A\cap B'=A-B$ همیشـــه یادتان باشد به جای اشتراک پریم می‌توانیم منها بگذاریم و بالعکس به جای منها می‌توانیم اشتراک پریم قرار دهیم.

نکته برای هر سه مجموعه‌ی A,B,C داریم:

۱) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۲) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

به این قوانین توزیع‌پذیری یا پخشی گفته می‌شود.

۳ . مجموعه‌ی $\{1,3,5,6,7,9\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع تمام اعضای آن دو رقمی باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۴ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۱ سخت| محاسباتی- تعداد زیر مجموعه

روش اول: حالت‌هایی که مجموع اعضای دو رقمی شوند را به صورت مستقیم می‌نویسیم:

۱) عضو ۹ باشد و بقیه 2^5 حالت. (البته به جز حالتی که هیچ‌کدام نباشند.): ۳۱ حالت

۲) ۶ و ۷ باشند و بقیه 2^3 حالت: ۸ حالت

۳) ۶ و ۵ باشند و بقیه 2^2 حالت: ۴ حالت

۴) ۳ و ۷ باشند و بقیه 2^1 حالت: ۲ حالت

۵) ۵ و ۷ باشند و بقیه 2^2 حالت: ۴ حالت

۶) $\{1,3,6\}$: ۱ حالت

$\xleftarrow{(+)}$ ۵۰ زیرمجموعه

روش دوم: از اصل متمم استفاده کنیم. یعنی حالاتی را بنویسیم که مجموع اعضا دو رقمی نشود.

۱) همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی: ۶ حالت

۲) $\{۱,۳\},\{۱,۵\},\{۱,۶\},\{۱,۷\}$ ← ۴ حالت

۳) $\{۳,۵\},\{۳,۶\}$ ← ۲ حالت

۴) $\{۱,۳,۵\}$ ← ۱ حالت

۵) $\{\ \}$ ← ۱ حالت

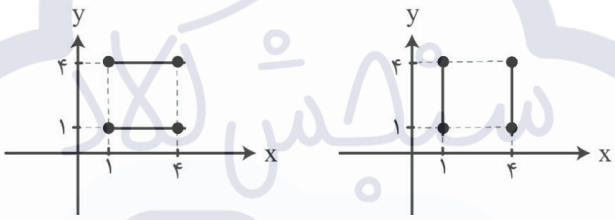
جواب: $۲^۶ - ۱۴ = ۵۰$

۴ . اگر $A=[۱,۴]$ و $B=\{۱,۴\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعهٔ $A\times B - B\times A$ چگونه است؟

۱) مربع ۲) ۴ نقطه ۳) دو پاره خط موازی افقی ۴) دو پاره خط موازی عمودی

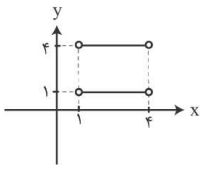
پاسخ: گزینه ۳ آسان| مفهومی- ضرب دکارتی

ابتدا نمودارهای مختصاتی $A\times B$ و $B\times A$ را به صورت جداگانه رسم می‌کنیم:



$A\times B$ $B\times A$

اشتراک مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$، چهار نقطهٔ $(۱,۱)$، $(۱,۴)$، $(۴,۱)$ و $(۴,۴)$ هستند که باید از مجموعهٔ $A\times B$ حذف بشوند تا به $A\times B - B\times A$ برسیم. نمودار حاصل به صورت مقابل است:



بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

درسنامه:

نمودار مختصاتی ضرب دکارتی دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B از مرجع U را در نظر می‌گیریم. به کمک تعریف ضرب دکارتی، مجموعهٔ $(A\times B)$ را تشکیل می‌دهیم.

الف) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به صورت زوج مرتب باشند، هر عضو را همانند مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم. (توجه کنید که برای انجام این کار، عضوهای مجموعهٔ اول، در این‌جا مجموعهٔ A، روی محور افقی و عضوهای مجموعهٔ دوم، در اینجا مجموعهٔ B، روی محور عمودی مشخص می‌شود.)

ب) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به کمک بازه‌های حقیقی نمایش داده شوند، بازهٔ متعلق به مجموعهٔ A را روی محور افقی و بازهٔ متعلق به مجموعهٔ B را روی محور عمودی در نظر می‌گیریم. به این ترتیب معمولاً یک سطح حاصل می‌شود.

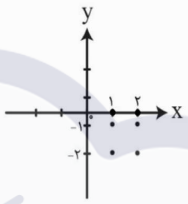
مثال: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{-1,-2,0\}$، آن‌گاه مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی هر کدام را رسم کنید.

پاسخ: به کمک تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه داریم:

$$A\times B=\{(1,-1),(1,-2),(1,0),(2,-1),(2,-2),(2,0)\}$$

$$B\times A=\{(-1,1),(-1,2),(-2,1),(-2,2),(0,1),(0,2)\}$$

برای رسم نمودار مختصاتی مجموعهٔ $(A\times B)$، عضوهای A را روی محور افقی و عضوهای B را روی محور عمودی مشخص می‌کنیم و سپس زوج‌های مرتب متعلق به $(A\times B)$ را به صورت نقطه نمایش می‌دهیم.



برای رسم نمودار مختصاتی مجموعهٔ $(B\times A)$، عضوهای B را روی محور افقی و عضوهای A را روی محور عمودی مشخص می‌کنیم.

مثال: اگر $A=\{2^x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|\le 1\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2+x-20=0\}$، آن‌گاه نمودار مختصاتی مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا مجموعه‌های A و B را با نوشتن عضوها مشخص می‌کنیم:

$$A=\{2^{-1},2^0,2^1\}=\{\frac{1}{2},1,2\}$$

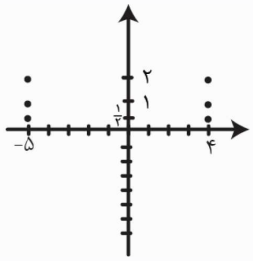
$$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid (x+5)(x-4)=0\}=\{-5,4\}$$

بنابراین با توجه به تعریف ضرب دکارتی داریم:

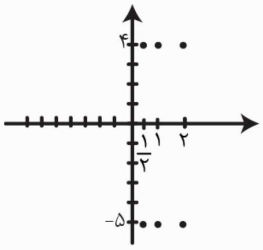
$$A\times B=\{(\frac{1}{2},-5),(\frac{1}{2},4),(1,-5),(1,4),(2,-5),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{(-5,\frac{1}{2}),(-5,1),(-5,2),(4,\frac{1}{2}),(4,1),(4,2)\}$$

اکنون همانند سوال قبل دارید :



نمودار مختصاتی $(B\times A)$



نمودار مختصاتی $(A\times B)$

۵ . اگر مجموعهٔ A دارای ۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۴ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۳ عضو باشند، مجموعهٔ $(A\cup B')'\times(A\cap B')$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ متوسط | مفهومی، محاسباتی- تعداد اعضای مجموعه و ضرب دکارتی

$|A|=۶\ ,\ |B|=۴\ ,\ |A\cap B|=۳$

$|(A\cup B')'\times(A\cap B')|=|(A'\cap B)\times(A-B)|$

$=|(B\cap A')\times(A-B)|=|(B-A)\times(A-B)|$

$=|B-(A\cap B)|\times|A-(A\cap B)|$

$=(|B|-|A\cap B|)\times(|A|-|A\cap B|)=(۴-۳)\times(۶-۳)=۳$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکته **یادآوری قوانین مهم از جبر مجموعه‌ها:**

$(A\cup B)'=A'\cap B'\ ,\ (A\cap B)'=A'\cup B'$

$A\cap B'=A-B$

الف) دمورگان

ب) اشتراک پریم = تفاضل

۱ . دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداکثر ۸ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۲ آسان | محاسباتی- احتمال ساده

$n(s)=۶^۲=۳۶$

$A=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۴,۲),(۴,۳)$

$(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۶,۲)\}$

$n(A)=۲۰$

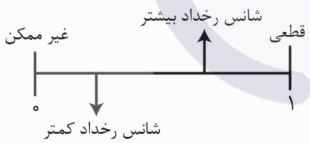
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$

درسنامه

فضای نمونه: مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن برای به وقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده یا آزمایش تصادفی می‌نامیم. مثلا اگر تاسی را پرتاب کنیم یکی از اعداد ۱ تا ۶ رو می‌شود. بنابراین فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می‌گویند.

پیشامد تصادفی: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک پیشامد تصادفی گویند. مثلاً در پرتاب یک تاس، پیشامد ظاهر شدن عددی زوج به صورت $A=\{۲,۴,۶\}$ خواهد بود.

احتمال رخداد یک پیشامد: اگر A پیشامدی تصادفی در فضای نمونهٔ S باشد، احتمال رخداد پیشامد A را به صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌کنیم. $P(A)$ عددی حقیقی بین صفر و یک است. به این صورت که هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس وقوع آن بیشتر و بالعکس هر قدر به صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کم‌تر است. ببینید:



اگر احتمال وقوع پیشامدی برابر صفر باشد، به آن پیشامد نشدنی (غیرممکن) و اگر برابر یک باشد به آن پیشامد قطعی گفته می‌شود.

$P(\varnothing)=۰$ $P(S)=۱$

۲ . در آزمایشگاهی ۶ میمون سالم و ۳ میمون هپاتیتی وجود دارد. اگر ۲ میمون از این آزمایشگاه فرار کنند، با کدام احتمال درصد میمون‌های بیمار باقی‌مانده در آزمایشگاه کم‌تر خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | محاسباتی- احتمال ساده، حالت‌بندی

برای آن‌که درصد میمون‌های بیمار کم‌تر شود، باید حداقل یکی از آن‌ها، جزو میمون‌های فراری باشد. یعنی ما باید احتمال آن‌که حداقل یک میمون هپاتیتی فرار کرده باشد را محاسبه کنیم. فضای نمونهٔ ما برای میمون‌های فراری $\binom{۹}{۲}$ است. احتمال آن‌که یک میمون سالم و یک میمون بیمار فرار کنند:

$$P(A_۱)=\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶\times۳}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

احتمال آن‌که دو میمون بیمار از آزمایشگاه فرار کنند:

$$P(A_۲)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=P(A_۱)+P(A_۲)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۳ . اگر $P(A-B')=۰/۲$ و $P(A\cup B)=۰/۸$، آن‌گاه احتمال پیشامد $(B\cap A')\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۱

پاسخ: گزینه ۳ آسان | محاسباتی- احتمال جبر مجموعه‌ها

نکته $A-B=A\cap B'$

$$P(A-B')=۰/۲\rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$$

$$P(A\cup B)=۰/۸\rightarrow P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{۰/۲}=۰/۸\rightarrow P(A)+P(B)=۱$$

$$P[(B\cap A')\cup(A-B)]=P[(B-A)\cup(A-B)]=P(B-A)+P(A-B)$$

$$P(B)-P(A\cap B)+P(A)-P(A-B)=\underbrace{P(A)+P(B)}_{۱}-۲\underbrace{P(A\cap B)}_{۰/۲}$$

$$=۱-۰/۴=۰/۶$$

۴ . از مجموعهٔ $\{۵۱,۵۲,\ldots,۲۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. با چه احتمالی عدد انتخابی مضرب ۵ است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{۸}{۷۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۷۵}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی- احتمال و جبر مجموعه‌ها

اگر مضرب ۵ بودن $=A$ و مضرب ۳ بودن $=B$ تعریف شود، سوال از ما $A-B$ را خواسته است؛ یعنی:

$$A-B=A-(A\cap B)$$

$A\cap B$ یعنی اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش پذیرند. بهتر بگوییم همان مضارب عدد ۱۵.

$$\begin{cases} A=[\frac{۲۰۰}{۵}]-[\frac{۵۰}{۵}]=۴۰-۱۰=۳۰ \\ A\cap B=[\frac{۲۰۰}{۱۵}]-[\frac{۵۰}{۱۵}]=۱۳-۳=۱۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A-(A\cap B)=۳۰-۱۰=۲۰$$

کل اعداد مجموعهٔ داده شده برابر با ۱۵۰ است، بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۲۰}{۱۵۰}$ یعنی $\frac{۲}{۱۵}$ می‌باشد.

۵ . اگر تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۴,۶,۹\}$ را بنویسیم و یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال حاصل‌ضرب اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۹ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ متوسط | حالت‌بندی و محاسباتی- احتمال متمم

ابتدا تعداد تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی A را می‌یابیم:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

حال زیرمجموعه‌هایی که حاصل‌ضرب اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر است را می‌نویسیم:

حالت اول: اگر عضو ۶ در زیرمجموعهٔ موردنظر وجود داشته باشد، حاصل‌ضرب تمام اعضا حتماً مضرب ۶ خواهد بود. پس عضو ۶ را انتخاب کرده و از بین ۴ عدد دیگر (۹، ۴، ۲، ۱) فقط دوتای آن‌ها را به تصادف برمی‌گزینیم.

تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\underbrace{۱}_{\text{انتخاب عضو ۶}}\times\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ عضو دیگر}}=۶$$

حالت دوم:

در حالت بعدی عضو ۶ را در نظر نمی‌گیریم. از بین اعداد ۹، ۴، ۲ و ۱ باید سه عضو انتخاب کنیم. چون عدد ۹ مضرب ۳ است و اعداد ۲ و ۴ نیز زوج هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها حتماً عامل ۶ خواهد ساخت. تنها حالتی که این اتفاق نمی‌افتد زیرمجموعهٔ $\{۱,۲,۴\}$ است. پس تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب در این حالت نیز برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}-۱=۴-۱=۳$$

بنابراین در مجموع $۶+۳=۹$ حالت مطلوب داریم. احتمال موردنظر برابر است با:

$$P_{\text{مطلوب}}=\frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}}=\frac{۹}{۱۰}=۰/۹$$

روش دوم: بهتر است زیرمجموعه‌هایی را بیابیم که حاصل‌ضرب اعضایشان بر ۶ بخش‌پذیر نباشد. تنها حالت یافت شده $\{۱,۲,۴\}$ است. بنابراین تنها یک حالت نامطلوب داریم. با استفاده از اصل متمم داریم:

$$P_{\text{نامطلوب}}=\frac{\text{نامطلوب}}{\text{کل}}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P_{\text{مطلوب}}=۱-P_{\text{نامطلوب}}=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

۱. یک تاکسی که ۴ نفر ظرفیت دارد، مسیر A به B را با حداقل یک مسافر و مسیر B به C را با حداقل ۲ مسافر طی می‌کند. اگر در مسیر برگشت از C به B و B به A، در مجموع ۷ مسافر داشته باشد، فضای نمونهٔ تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت چند عضو دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۸

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

در مسیر برگشت، از C به B، ۴ مسافر و از B به A، ۳ مسافر یا از C به B، ۳ مسافر و از B به A با ۴ مسافر طی می‌شود، پس:

$$S=(\{۱,۲,۳,۴\}\times\{۲,۳,۴\}\times\{۴\}\times\{۳\})\cup(\{۱,۲,۳,۴\}\times\{۲,۳,۴\}\times\{۳\}\times\{۴\})$$

پس داریم:

$$n(S)=(۴\times۳\times۱\times۱)+(۴\times۳\times۱\times۱)=۱۲+۱۲=۲۴$$

۲. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۲ نفر فقط به ریاضی و ۱۰ نفر فقط به فیزیک علاقه دارند. اگر P(A) و P(B) به ترتیب احتمال علاقه‌مندی به ریاضی و فیزیک در این کلاس باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۱۰}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

اگر x تعداد اعضای $A\cap B$ باشد، با توجه به این‌که $n(A-B)=۱۲$ و $n(B-A)=۱۰$ است، داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x+۱۲}{x+۱۰}=\frac{(x+۱۰)+۲}{x+۱۰}=۱+\frac{۲}{x+۱۰}$$

کم‌ترین مقدار ممکن برای $\frac{P(A)}{P(B)}$ هنگامی حاصل می‌شود که x بیشترین مقدار ممکن باشد و چون $x_{max}=۸$، پس:

$$\min(\frac{P(A)}{P(B)})=۱+\frac{۲}{۸+۱۰}=۱+\frac{۱}{۹}=\frac{۱۰}{۹}$$

۳. در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن هر عدد اول، سه برابر ظاهر شدن هر عدد غیراول است. در یک بار پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط | محاسباتی

طبق قانون جمع احتمالات می‌دانیم مجموع احتمالات ظاهر شدن اعداد ۱ تا ۶ بر روی تاس برابر یک است.

$$\begin{matrix}۱:x\\۲:۳x\\۳:۳x\\۴:x\\۵:۳x\\۶:x\end{matrix}\xrightarrow{(+)}۱۲x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

پس مطلوب مسئله برابر است با:

$$P(\{۱,۲\})=P(۱)+P(۲)=x+۳x=۴x=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۴ . اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای باشند، کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است؟

۱) $P(A).P(B)=۱-P(A'\cup B')$ ۲) $P(A).P(B)=۱-P(A'\cup B')$

۳) $P(A)+P(B)+P(A'\cup B')=۱$ ۴) $P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=۱$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

چون A و B ناسازگارند، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

و مطابق قضیهٔ متمم:

$$۱-P((A\cup B)')=P(A)+P(B)$$

از طرفی، طبق قانون دمورگان $(A\cup B)'=A'\cap B'$، پس داریم:

$$۱-P(A'\cap B')=P(A)+P(B)$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)+P(A'\cap B')=۱$$

۵ . در یک تجربه تصادفی، $S=\{a,b,c\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$، جملات متوالی یک دنباله هندسی با واسطه هندسی $\frac{۱}{۴}$ باشند، مقدار $P(c)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۸}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط | محاسباتی

$$P(b)=\frac{۱}{۴}\quad (*)$$

$$P(a)+P(b)+P(c)=۱\xrightarrow{(*)}P(a)+P(c)=\frac{۳}{۴}$$

$$P(a).P(c)=(P(b))^۲\Rightarrow P(a).P(c)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۱۶}=۰\Rightarrow x=\frac{\frac{۳}{۴}\pm\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲-۴(\frac{۱}{۱۶})}}{۲}=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۸}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(a)=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۸}\\P(b)=\frac{۱}{۴}\\P(c)=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۸}\end{cases}$$

۱ . در پرتاب سه تاس سالم، اگر هر سه عدد رو شده زوج باشند، با کدام احتمال مجموع این سه تاس برابر ۱۶ است؟

۱) $\frac{۱}{۷۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴ متوسط - محاسباتی | احتمال شرطی و کاهش فضای نمونه

اگر B پیشامد زوج آمدن هر سه تاس باشد، داریم: $n(B)=۳\times۳\times۳=۲۷$

از طرفی اگر A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد ظاهر شده ۱۶ شود، داریم:

$$A=\{(۴,۶,۶),(۶,۴,۶),(۶,۶,۴),(۵,۵,۶),(۵,۶,۵),(۶,۵,۵)\}$$

$A\cap B$ پیشامد آن است که همهٔ تاس‌ها زوج و مجموع آن‌ها برابر ۱۶ بیاید:

$$A\cap B=\{(۴,۶,۶),(۶,۴,۶),(۶,۶,۴)\}\rightarrow n(A\cap B)=۳$$

سپس طبق رابطهٔ احتمال شرطی خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۳}{۲۷}=\frac{۱}{۹}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲ . اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری‌که $P(A)=۰/۴$ و $P(B)=۰/۲$ و همچنین $P(A|B')=۰/۵$ باشد، آن‌گاه $P(A'|B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ ساده - محاسباتی | احتمال شرطی و قضایای احتمال

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}\Rightarrow P(A\cap B')=۰/۵\times۰/۸=۰/۴$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۴+۰/۸-۰/۴=۰/۸$$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{۱-P(A\cup B')}{P(B)}=\frac{۰/۲}{۰/۲}=۱$$

۳ . کوکب، بتول و ۶ نفر از دوستانشان وارد کلاس می‌شوند. اگر بتول زودتر از کوکب وارد کلاس شده باشد، احتمال آن‌که کوکب آخرین نفر وارد کلاس شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ متوسط - مفهومی | مسائل احتمال شرطی

احتمال آن‌که بتول زودتر از کوکب وارد کلاس شود $\frac{۱}{۲}$ است. (زیرا بین کوکب و بتول تفاوتی وجود ندارد و یکی از آن‌ها به تصادف زودتر از دیگری وارد کلاس خواهد شد. یعنی هر کدام ۵۰٪ شانس خواهند داشت!) اگر این احتمال را $P(A)$ بنامیم، داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی احتمال آن‌که کوکب به عنوان نفر آخر وارد کلاس شود برابر $\frac{۱}{۸}$ است. اگر این احتمال را $P(B)$ بنامیم، داریم:

$$P(B)=\frac{۱}{۸}$$

سوال از ما $P(B|A)$ را خواسته است. طبق فرمول احتمال شرطی می‌نویسیم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

توجه: دقت داشته باشید که اگر کوکب به عنوان نفر آخر وارد کلاس شده باشد، حتماً بتول زودتر از او وارد کلاس شده است. یعنی $B\subseteq A$. لذا می‌توان گفت:

$$P(A\cap B)=P(B)=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۴. احتمال موفقیت فردی در آزمون کتبی ۰/۷ و در آزمون شفاهی ۰/۵ است. اگر این فرد در آزمون کتبی قبول شود، شانس قبولی وی در آزمون شفاهی ۱۰٪ افزایش می‌یابد. با کدام احتمال این شخص لااقل در یکی از آزمون‌ها قبول می‌شود؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۷۸ ۴) ۰/۸۲

پاسخ: گزینه ۳ متوسط / مفهومی- محاسباتی | مسائل احتمال شرطی

$$P(A)=۰/۷\ (*)\ ,\ P(B)=۰/۵$$

$$P(B|A)=۰/۶\rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۰/۶\xrightarrow{(*)}P(A\cap B)=۰/۴۲$$

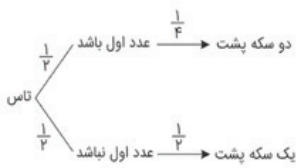
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۵-۰/۴۲=۰/۷۸$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵. تاسی را می‌اندازیم، اگر عدد اول ظاهر شد دو سکه و اگر عدد دیگری ظاهر شد، یک سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال در تمام پرتاب‌ها پشت ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲ متوسط - محاسباتی | قانون احتمال کل و نمودار درختی



$$\Rightarrow P(\text{پشت آمدن})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۸}$$

۳ حل
دبیرستان